УДК 517.928

©2004 р. Р.І. Петришин, Т.М. Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці

# УСЕРЕДНЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ І ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ІМПУЛЬСНОЇ БАГАТОЧАСТОТНОЇ СИСТЕМИ

За допомогою методів усереднення та стислих відображень доведено існування та єдиність розв'язків крайових задач з інтегральними крайовими умовами та параметрами для коливних систем з фіксованими моментами імпульсної дії. Встановлено також оцінки відхилення розв'язків вихідної та усередненої задач.

By means of methods of averaging and tough reflections the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems with parameters and integral boundary conditions for the oscillating systems with fixed moments of impulse influence have been proved. The estimations of decline of initial and averaging problems have also been stated.

При моделюванні коливних процесів ряду явищ механіки виникає необхідність дослідження різних типів крайових задач. У монографії [1] такі задачі досить повно досліджувались для багаточастотних систем. Якщо ж вказані системи підлягають імпульсній дії, то дослідження ускладнюються. Ряд результатів в цьому напрямі отримано у роботах [2-5]. У даній статті розглядаються крайові задачі з інтегральними крайовими умовами і параметрами для багаточастотних систем з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Тут застосовуються запропоновані в [1-5] методика дослідження подібних задач, а також оцінки осциляційних інтегралів і сум [6-8].

Нехай задана нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією і параметрами

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\xi,\tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\xi,\tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon p_j(x,\varphi,\xi), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon q_j(x,\varphi,\xi), \tag{1}$$

в якій $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{D}, \varphi = (\varphi_1,...,\varphi_m) \in R^m, Q \ni (\xi_1,...,\xi_s) = \xi$– невідомий параметр, $\tau = \varepsilon t \in I = [0,L]$,$(0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ - малий параметр, $\mathbb{D}, Q$ - обмежені відкриті області, $0 < \tau_1 \le \theta_0\varepsilon$, $\theta_0$ – стала, незалежна від $\varepsilon$, $\tau_{j+1} > \tau_j$ для всіх $j \in N$, $\Delta x|_{\tau=\tau_j} = x(\tau_j+0) - x(\tau_j-0)$, $\Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varphi(\tau_j+0) - \varphi(\tau_j-0)$.

Задамо для системи (1) інтегральні крайові умови з параметрами

$$\int_0^{\eta_\nu} f_\nu(x,\varphi,\xi,\eta,\tau)d\tau = P_\nu, \quad \nu = \overline{1,\lambda},$$

$$\int_0^L \left(B(x,\xi,\eta,\tau)\varphi + g(x,\varphi,\xi,\eta,\tau)\right)d\tau = C, \tag{2}$$

де $C$ і $P_\nu$ – сталі відповідно $m$- і $n_\nu$- вимірні вектори, $n_1+n_2+...+n_\lambda = n+s+\lambda$; $B(x,\xi,\eta,\tau)$– неперервна в $\mathbb{D}\times Q\times I^{\lambda+1}$ і обмежена сталою $c_1$ квадратна матриця $m$-го порядку; $I^\lambda \ni (\eta_1,...,\eta_\lambda) = \eta$– невідомий вектор параметрів; $f \equiv (f_1,...,f_\lambda), g$ – задані вектор-функції.

Ставиться задача знайти невідомі параметри $\xi, \eta$ і відповідний їм розв'язок $x, \varphi$ крайової задачі (1), (2).

Нехай рівномірно по $(x,\varphi,\xi) \in \mathbb{D}\times R^m\times Q$ існує границя

$$\lim_{j\to\infty} r_j(x,\varphi,\xi) = r(x,\varphi,\xi), \tag{3}$$

в якій $r_j(x,\varphi,\xi) = [p_j(x,\varphi,\xi); q_j(x,\varphi,\xi)]$.

Припустимо, що $\omega(\tau) \in C^l_{[0,L]}, l \geq m$, функції $z(x, \varphi, \xi, \tau) = [a(x, \varphi, \xi, \tau);\ b(x, \varphi, \xi, \tau)]$, $f(x, \varphi, \xi, \eta, \tau)$, $g(x, \varphi, \xi, \eta, \tau)$, $r_j(x, \varphi, \xi)$, $r(x, \varphi, \xi)$ $2\pi$-періодичні по кожній із змінних $\varphi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, і всі їх частинні похідні першого порядку задовольняють умову Ліпшиця по всіх змінних зі сталою $c_1$ в області $G \equiv \mathbb{D} \times R^m \times Q \times I^\lambda \times I$.

Припустимо, що існує скінченна границя

$$\lim_{j\to\infty} \bar{t}_j = \theta > 0, \qquad (4)$$

де $\bar{t}_j = t_{j+1} - t_j, t_j = \varepsilon^{-1}\tau_j$. При зроблених обмеженнях існує таке додатне число $\theta_1$, що $\bar{t}_j \geq \theta_1$ для всіх $j \in N$.

Нехай в кожній точці $(x, \xi, \eta, \tau) \in \mathbb{D} \times Q \times I^\lambda \times I$ виконуються нерівності

$$\sum_{k\neq 0} \left[ \|k\| \|z_k\| + \|\frac{\partial z_k}{\partial x}\| + \|\frac{\partial z_k}{\partial \xi}\| \right] \|k\|^{-1/(l+1)} \leq c_1,$$

$$\sum_{k\neq 0} \left[ \|k\| \|f_k\| + \|\frac{\partial f_k}{\partial x}\| + \|\frac{\partial f_k}{\partial \xi}\| \right] \|k\|^{-1/(l+1)} \leq c_1,$$

$$\sum_{k} \left[ \|k\| \|r_k\| + \|\frac{\partial r_k}{\partial x}\| + \|\frac{\partial r_k}{\partial \xi}\| \right] \|k\| \leq c_1, \qquad (5)$$

$$\sum_{k} \|k\|^{l/(l+1)} \|g_k\| \leq c_1. \qquad (6)$$

Тут $z_k = z_k(x, \xi, \tau)$, $f_k = f_k(x, \xi, \eta, \tau)$, $g_k = g_k(x, \xi, \eta, \tau)$ і $r_k = r_k(x, \xi)$ - коефіцієнти Фур'є $2\pi$-періодичних по $\varphi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, функцій $z(x, \varphi, \xi, \tau)$, $f(x, \varphi, \xi, \eta, \tau)$, $g(x, \varphi, \xi, \eta, \tau)$ і $r(x, \varphi, \xi)$, $k = (k_1, ..., k_m)$ - вектор з цілочисловими координатами. Під нормою вектора розуміємо евклідову норму, а норма матриці узгоджена з евклідовою нормою вектора.

Позначимо через $W_l(\tau)$ і $W_l^T(\tau)$ відповідно $l \times m$-матрицю

$$W_l(\tau) = \left( \frac{d^s}{d\tau^s} \omega_\nu(\tau) \right)_{s,\nu=1}^{l,m}$$

і транспоновану матрицю.

Поставимо у відповідність вихідній задачі усереднену по всіх кутових змінних $\varphi$ крайову задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \xi, \tau) + \frac{1}{\theta} \bar{p}(\bar{x}, \xi), \qquad (7)$$

$$\int_0^{\eta_\nu} \bar{f}_\nu(\bar{x}, \xi, \eta, \tau) d\tau = P_\nu, \quad \nu = \overline{1, \lambda}, \qquad (8)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}, \xi, \tau) + \frac{1}{\theta} \bar{q}(\bar{x}, \xi), \qquad (9)$$

$$\int_0^L \left( B(\bar{x}, \xi, \eta, \tau)\bar{\varphi} + \bar{g}(\bar{x}, \xi, \eta, \tau) \right) d\tau = C, \qquad (10)$$

де

$$[\bar{a}(x, \xi, \tau); \bar{b}(x, \xi, \tau)] = c_0(x, \xi, \tau),$$

$$[\bar{p}(x, \xi); \bar{q}(x, \xi)] = r_0(x, \xi).$$

$$\bar{g}(x, \xi, \eta, \tau) = g_0(x, \xi, \eta, \tau)$$

$$\bar{f} = f_0(x, \xi, \eta, \tau) =$$

$$= (\bar{f}_1(x, \xi, \eta, \tau), ..., \bar{f}_\lambda(x, \xi, \eta, \tau)).$$

Усереднена задача (7)-(10) значно простіша, ніж вихідна (1),(2), оскільки задача (7),(8) не залежить від швидких змінних. Крім того, усереднена задача, на відміну від вихідної, є гладкою та не підлягає імпульсній дії.

Позначимо через $x(\tau, y, \psi, \xi, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, y, \psi, \xi, \varepsilon)$ і $\bar{x}(\tau, y, \xi)$, $\bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \xi, \varepsilon)$ розв'язки відповідно систем (1) і (7),(9), які набувають значення $y, \psi$ при $\tau = 0$.

**Лема 1.** *Припустимо, що:*

*1) усереднена крайова задача (7),(8) має єдиний розв'язок $\xi = \xi^0 \in Q, \eta = \eta^0 \in I^\lambda, \bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$, причому крива $\bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$ лежить в $\mathbb{D}$ для всіх $\tau \in [0, L]$;*

*2) $m$ – вимірна квадратна матриця $B_1 \equiv \int_0^L B^0 dt \equiv \int_0^L B(\bar{x}(t, x^0, \xi^0), \xi^0, \eta^0, t) dt$ невироджена.*

*Тоді існує єдиний розв'язок $\bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \xi^0, \varepsilon)$ задачі (9),(10).*

**Доведення.** Розв'язок задачі (9),(10) визначається формулою

$$\bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \xi^0, \varepsilon) = \varphi^0 + \int_0^\tau [\frac{\omega(t)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}(t, x^0, \xi^0),$$

$$\xi^0, t)]dt + \frac{1}{\theta}\int\limits_0^\tau \bar{q}(\bar{x}(t, x^0, \xi^0), \xi^0)dt,$$

а невідомий параметр $\varphi^0$ знаходимо згідно з (10) із умови

$$\int\limits_0^L \Bigg( B(\bar{x}(\tau, x^0, \xi^0), \xi^0, \eta^0, \tau)\bar{\varphi}+$$

$$+\bar{g}(\bar{x}(\tau, x^0, \xi^0), \xi^0, \tau)\Bigg) d\tau = C \qquad (11)$$

або

$$\varphi^0 = B_1^{-1}\Bigg( C - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^L d\tau \int\limits_0^\tau B^0[\omega(t) + \varepsilon\bar{b}(\bar{x}(t, x^0,$$

$$\xi^0), \xi^0, t)]dt - \frac{1}{\theta}\int\limits_0^L d\tau \int\limits_0^\tau B^0\bar{q}(\bar{x}(t, x^0, \xi^0), \xi^0)dt -$$

$$-\int\limits_0^L \bar{g}(\bar{x}(t, x^0, \xi^0), \xi^0, t)dt\Bigg). \qquad (12)$$

Лему доведено.

Позначимо

$$U = U(\tau, y, \psi, \zeta, \varepsilon) = (x(\tau, y, \psi, \zeta, \varepsilon)-$$

$$-\bar{x}(\tau, y, \zeta); \varphi(\tau, y, \psi, \zeta, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \zeta, \varepsilon)).$$

Із [7,8] випливає, що при зроблених припущеннях на систему (1) можна вказати таке $\varepsilon_0(\mu) > 0$, що для всіх $\tau \in [0, L], y \in \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}, \psi \in R^m, \zeta \in Q$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\|U(\tau, y, \psi, \zeta, \varepsilon)\| \le \mu, \qquad (13)$$

а при більш сильних обмеженнях на коефіцієнти Фур'є, ніж (5), в [5] встановлено оцінку

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial y}\right\| + \left\|\frac{\partial U}{\partial \psi}\right\| + \left\|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right\| \le \mu. \qquad (14)$$

Для отримання нерівності (14) при виконанні обмежень (5) досить по-іншому оцінити осциляційні інтеграли та суми, які виникають при доведенні. Використаємо далі оцінки

$$\left\|\frac{\partial \bar{x}(\tau, y, \zeta)}{\partial \zeta}\right\| \le c_1(1 + \frac{1}{\theta})Le^{c_1(1+\frac{1}{\theta})L} \equiv c_3 e^{c_3},$$

$$\left\|\frac{\partial \bar{x}(\tau, y, \zeta)}{\partial y}\right\| \le ne^{c_3}, \qquad (15)$$

які отримуються з усереднених рівнянь для повільних змінних.

Розглянемо допоміжне твердження.

**Лема 2.** *Нехай виконуються припущення (3)-(6), $det(W_l^T(\tau)W_l(\tau)) > 0$ при $\tau \in [0, L]$ і крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, y, \zeta)$ лежить в $\mathbb{D}$ разом із своїм $\rho$-околом для всіх $\tau \in I, y \in \mathbb{D}_1, \zeta \in Q$.*

*Тоді для довільного $\mu > 0$ можна вказати таке досить мале $\varepsilon_0(\mu) > 0$, що для всіх $\tau \in [0, L], y \in \mathbb{D}_1, \psi \in R^m, \zeta \in Q, \eta \in I^\lambda$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ норми осциляційних інтегралів та сум*

$$\int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}dt, \quad \sum_{0<\tau_j<\tau} \varepsilon\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}, \quad \int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \varphi}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}dt,$$

$$\sum_{0<\tau_j<\tau} \varepsilon\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \varphi}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \quad \int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta}dt, \quad \sum_{0<\tau_j<\tau} \varepsilon\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta},$$

$$\int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \varphi}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta}dt, \quad \sum_{0<\tau_j<\tau} \varepsilon\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \varphi}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \zeta}, \quad \int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \varphi}dt,$$

$$\sum_{0<\tau_j<\tau} \varepsilon\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \varphi}, \quad \int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \psi}dt, \quad \int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}dt,$$

$$\int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta}dt, \quad \int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}dt, \quad \int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \zeta}dt, \quad \int\limits_0^\tau \tilde{f}dt,$$

$$\int\limits_0^\tau \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta_\nu}dt, \quad \nu = \overline{1, \lambda}, \qquad (16)$$

*не перевищують $\mu$. Тут*

$$\tilde{c} = c(x, \varphi, \zeta, t) - c_0(x, \zeta, t), \quad \tilde{r} = r(x, \varphi, \zeta)-$$

$$-r_0(x, \zeta), \quad \tilde{f} = f(\bar{x}, \bar{\varphi}, \zeta, \eta, t) - f_0(\bar{x}, \zeta, \eta, t),$$

$$\tilde{g} = g(\bar{x}, \bar{\varphi}, \zeta, \eta, t) - g_0(\bar{x}, \zeta, \eta, t),$$

$$x = x(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon), \quad \bar{x} = \bar{x}(t,y,\zeta),$$

$$\varphi = \varphi(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon), \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon).$$

**Доведення.** Для доведення використаємо метод оцінки осциляційних інтегралів і сум, запропонований в теоремі 1 [7].

Поряд з нерівностями (15) із усереднених рівнянь (7)-(10) одержимо оцінки

$$\left\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\zeta}\right\| \le c_3^2 e^{c_3}, \ \left\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}\right\| \le c_3 n e^{c_3},$$

$$\left\|\frac{\partial\bar{x}}{\partial\zeta}|_{t=t'} - \frac{\partial\bar{x}}{\partial\zeta}|_{t=t''}\right\| \le (1+c_3e^{c_3})c_1(1+\frac{1}{\theta})|t'-t''|,$$

$$\left\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\zeta}|_{t=t'} - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\zeta}|_{t=t''}\right\| \le c_1(1+\frac{1}{\theta})c_3^2e^{c_3}|t'-t''|,$$

$$\left\|\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}|_{t=t'} - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}|_{t=t''}\right\| \le nc_3e^{c_3}|t'-t''|,$$

$$\left\|\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}|_{t=t'} - \frac{\partial\bar{x}}{\partial y}|_{t=t''}\right\| \le c_1(1+\frac{1}{\theta})ne^{c_3}|t'-t''|. \tag{17}$$

Розглянемо один з інтегралів і одну з сум з (16), наприклад

$$J \equiv \int_0^{\tau} \frac{\partial\tilde{c}}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}dt, \quad S \equiv \sum_{0<\tau_j<\tau} \varepsilon\frac{\partial\tilde{r}}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}.$$

При заміні

$$\varphi = \bar{\theta} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega(z)dz$$

друге рівняння з (2) набуває вигляду

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\tau} = b\left(x, \bar{\theta} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\omega(z)dz, \zeta, \tau\right). \tag{18}$$

Як і в [7] зафіксуємо досить мале $\Delta > 0$ і подамо відрізок $[0,\tau]$ у вигляді $[0,\tau] = \bigcup_{\nu=0}^{h}[l_\nu, l_{\nu+1}]$, де $l_0 = 0, l_{\nu+1} - l_\nu = \Delta$ при $\nu < h$, $l_{s+1} = \tau, h$ – ціла частина числа $\tau/\Delta$.

Позначимо

$$J_\nu = \int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}} \frac{\partial\tilde{c}}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}dt, \quad S_\nu = \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \varepsilon\frac{\partial\tilde{r}}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial y}.$$

Тоді

$$\|J\| \le \sum_{\nu=0}^{h}\|J_\nu\| = \sum_{\nu=0}^{h}\left\|\int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{c}\left(x(t), \bar{\theta}(t) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\omega(z)dz, \zeta, t\right)\frac{\partial\bar{x}(t,y,\zeta)}{\partial y}dt\right\|,$$

$$\|S\| \le \sum_{\nu=0}^{h}\|S_\nu\| = \sum_{\nu=0}^{h}\left\|\varepsilon\sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{r}\left(x(\tau_j), \bar{\theta}(\tau_j) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j}\omega(z)dz, \zeta\right)\frac{\partial\bar{x}(\tau_j,y,\zeta)}{\partial y}\right\|.$$

Тут $x(\tau) = x(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)$, $\bar{\theta}(\tau) = \bar{\theta}(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)$.

Враховуючи обмеженність частинних похідних першого порядку функцій $c(x,\varphi,\xi,\tau), r(x,\varphi,\xi)$ по змінних $x,\varphi$, з рівнянь (1),(18) дістанемо

$$||x(\tau)-x(l_\nu)||+||\bar{\theta}(\tau)-\bar{\theta}(l_\nu)|| \le 2c_1(1+L/\theta_1)\Delta \tag{19}$$

для всіх $\tau \in [l_\nu, l_{\nu+1})$.

На підставі [6] для кожного $\bar{\mu} > 0$ існує таке $\varepsilon_0(\bar{\mu}) > 0$, що

$$\left|\varepsilon\sum_{0<\tau_j<\tau}v(\tau_j)\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\right\}\right| \le$$

$$\le \|k\|\bar{\mu}\left(\sup_{t\in[0,\tau]}\|v(t)\| + \bar{L}\right) \tag{20}$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0(\bar{\mu})], \tau \in I$. Тут $v(t)$ – довільна функція, яка задовольняє умову Ліпшиця по $t$ зі сталою $\bar{L}$ на відрізку $[0,L]$.

Для оцінки суми $S_\nu, \nu = \overline{1,h}$, скористаємось нерівностями

(5),(15),(17),(19) і (20), в якій $v(t) = \dfrac{\partial\bar{x}(t,y,\zeta)}{\partial y}$:

$$\|S_\nu\| \le \Bigg\|\varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \Bigg[\frac{\partial}{\partial x}\tilde{r}\Bigg(x(\tau_j), \bar{\theta}(\tau_j) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j}\omega(z)dz, \zeta\Bigg) - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{r}\Bigg(x(l_\nu), \bar{\theta}(l_\nu) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j}\omega(z)dz, \zeta\Bigg)\Bigg] \times$$

$$\times \frac{\partial\bar{x}(\tau_j,y,\zeta)}{\partial y}\Bigg\| + \Bigg\|\varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \frac{\partial}{\partial x}\tilde{r}\Bigg(x(l_\nu), \bar{\theta}(l_\nu) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j}\omega(z)dz, \zeta\Bigg)\frac{\partial\bar{x}(\tau_j,y,\zeta)}{\partial y}\Bigg\| \le 2\varepsilon c_1 \frac{\Delta}{\varepsilon\theta_1} n e^{c_3} \times$$

$$\times \left(||x(\tau_j) - x(l_\nu)|| + ||\bar{\theta}(\tau_j) - \bar{\theta}(l_\nu)||\right) + \sum_{k\ne 0} \|\varepsilon \sum_{l_\nu \le \tau_j < l_{\nu+1}} \frac{\partial r_k(x(l_\nu),\zeta)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}(\tau_j,y,\zeta)}{\partial y} \times$$

$$\times \exp\{i(k, \bar{\theta}(l_\nu))\}\exp\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^{\tau_j}(k,\omega(z))dz\}\| \le$$

$$\le 4c_1^2(1 + L/\theta_1)\frac{\Delta^2}{\theta_1} n e^{c_3} + \bar{\mu}\sum_k \left\|\frac{\partial r_k(x(l_\nu),\zeta)}{\partial x}\right\| \times \|k\| \left(n e^{c_3} + c_1(1 + \frac{1}{\theta})n e^{c_3}\right).$$

Отже,

$$\|S\| \le c_6(\Delta + \bar{\mu}/\Delta), \tag{21}$$

де

$$c_6 = n e^{c_3} c_1 \times \max\{4c_1(1 + L/\theta_1)L\theta_1^{-1}, L(1 + c_1(1 + \theta^{-1}))\}.$$

Для довільного додатного $\mu$ покладемо

$$\Delta = \mu/(2c_6), \quad \bar{\mu} = \mu\Delta/(2c_6),$$

а $\varepsilon_0$ виберемо таким чином, щоб виконувались оцінки (13) та (20). Тоді з нерівності (21) випливає, що

$$\|S\| \le \mu, \ (\tau, y, \psi, \xi, \varepsilon) \in I \times \mathbb{D}_1 \times R^m \times Q \times (0, \varepsilon_0].$$

В роботах [7,8] для осциляційного інтеграла доведено оцінку

$$\left|\int_0^\tau \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^t (k,\omega(z))dz\right\}dt\right| \le c_5 \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\|k\|^{-\frac{1}{l+1}},$$

$$(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0], \tag{22}$$

зі сталою $c_5 = c_5(L)$, не залежною від $\varepsilon$.

Враховуючи умови (5),(15),(17),(19),(22), оцінимо інтеграл $J_\nu, \nu = \overline{1,h}$:

$$\|J_\nu\| \le$$

$$\le \Bigg\|\int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}}\Bigg[\frac{\partial}{\partial x}\tilde{c}\Bigg(x(t), \bar{\theta}(t) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz, \zeta, t\Bigg) - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{c}\Bigg(\bar{x}(l_\nu), \bar{\theta}(l_\nu) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz, \zeta, l_\nu\Bigg)\Bigg] \times$$

$$\times \frac{\partial\bar{x}(t,y,\zeta)}{\partial y}dt\Bigg\| + \Bigg\|\int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{c}\Bigg(x(l_\nu), \bar{\theta}(l_\nu) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz, \zeta, l_\nu\Bigg)\frac{\partial\bar{x}(l_\nu,y,\zeta)}{\partial y}dt\Bigg\| +$$

$$+ \Bigg\|\int_{l_\nu}^{l_{\nu+1}}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{c}\Bigg(x(l_\nu), \bar{\theta}(l_\nu) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega(z)dz, \zeta, l_\nu\Bigg) \times \left[\frac{\partial\bar{x}(t,y,\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial\bar{x}(l_\nu,y,\zeta)}{\partial y}\right]dt\Bigg\| \le$$

$$\le 2c_1(2c_1(1 + L/\theta_1) + 1)\Delta^2 e^{c_3} + \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}\sum_{k\ne 0}\left\|\frac{\partial c_k(x(l_\nu),\zeta,l_\nu)}{\partial x}\right\|\|k\|^{-\frac{1}{l+1}} n e^{c_3} + \Delta^2 c_1^2(1 + \frac{1}{\theta})n e^{c_3}.$$

Отже,

$$\|J\| \le \bar{c}_6(\Delta + \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}/\Delta), \quad \bar{c}_6 = \text{const}. \tag{23}$$

Якщо покласти $\Delta = \mu/(2\bar{c}_6)$, а $\varepsilon_0$ вибрати таким чином, щоб виконувались оцінки (13) та (20) і $\varepsilon_0 \le \mu^{2(l+1)}$, то з нерівності (23) дістанемо

$$\|J\| \le \mu,$$

$$(\tau, y, \psi, \xi, \varepsilon) \in [0, L] \times \mathbb{D}_1 \times R^m \times Q \times (0, \varepsilon_0].$$

Всі інші оцінки для осциляційних інтегралів і сум в (16) встановлюються аналогічно. Лему доведено.

Зазначимо, що з леми 2 випливає

**Лема 3.** *Нехай:*

*1) $det(W_l^T(\tau)W_l(\tau)) > 0, \quad \tau \in [0, L]$;*

*2) виконуються умови (3), (4), (5);*

*3) крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, y, \zeta)$ лежить в $\mathbb{D}$ разом із своїм $\rho$-околом для всіх $\tau \in I, y \in \mathbb{D}_1, \zeta \in Q$.*

*Тоді для довільного $\mu > 0$ можна вказати таке досить мале $\varepsilon_0(\mu) > 0$, що для всіх $\tau \in [0, L], y \in \mathbb{D}_1, \psi \in R^m, \zeta \in Q$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджуються оцінки (13),(14).*

*Якщо ж в системі (1) $\bar{t}_j \equiv \theta$ для всіх $j \in N$, а функції $r_j(x, \varphi, \xi) \equiv r(x, \varphi, \xi, \tau_j)$ і $r(x, \varphi, \xi, \tau)$ задовольняє в $G$ умову Ліпшиця по всіх аргументах, то*

$$\|U\| + \left\|\frac{\partial U}{\partial y}\right\| + \left\|\frac{\partial U}{\partial \psi}\right\| + \left\|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right\| \le \sigma\varepsilon^{\frac{1}{2(l+1)}} \quad (24)$$

*зі сталою $\sigma = \sigma(L)$.*

Нехай $A_1, A_2, A_3$ і $A_4$ позначають відповідно $(n+s+\lambda)\times n$-, $(n+s+\lambda)\times s$-, $(n+s+\lambda)\times\lambda$-, і $(n+s+\lambda)\times\lambda$- вимірні матриці

$$A_1 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1^0} \frac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} d\tau \\ \cdots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \frac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} d\tau \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1^0} \left(\frac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial \xi^0} + \frac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \xi^0}\right) d\tau \\ \cdots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \left(\frac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \bar{x}^0}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial \xi^0} + \frac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \xi^0}\right) d\tau \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1^0} \frac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \eta_1^0} d\tau & \ldots & \int\limits_0^{\eta_1^0} \frac{\partial \bar{f}_1(z^0)}{\partial \eta_\lambda^0} d\tau \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \frac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \eta_1^0} d\tau & \ldots & \int\limits_0^{\eta_\lambda^0} \frac{\partial \bar{f}_\lambda(z^0)}{\partial \eta_\lambda^0} d\tau \end{pmatrix},$$

$$A_4 = diag\left( \bar{f}_1(z^0)|_{\tau=\eta_1^0} \cdots \bar{f}_\lambda(z^0)|_{\tau=\eta_\lambda^0} \right),$$

де $\bar{x}^0 = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)$, $z^0 = (x^0, \xi^0, \eta^0, \tau)$, $\eta^0 = (\eta_1^0 ..., \eta_\lambda^0)$, і $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 + A_4 \end{pmatrix}$ – квадратна $(n+s+\lambda)$-вимірна матриця.

**Теорема.** *Якщо виконуються припущення леми 1, умови (3)-(5), $detA \neq 0$ і $det(W_l^T(\tau)W_l(\tau)) > 0$ при $\tau \in [0, L]$, то:*

*1) для довільного $\mu_0 > 0$ можна вказати такі сталу $\varepsilon_0(\mu_0) > 0$ і функцію $\psi : (0, \varepsilon_0] \to R^m$, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує такий розв'язок $\xi, \eta, x, \varphi$ крайової задачі (1),(2), який задовольняє оцінку*

$$u(\tau, \varepsilon) \equiv \|x - \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)\| + \|\xi - \xi^0\| +$$

$$+ \|\eta - \eta^0\| + \|\varphi - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \xi^0, \varepsilon) - \psi(\varepsilon)\| \le \mu_0 \quad (25)$$

*для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$;*

*2) при виконанні обмежень (6) у випадку, коли в крайових умовах (2) $B(x, \xi, \eta, \tau) \equiv B(\tau)$, для довільного $\mu_0 > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\mu_0) > 0$, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0(\mu_0)]$ в малому околі розв'язку усередненої задачі існує єдиний розв'язок $\xi, \eta, x, \varphi$ крайової задачі (1),(2) і цей розв'язок задовольняє оцінку (25) з $\psi(\varepsilon) \equiv 0$.*

**Доведення.** Розв'язок вихідної задачі (1),(2) будуємо у вигляді $x = x(\tau, x^0 + \tilde{x}, \varphi^0 + \tilde{\varphi}, \xi^0 + \tilde{\xi}, \varepsilon), \varphi = \varphi(\tau, x^0 + \tilde{x}, \varphi^0 + \tilde{\varphi}, \xi^0 + \tilde{\xi}, \varepsilon)$, $\xi = \xi^0 + \tilde{\xi}$, $\eta = \eta^0 + \tilde{\eta}$, де $\tilde{x}, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ – невідомі параметри.

Очевидно, що існує така додатна стала $c_2$, що при

$$\|\tilde{x}\| + \|\tilde{\xi}\| \le c_2 \quad (26)$$

крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0 + \tilde{x}, \xi^0 + \tilde{\xi})$ належить $\mathbb{D}$ разом із своїм $\frac{1}{2}\rho$-околом для всіх $\tau \in [0, L]$.

Тому невідомі параметри $\tilde{x}, \tilde{\xi}$ будемо визначати, враховуючи (26).

Запровадимо позначення

$$x = x(\tau, x^0 + \tilde{x}, \varphi^0 + \tilde{\varphi}, \xi^0 + \tilde{\xi}, \varepsilon),$$

$$\bar{x} = \bar{x}(\tau, x^0 + \tilde{x}, \xi^0 + \tilde{\xi}), \quad \bar{x}^0 = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0),$$

$$\varphi = \varphi(\tau, x^0 + \tilde{x}, \varphi^0 + \tilde{\varphi}, \xi^0 + \tilde{\xi}, \varepsilon),$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(\tau, x^0 + \tilde{x}, \varphi^0 + \tilde{\varphi}, \xi^0 + \tilde{\xi}, \varepsilon),$$

$$\bar{\varphi}^0 = \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \xi^0, \varepsilon), \quad \xi = \xi^0 + \tilde{\xi},$$

$$\eta = \eta^0 + \tilde{\eta}, \quad \Delta x = x - \bar{x}, \quad \Delta\varphi = \varphi - \bar{\varphi},$$

$$f_\nu = f_\nu\left(\bar{x} + \Delta x, \bar{\varphi} + \Delta\varphi, \xi, \eta, \tau\right),$$

$$\bar{f}_\nu = \bar{f}_\nu\left(\bar{x}^0 + \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0}\tilde{x} + \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial \xi^0}\tilde{\xi}, \xi, \eta, \tau\right),$$

$$\bar{f}^0_\nu = \bar{f}^0_\nu(\bar{x}^0, \xi^0, \eta^0, \tau),$$

$$\tilde{d} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}),\ d^0 = (x^0, \xi^0, \eta^0),\ d = (x, \xi, \eta). \tag{27}$$

З інтегральних крайових умов (2) і (8) маємо

$$D_1 + D_2 - D_3 = 0, \tag{28}$$

де

$$D_1 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1}(f_1 - \bar{f}_1)d\tau \\ \cdots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda}(f_\lambda - \bar{f}_\lambda)d\tau \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1}\bar{f}_1 d\tau \\ \cdots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda}\bar{f}_\lambda d\tau \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^{\eta_1^0}\bar{f}^0_1 d\tau \\ \cdots \\ \int\limits_0^{\eta_\lambda^0}\bar{f}^0_\lambda d\tau \end{pmatrix}.$$

Розкладемо матрицю $D_2$ в ряд Тейлора в околі точки $z^0 \equiv (x^0, \xi^0, \eta^0, \tau)$ і перепишемо рівність (28) у вигляді

$$D_1 + A\tilde{d} + \tilde{R} = 0, \tag{29}$$

де

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial d^0}\bar{F}_1(z^0 + th) - \frac{\partial}{\partial d^0}\bar{F}_1(z^0)\right] d\,th \\ \cdots \\ \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial d^0}\bar{F}_\lambda(z^0 + th) - \frac{\partial}{\partial d^0}\bar{F}_\lambda(z^0)\right] d\,th \end{pmatrix},$$

$$\bar{F}_\nu = \int\limits_0^{\eta_\nu} \bar{f}_\nu d\tau, \quad \nu = \overline{1, \lambda},$$

$$h = \left(\frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)}{\partial x^0}\tilde{x} + \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)}{\partial \xi^0}\tilde{\xi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, 0\right).$$

Згідно із зробленними припущеннями для довільного $\mu_1 \in (0,1)$ існує таке досить мале $\delta^*(\mu_1) > 0$, що для всіх $\|h\| < \delta^*, t \in [0,1]$ виконуються нерівності

$$\left\|\bar{f}_\nu(z^0 + th) - \bar{f}_\nu(z^0)\right\| < \mu_1,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial d^0}\bar{F}_\nu(z^0 + th) - \frac{\partial}{\partial d^0}\bar{F}_\nu(z^0)\right\| < \mu_1, \quad \nu = \overline{1, \lambda},$$

які разом із (15) ведуть до оцінки

$$\|\tilde{R}\| < \mu_1 L\lambda\|h\| \leq \mu_1 L\lambda\left(e^{c_3}(n + c_3) + 2\right)\|\tilde{d}\|. \tag{30}$$

Перепишемо рівняння (29) у вигляді

$$\tilde{d} = F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon), \tag{31}$$

де

$$F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon) \equiv -A^{-1}\left(D_1 + \tilde{R}\right). \tag{32}$$

Оскільки $detA \neq 0$, $detB_1 \neq 0$, то існує така стала $c_4$, що виконуються нерівності

$$\|A^{-1}\| \leq c_4, \quad \|B_1^{-1}\| \leq c_4. \tag{33}$$

На підставі зроблених припущень маємо рівності

$$\bar{x}(\tau, x^0 + \tilde{x}, \xi^0 + \tilde{\xi}) = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0) + \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)}{\partial x^0}\tilde{x} + $$

$$+ \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)}{\partial \xi^0}\tilde{\xi} + R_1(\tau, \tilde{x}, \tilde{\xi}),$$

$$\bar{x}(\tau, x^0 + \tilde{x}, \xi^0 + \tilde{\xi}) = \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0) + R_2(\tau, \tilde{x}, \tilde{\xi}),$$

в яких

$$R_1(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi})=\int\limits_0^1\left[\frac{\partial\bar{x}(e^0+th)}{\partial e}-\frac{\partial\bar{x}(e^0)}{\partial e}\right]d\,th,$$

$$R_2(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi})=\int\limits_0^1\frac{\partial\bar{x}(e^0+th)}{\partial e}d\,th,$$

$$e^0=(\tau,x^0,\xi^0),\quad h=(0,\tilde{x},\tilde{\xi}),$$

$$\|R_2(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi})\|\le c_7(\|\tilde{x}\|+\|\tilde{\xi}\|),\quad \tau\in[0,L], \tag{34}$$

$c_7$ – деяка стала.

При виконанні припущень теореми для довільного $\mu_1\in(0,1)$ існує таке досить мале додатне $\delta(\mu_1)<\delta^*$, що для всіх $\|h\|<\delta, t\in[0,1]$ виконується нерівність

$$\left\|\frac{\partial\bar{x}(e^0+th)}{\partial e}-\frac{\partial\bar{x}(e^0)}{\partial e}\right\|<\mu_1,$$

яка веде до оцінки

$$\|R_1\|<\mu_1(\|\tilde{x}\|+\|\tilde{\xi}\|). \tag{35}$$

Враховуючи нерівності (5), (13), (35), одержимо оцінки

$$\|f_\nu-\bar{f}_\nu\|=\|\,(f_\nu-f_\nu(\bar{x},\bar{\varphi},\xi,\eta,\tau))+$$
$$+\left(f_\nu(\bar{x},\bar{\varphi},\xi,\eta,\tau)-\bar{f}_\nu(\bar{x},\xi,\eta,\tau)\right)-$$
$$-\left(\bar{f}_\nu(\bar{x},\xi,\eta,\tau)-\bar{f}_\nu\right))\,\|\le$$
$$\le 2c_1L\mu+c_1L\|R_1(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi})\|,\quad \nu=\overline{1,\lambda},$$
$$\|D_1\|\le\lambda\left(2c_1L\mu+c_1\mu_1L(\|\tilde{x}\|+\|\tilde{\xi}\|)\right).$$

На підставі останньої оцінки, умов (30), (33) та рівності (32) дістанемо нерівності

$$\|F(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon)\|\le c_4L\lambda\Bigg(2c_1\mu+\mu_1\|\tilde{d}\|\times$$
$$\times\left(c_1+\left(e^{c_3}(n+c_3)+2\right)\right)\Bigg),$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}F(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon)\right\|\le\lambda c_1\mu L. \tag{36}$$

З першої з нерівностей (36) випливає, що $F$ відображає множину $M_\mu=\{\tilde{d}:\tilde{d}\in R^{n+s+\lambda},\|\tilde{d}\|\le c_8\mu\}$ в себе при

$$\mu\le\min\left\{\frac{1}{2\lambda c_1c_4c_8},\frac{c_2}{c_7}\right\},\quad c_8=4c_1c_4L\lambda,$$

$$\mu_1\le\frac{1}{2c_4L\lambda\left(c_1+\left(e^{c_3}(n+c_3)+2\right)\right)}.$$

Для встановлення оцінки норми $\frac{\partial}{\partial\tilde{d}}F(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon)$ перепишемо (32) у вигляді

$$F(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon)=-A^{-1}\left(V-A\tilde{d}\right),$$

$$V=\begin{pmatrix}\int\limits_0^{\eta_1}f_1d\tau-P_1\\ \cdots\\ \int\limits_0^{\eta_\lambda}f_\lambda d\tau-P_\lambda\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial\tilde{d}}=-A^{-1}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial\tilde{x}};\,\frac{\partial V}{\partial\tilde{\xi}};\,\frac{\partial V}{\partial\tilde{\eta}}\right)-A\right\}\equiv$$
$$\equiv -A^{-1}\left(H_1...H_\lambda\right)^T,$$

де $H_\nu$ – $n_\nu\times(n+s+\lambda)$- вимірна матриця

$$H_\nu=\left\{\int\limits_0^{\eta_\nu}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial x^0}+\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial(\bar{x}-\bar{x}^0)}{\partial x^0}\right)d\tau+\right.$$
$$+\left[\int\limits_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}^0}{\partial x^0}d\tau-\int\limits_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar{f}_\nu(z^0)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}^0}{\partial x^0}d\tau\right]+$$
$$+\int\limits_0^{\eta_\nu}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial x^0}+\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^0}\right)d\tau;$$
$$\int\limits_0^{\eta_\nu}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\xi^0}+\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial(\bar{x}-\bar{x}^0)}{\partial\xi^0}\right)d\tau+$$
$$+\left[\int\limits_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}^0}{\partial\xi^0}d\tau-\int\limits_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar{f}_\nu(z^0)}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}^0}{\partial\xi^0}d\tau\right]+$$

$$+\int_0^{\eta_\nu}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial(\varphi-\bar\varphi)}{\partial\xi^0}+\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi^0}\right)d\tau+$$

$$+\left[\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\xi^0}d\tau-\int_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar f_\nu(z^0)}{\partial\xi^0}d\tau\right];$$

$$\left[\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\eta_1^0}d\tau-\int_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar f_\nu(z^0)}{\partial\eta_1^0}d\tau\right];\ldots;$$

$$[f_\nu|_{\tau=\eta_\nu}-\bar f_\nu(z_0)|_{\tau=\eta_\nu^0}]+$$

$$+\left[\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\eta_\nu^0}d\tau-\int_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar f_\nu(z^0)}{\partial\eta_\nu^0}d\tau\right];\ldots;$$

$$\left.\left[\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\eta_\lambda^0}d\tau-\int_0^{\eta_\lambda^0}\frac{\partial\bar f_\nu(z^0)}{\partial\eta_\nu^0}d\tau\right]\right\},\quad \nu=\overline{1,\lambda}. \tag{37}$$

Для оцінки норми матриці $H_\nu$ подамо функції $\bar f_\nu$, $\frac{\partial\bar f_\nu}{\partial d^0}$, $\nu=\overline{1,\lambda}$, у вигляді

$$\bar f_\nu(\bar x,\xi,\eta,\tau)=\bar f_\nu(z^0+\tilde h),$$

$$\frac{\partial\bar f_\nu(\bar x,\xi,\eta,\tau)}{\partial d^0}=\frac{\partial\bar f_\nu(z^0+\tilde h)}{\partial d^0},$$

де

$$\tilde h=\left(\bar x-\bar x^0,\tilde\xi,\tilde\eta,0\right),$$

$$\|\tilde h\|\le c_7(\|\tilde x\|+\|\tilde\xi\|)+\|\tilde\xi\|+\|\tilde\eta\|.$$

На підставі неперервності функцій $\bar f_\nu$, $\frac{\partial\bar f_\nu}{\partial d^0}$, $\nu=\overline{1,\lambda}$, в точці $z^0$ для довільного $\delta_1\in(0,1)$ існує таке досить мале $\delta_2(\delta_1)>0$, що для всіх $\tilde d$ таких, що $(c_7+1)\|\tilde d\|<\delta_2$, справджуються нерівності

$$\left\|\bar f_\nu(z^0+\tilde h)-\bar f_\nu(z^0)\right\|<\delta_1,$$

$$\left\|\frac{\partial\bar f_\nu(z^0+\tilde h)}{\partial d^0}-\frac{\partial\bar f_\nu(z^0)}{\partial d^0}\right\|<\delta_1,\quad \nu=\overline{1,\lambda}. \tag{38}$$

Для оцінки доданків в квадратних дужках в правій частині рівності (37) використаємо нерівності (5), (13),(38) і леми 2,3. Розглянемо один з таких доданків, наприклад

$$\left[\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\xi^0}d\tau-\int_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar f_\nu(z^0)}{\partial\xi^0}d\tau\right]=$$

$$=-\int_{\eta_\nu^0}^{\eta_\nu}\frac{\partial\bar f_\nu(\bar x,\xi,\eta,\tau)}{\partial\xi^0}d\tau+$$

$$+\int_0^{\eta_\nu}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial\xi^0}-\frac{\partial f_\nu(\bar x,\bar\varphi,\xi,\eta,\tau)}{\partial\xi^0}\right)d\tau+$$

$$+\int_0^{\eta_\nu}\left(\frac{\partial f_\nu(\bar x,\bar\varphi,\xi,\eta,\tau)}{\partial\xi^0}-\frac{\partial\bar f_\nu(\bar x,\xi,\eta,\tau)}{\partial\xi^0}\right)d\tau+$$

$$+\left(\int_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar f_\nu(\bar x,\xi,\eta,\tau)}{\partial\xi^0}d\tau-\int_0^{\eta_\nu^0}\frac{\partial\bar f_\nu(z^0)}{\partial\xi^0}d\tau\right).$$

Звідси випливає, що всі доданки в квадратних дужках в (37) можна оцінити зверху величиною $c_9(\delta_1+\mu+\|\tilde\eta\|)$, $c_9=\mathrm{const}$.

За лемою 2 осциляційні інтеграли

$$\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x^0}d\tau,\quad \int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial\xi^0}d\tau$$

оцінюємо зверху величиною $c_9\mu$, а нерівності (5), (14) забезпечують таку саму оцінку інтегралів

$$\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial(x-\bar x)}{\partial x^0}d\tau,\quad \int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial(\varphi-\bar\varphi)}{\partial x^0}d\tau,$$

$$\int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial x}\frac{\partial(x-\bar x)}{\partial\xi^0}d\tau,\quad \int_0^{\eta_\nu}\frac{\partial f_\nu}{\partial\varphi}\frac{\partial(\varphi-\bar\varphi)}{\partial\xi^0}d\tau.$$

Крім того, згідно із зробленими припущеннями

$$\left\|\frac{\partial\bar x(\tau,x^0+\tilde x,\xi^0+\tilde\xi)}{\partial\tilde x}-\frac{\partial\bar x(\tau,x^0,\xi^0)}{\partial x^0}\right\|\le$$

$$\le\bar c_1(\|\tilde x\|+\|\tilde\xi\|),$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0 + \tilde{x}, \xi^0 + \tilde{\xi})}{\partial \tilde{\xi}} - \frac{\partial \bar{x}(\tau, x^0, \xi^0)}{\partial \xi^0} \right\| \leq$$

$$\leq \bar{c}_1(\|\tilde{x}\| + \|\tilde{\xi}\|), \quad \bar{c}_1 = \text{const},$$

тому

$$\left\| \int_0^{\eta_\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial x} \frac{\partial(\bar{x} - \bar{x}^0)}{\partial x^0} d\tau \right\| + \left\| \int_0^{\eta_\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial x} \frac{\partial(\bar{x} - \bar{x}^0)}{\partial \xi^0} d\tau \right\| \leq$$

$$\leq 2Lc_1\bar{c}_1(\|\tilde{x}\| + \|\tilde{\xi}\|).$$

Об'єднуючи отримані оцінки, дістанемо

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \tilde{d}} F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon) \right\| \leq$$

$$\leq c_4\lambda \left( 2Lc_1\bar{c}_1\|\tilde{d}\| + 7c_9\mu + c_9(\delta_1 + \|\tilde{\eta}\|) \right).$$

Оскільки $\tilde{d} \in M_\mu$, то

$$\|\tilde{d}\| \leq c_8\mu,$$

$$\mu \leq \min\left\{ \frac{\delta_2}{c_7c_8 + c_8}, \frac{1}{2\lambda c_1 c_4 c_8}, \frac{c_2}{c_8} \right\}, \qquad (39)$$

у звязку з чим

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \tilde{d}} F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon) \right\| \leq c_{11}\delta_1 + c_{12}\delta_2(\delta_1) \leq \frac{1}{2} \qquad (40)$$

при досить малому $\delta_1 > 0$.

Отже, на підставі принципу стислих відображень для кожних фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tilde{\varphi} \in R^m$ рівняння (31) має єдиний розв'язок $\tilde{d} = \tilde{d}(\tilde{\varphi}, \varepsilon) \in M_\mu$.

Розв'язок рівняння (31) можна визначити методом послідовних наближень:

$$\tilde{d}(\tilde{\varphi}, \varepsilon) = \lim_{k \to \infty} d_k(\tilde{\varphi}, \varepsilon), \quad d_0(\tilde{\varphi}, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$d_k(\tilde{\varphi}, \varepsilon) = F(d_{k-1}(\tilde{\varphi}, \varepsilon), \tilde{\varphi}, \varepsilon), \quad k \geq 1. \quad (41)$$

Використовуючи оцінки (36), (40), із (41) дістанемо, що

$$\left\| \frac{\partial d_k(\tilde{\varphi}, \varepsilon)}{\partial \tilde{\varphi}} \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial d_{k-1}(\tilde{\varphi}, \varepsilon)}{\partial \tilde{\varphi}} \right\| + c_1 L\lambda\mu.$$

Звідси знаходимо, що при виконанні умови (39) для всіх $k \geq 0, \tilde{\varphi} \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджується нерівність

$$\left\| \frac{\partial d_k(\tilde{\varphi}, \varepsilon)}{\partial \tilde{\varphi}} \right\| \leq c_{13}\mu$$

зі сталою $c_{13} = 2c_1 L\lambda$.

Остання оцінка забезпечує виконання умови Ліпшиця

$$\|\tilde{d}(\tilde{\varphi}^1, \varepsilon) - \tilde{d}(\tilde{\varphi}^2, \varepsilon)\| \leq c_{13}\mu\|\tilde{\varphi}^1 - \tilde{\varphi}^2\| \quad (42)$$

для граничної функції $\tilde{d}(\tilde{\varphi}, \varepsilon)$.

Розглянемо далі випадок, коли в умовах (2) матриця $B$ не залежить від $x, \xi, \eta$, тобто $B(x, \xi, \eta, \tau) \equiv B(\tau)$. Тоді з з крайової задачі (1),(2) одержуємо

$$\varphi^0 + \tilde{\varphi} = B_1^{-1} \Bigg( \int_0^L \Bigg( C - g(x, \varphi, \xi, \eta, \tau) -$$

$$- \frac{B(\tau)}{\varepsilon} \int_0^\tau [\omega(t) + \varepsilon b(x, \varphi, \xi)] dt -$$

$$-B(\tau)\varepsilon \sum_{0 < \tau_j < \tau^\nu} q_j(x(\tau_j, x, \varphi, \xi, \varepsilon),$$

$$\varphi(\tau_j, x, \varphi, \xi, \varepsilon), \xi^0 + \tilde{\xi}) \Bigg) d\tau \Bigg).$$

Враховуючи крайові умови для вихідної та усередненої систем, дістанемо рівняння

$$\tilde{\varphi} = \Phi(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon) \qquad (43)$$

для знаходження $\tilde{\varphi}$, в якому

$$\Phi(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon) \equiv$$

$$\equiv -B_1^{-1} \Bigg( \int_0^L (g(x, \varphi, \xi, \eta, \tau) - \bar{g}(\bar{x}^0, \xi^0, \eta^0, \tau)) d\tau -$$

$$- \int_0^L \Bigg( B(\tau) \int_0^\tau [\bar{b}(\bar{x}, \xi, t) - \bar{b}(\bar{x}^0, \xi^0, t)] dt + \frac{B(\tau)}{\theta} \times$$

$$\times \int_0^\tau [\bar{q}(\bar{x}, \xi) - \bar{q}(\bar{x}^0, \xi^0)] dt \Bigg) d\tau + \int_0^L B(\tau)\Delta\varphi d\tau \Bigg). \qquad (44)$$

Для оцінки норми $\Phi(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon)$ використаємо оцінки (5),(13),(33) і нерівність

$$\|x - \bar{x}^0\| \leq \|\Delta x(t, x, \varphi, \xi, \varepsilon)\| + \|\bar{x} - \bar{x}^0\| \leq$$

$$\leq \mu + \|\tilde{d}\|(n+c_3)e^{c_3}.$$

Тоді одержимо нерівності

$$\|\Phi(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon)\| \leq c_4\Bigg(3c_1\mu L + c_1 L\|\tilde{d}\|(n+c_3)e^{c_3}+$$

$$+L^2c_1^2\|\tilde{d}\|(n+c_3)e^{c_3}(1+1/\theta)\Bigg) \leq c_{14}(\|\tilde{d}\|+\mu) \tag{45}$$

зі сталою

$$c_{14} = 3c_1c_4L + Lc_1c_4(n+c_3)e^{c_3}(c_1L + c_1L/\theta + 1).$$

З (45) випливає, що $\Phi$ відображає множину $T_\mu = \{\tilde{\varphi} : \tilde{\varphi} \in R^m,\ \|\tilde{\varphi}\| \leq c_{15}\mu\}$ в себе при $c_{15} = c_{14}(c_8+1)$.

Припустимо, що $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2$– довільні точки множини $T_\mu$. Використовуючи умову Ліпшиця (42), одержимо нерівності

$$\|\Phi(\tilde{d}(\tilde{\varphi}^1,\varepsilon),\tilde{\varphi}^1,\varepsilon) - \Phi(\tilde{d}(\tilde{\varphi}^2,\varepsilon),\tilde{\varphi}^2,\varepsilon)\| \leq$$

$$\leq \sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{d}}\right\| \|\tilde{d}(\tilde{\varphi}^1,\varepsilon) - \tilde{d}(\tilde{\varphi}^2,\varepsilon)\| +$$

$$+\sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\varphi}}\right\| \|\tilde{\varphi}^1 - \tilde{\varphi}^2\| \leq$$

$$\leq \left(c_{13}\mu\sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{d}}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\varphi}}\right\|\right)\|\tilde{\varphi}^1 - \tilde{\varphi}^2\|.$$

Оскільки

$$\frac{\partial g}{\partial\tilde{d}} = \Bigg\{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial x^0} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x^0}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial x^0} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^0}\right);$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\xi^0} + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}}{\partial\xi^0}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial\xi^0} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\xi^0}\right) + \frac{\partial g}{\partial\xi^0};\ \frac{\partial g}{\partial\eta^0}\Bigg\},$$

$$\frac{\partial\bar{g}}{\partial\tilde{d}} = \left\{\frac{\partial\bar{g}}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}^0}{\partial x^0};\ \frac{\partial\bar{g}}{\partial x}\frac{\partial\bar{x}^0}{\partial\xi^0} + \frac{\partial\bar{g}}{\partial\xi^0};\ \frac{\partial\bar{g}}{\partial\eta^0}\right\},$$

$$\frac{\partial g}{\partial\tilde{\varphi}} = \Bigg\{\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial(x-\bar{x})}{\partial\varphi^0}+$$

$$+\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial(\varphi-\bar{\varphi})}{\partial\varphi^0} + \frac{\partial g}{\partial\varphi}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\varphi^0}\right)\Bigg\}, \tag{46}$$

$$g = g(x,\varphi,\xi,\eta,\tau), \quad \bar{g} = \bar{g}(\bar{x}^0,\xi^0,\eta^0,\tau),$$

то, враховуючи обмеження на функцію $g$ і леми 2, 3, з (45),(46) отримаємо оцінки

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\varphi}}\right\| \leq c_{16}\mu, \quad \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{d}}\right\| \leq c_{17}\mu + c_{18}$$

з деякими додатними сталими $c_{16}, c_{17}, c_{18}$. Тому при

$$\mu < \frac{1}{2(c_{13}c_{17} + c_{13}c_{18} + c_{16})}$$

відображення $\Phi : T_\mu \to T_\mu$ є стислим для всіх фіксованих $\|\tilde{d}\| \leq c_8\mu$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де $\varepsilon_0$ вибирається так, щоб виконувались умова (39). Отже, при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ система (31),(43) має єдиний розв'язок $(\tilde{d};\tilde{\varphi})$, який задовольняє умови

$$\|\tilde{d}\| \leq c_8\mu, \quad \|\tilde{\varphi}\| \leq c_{15}\mu.$$

Доведення єдиності розв'язку крайової задачі (1),(2) і встановлення оцінки (25) з $\psi(\varepsilon) \equiv 0$ проводиться точно так, як і в роботі [5] при дослідженні багатоточкової задачі з параметрами. Твердження 2) теореми доведено.

Для доведення першого твердження теореми перепишемо праву частину рівняння (43) у вигляді

$$\Phi(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon) \equiv B_1^{-1}\Bigg(\int_0^L (g(x,\varphi,\xi,\eta,\tau) - \bar{g}(\bar{x},\xi^0,$$

$$\eta^0,\tau))d\tau - \int_0^L \left(B\varphi - B^0\bar{\varphi}^0\right)d\tau + B_1\tilde{\varphi}\Bigg),$$

де $B = B(x,\xi,\eta,\tau)$, а $B^0$ означене в лемі 1.

Враховуючи, що

$$\int_0^L \left(B^0\bar{\varphi}^0 - B\varphi\right)d\tau =$$

$$= \int_0^L \left[ B^0(\bar{\varphi}^0 - \bar{\varphi}) - B(\varphi - \bar{\varphi}) - \bar{\varphi}(B - B^0) \right] d\tau,$$

із (12), (14) і обмежень на функції $g, B$ одержуємо нерівність

$$\|\Phi(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon)\| \le c_{19}(\mu + \|\tilde{d}\|)(1 + \|\tilde{\varphi}\| + \varepsilon^{-1})$$

з деякою сталою $c_{19}$. Оскільки $\tilde{d} \in M_\mu$, то $\Phi$ відображає множину $\bar{T} = \{\tilde{\varphi} : \tilde{\varphi} \in R^m, \ \|\tilde{\varphi}\| \le 3c_{19}(1 + c_8)\mu\varepsilon^{-1}\}$ в себе при

$$3\mu c_{19}(1 + c_8) \le 1. \qquad (47)$$

Відображення $\Phi : \bar{T} \to \bar{T}$ неперервне по $\tilde{\varphi}$, тому на підставі теореми Брауера [9] про нерухому точку існує розв'язок $\tilde{\varphi} = \psi(\varepsilon) \in \bar{T}$ рівняння (43). Якщо $\varepsilon_0$ вибрати так, щоб виконувались умови (39), (47), то для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ існує розв'язок

$$\xi = \xi^0 + \tilde{\xi}(\psi(\varepsilon), \varepsilon), \quad \eta = \eta^0 + \tilde{\eta}(\psi(\varepsilon), \varepsilon),$$
$$x = x(\tau, x^0 + \tilde{x}(\psi(\varepsilon), \varepsilon), \varphi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon),$$
$$\varphi = \varphi(\tau, x^0 + \tilde{x}(\psi(\varepsilon), \varepsilon), \varphi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon)$$

крайової задачі (1),(2). Оскільки для швидких змінних виконуються нерівності

$$\|\varphi - \bar{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \xi^0, \varepsilon) - \psi(\varepsilon)\| \le$$
$$\le \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}^0 - \psi(\varepsilon)\| \le c_{20}\mu,$$
$$(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0],$$

з деякою сталою $c_{20}$, то справджується оцінка (25). Теорему доведено.

*Зауваження.* Якщо в системі (1) $\bar{t}_j \equiv \theta$ для всіх $j \in N$, а функції $r_j(x, \varphi, \xi) \equiv r(x, \varphi, \xi, \tau_j)$ і $r(x, \varphi, \xi, \tau)$ задовольняє в $G$ умову Ліпшиця по всіх аргументах, то оцінка (25) набуває вигляду

$$u(\tau, \varepsilon) \le \bar{\sigma}\varepsilon^{\frac{1}{2(l+1)}} \qquad (48)$$

зі сталою $\bar{\sigma}$, яка залежить від $L$ і не залежить від $\varepsilon$.

Зазначимо лише, що для обгрунтування нерівності (48) потрібно замість оцінки (20) осциляційної суми використати точну відносно параметра $\varepsilon$ оцінку суми для рівних відстаней між моментами імпульсної дії [6-8], на підставі якої норми осциляційних інтегралів і сум в (16) не будуть перевищувати $\tilde{\sigma}\varepsilon^{\frac{1}{2(l+1)}}$, $\tilde{\sigma} = \mathrm{const}$.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем. — К.: Ін-т математики НАН України, 1998. — 340 с.
2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І., Лакуста Л.М.* Усереднення крайових задач з параметрами для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, N 9. — С.1241—1253.
3. *Петришин Р.І., Лакуста Л.М.* Оцінки похибки методу усереднення в імпульсних крайових задачах з параметрами // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, N 2. — С.193—207.
4. *Петришин Я. Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами.: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. — К., 2001. — 131 с.
5. *Сопронюк Т.М., Дудницький П.М.* Багатоточкова задача з параметрами для імпульсної багаточастотної системи . // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 191-192. Математика. — Чернівці: Рута, 2004. – С.128—136.
6. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, N8. – С.1101–1108.
7. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Обгрунтування методу усереднення для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, N1. — С.55—65.
8. *Сопронюк Т.М.* Коливання імпульсних багаточастотних систем.: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. — К., 2003. — 158 с.
9. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1974. — 320 с.


Надійшла до редколегії 19.03.2004