

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ

УЗАГАЛЬНЕНІ ГРАНИЧНІ ЗНАЧЕННЯ ФУР'Є-ОБРАЗІВ ЗГОРТКОВОЇ АЛГЕБРИ РОЗПОДІЛІВ ШВАРЦА З НОСІЯМИ В КОНУСІ

Доведений аналог теореми Пелі-Вінера для класу Гарді-Лебега про зображення Фур'є-образу згорткової алгебри розподілів на конусі у вигляді мультиплікативної алгебри аналітичних функцій комплексної змінної.

We prove an analogue of the Paley-Wiener theorem for Hardy-Lebesgue's class on the representation of the Fourier-image of a convolution algebra of distributions on a cone in the form of a multiplicative algebra of analytic functions of complex variable.

1. Вступ. В роботі [1] з точністю до топологічного ізоморфізму описано Фур'є-образ $\widehat{D}'_\Gamma$ алгебри D'_Γ розподілів Шварца з носіями в довільному конусі Γ в термінах операторів. В цій статті розглянуто іншу інтерпретацію мультиплікативної алгебри $\widehat{D}'_\Gamma$, а саме, показано зображення елементів з $\widehat{D}'_\Gamma$ у вигляді узагальнених граничних значень перетворення Фур'є-Лапласа розподілів Шварца з носіями в Γ . З цією метою встановлено аналог теореми Пелі-Вінера для класу Гарді-Лебега, що характеризує елементи алгебри $\widehat{D}'_\Gamma$ як деякі аналітичні функції. Робота є продовженням низки досліджень (див. [1–4]), присвячених побудові та вивченню властивостей функціонального числення для генераторів сильно неперервних багатопараметричних напівгруп операторів у класах узагальнених функцій Шварца.

2. Основні позначення і термінологія. Для довільних $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ будемо використовувати такі позначення: $t^k := t_1^{k_1} \cdot \dots \cdot t_n^{k_n}$, $\partial^k := \partial_1^{k_1} \cdot \dots \cdot \partial_n^{k_n}$, де $\partial_j^{k_j} := \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}$ ($j = \overline{1, n}$), $|k| := k_1 + \dots + k_n$ і $(t, s) = t_1 s_1 + \dots + t_n s_n$.

Для довільного локально опуклого простору X символом $\mathcal{L}(X)$ будемо позначати простір всіх лінійних неперервних операторів над X з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Нехай $D(\mathbb{R}^n)$ — лінійний простір не-

скінченно диференційовних в $\mathbb{R}^n$ функцій φ з компактними носіями $\text{supp } \varphi$. Через $D(K)$ позначимо підпростір тих функцій з $D(\mathbb{R}^n)$, носії яких містяться в компактi $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Простір $D(K)$ топологізуємо за допомогою зліченного набору норм $\|\varphi\|_{m,K} := \sup_{|k| \leq m} \sup_{t \in K} |\partial^k \varphi(t)|$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Відомо [5], що $D(K)$ є банаховим простором відносно кожної з норм $\|\cdot\|_{m,K}$. На просторі $D(\mathbb{R}^n)$ введемо топологію індуктивної границі $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{ind } D(K_r)$ відносно тотожних вкладень $D(K_r) \hookrightarrow D(K_s)$, $r < s$, де K_r — замкнена куля радіуса $r > 0$ з центром в нулі. Топологічний простір $D(\mathbb{R}^n)$ називають простором основних функцій. Сильно спряжений з $D(\mathbb{R}^n)$ простір розподілів Шварца позначимо $D'(\mathbb{R}^n)$. Введені вище простори утворюють класичну двоїстість $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$ з білінійною формою $\langle f, \varphi \rangle$.

Нехай Γ — замкнений опуклий гострий тілесний конус в $\mathbb{R}^n$ з вершиною в нулі. Розглянемо в $D'(\mathbb{R}^n)$ підпростір D'_Γ тих розподілів f , носії $\text{supp } f$ яких містяться в Γ . Відомо [6, ст. 75], що простір D'_Γ є алгеброю відносно операції згортки $D'_\Gamma \times D'_\Gamma \ni (f, h) \mapsto f * h \in D'_\Gamma$.

Нехай $(D'_\Gamma)^o$ позначає поляру підпростору D'_Γ відносно двоїстості $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$, тобто

$$(D'_\Gamma)^o = \{\varphi \in D(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Gamma\}.$$

Фактор-простір

$$D(\mathbb{R}^n) / (D'_\Gamma)^o = \{\varphi_\Gamma = \varphi + (D'_\Gamma)^o : \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}$$

збігається зі спряженим з D'_Γ [7, с. 169].

Зауважимо, що ядро відображення

$$\varrho : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi(t) \longmapsto \lambda_\Gamma(t)\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

де λ_Γ — характеристична функція конуса Γ , збігається з полярною $(D'_\Gamma)^o$, яка є замкненим ідеалом у $D(\mathbb{R}^n)$. Образ простору $D(\mathbb{R}^n)$ при відображенні ϱ позначимо

$$D_\Gamma := \varrho[D(\mathbb{R}^n)] = \{\lambda_\Gamma(t)\varphi(t) : \varphi \in D(\mathbb{R}^n)\}.$$

З результатів праці [8] випливає існування лінійного та неперервного оператора

$$\lambda : D_\Gamma \ni \psi \longmapsto \tilde{\psi} \in D(\mathbb{R}^n)$$

такого, що в конусі Γ (включно з його межею) похідні довільного порядку $k \in \mathbb{Z}_+$ узгоджуються між собою, тобто $\partial^k \psi(t) = \partial^k \tilde{\psi}(t)$ для всіх $t \in \Gamma$. Зрозуміло, що на межі конуса похідні $\partial^k \psi(t)$ слід розуміти як односторонні. Тому надалі для довільного $\psi \in D_\Gamma$ символ $\partial^k \psi(t)$ будемо розуміти саме в цьому сенсі.

Використовуючи відображення ϱ і оператор λ , можна побудувати топологічний ізоморфізм $D(\mathbb{R}^n)/(D'_\Gamma)^o \simeq D_\Gamma$. Звідси випливає, що дуальна пара $\langle D'(\mathbb{R}^n), D(\mathbb{R}^n) \rangle$ генерує нову двоїстість $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. На просторі D_Γ задамо топологію індуктивної границі $D_\Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{ind } D(\Gamma_r)$ відносно тотожних вкладень $D(\Gamma_r) \hookrightarrow D(\Gamma_s)$, $r < s$, де Γ_r є перетином конуса Γ із замкненою кулею K_r радіуса $r > 0$.

Елементи простору D_Γ — інтегровні в Γ функції, тому перетворення Фур'є можна визначити співвідношенням

$$\mathcal{F} : D_\Gamma \ni \psi(t) \longmapsto \hat{\psi}(\xi) = \int_{\Gamma} e^{-i(t,\xi)} \psi(t) dt,$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$. Нехай $\hat{D}_\Gamma = \{\hat{\psi} : \psi \in D_\Gamma\}$ позначає Фур'є-образ простору D_Γ . Використовуючи ін'єктивність відображення $\mathcal{F}$, на Фур'є-образах $\hat{D}(\Gamma_r) = \{\hat{\psi} : \psi \in D(\Gamma_r)\}$ кожного із підпросторів $D(\Gamma_r)$ вводимо топологію за допомогою зліченного набору норм

$$\|\hat{\psi}\|_{m,\Gamma_r} := \|\psi\|_{m,\Gamma_r}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \psi \in D(\Gamma_r).$$

Тоді $\hat{D}_\Gamma = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{ind } \hat{D}(\Gamma_r)$. Сильно спряжений з $\hat{D}_\Gamma$ простір позначимо $\hat{D}'_\Gamma$.

Визначимо спряжене з оберненим перетворенням Фур'є $\mathcal{F}^{-1}$ відображення

$$\mathcal{F}^* := (2\pi)^n (\mathcal{F}^{-1})' : D'_\Gamma \ni f \longmapsto \hat{f} \in \hat{D}'_\Gamma, \quad (1)$$

яке будемо називати узагальненим перетворенням Фур'є розподілів з простору D'_Γ . Асоційована з цим перетворенням білінійна форма

$$\langle \hat{f}, \hat{\psi} \rangle = (2\pi)^n \langle f, \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}[\psi] \rangle = (2\pi)^n \langle f, \psi \rangle,$$

де $f \in D'_\Gamma$, $\psi \in D_\Gamma$, визначає нову двоїстість $\langle \hat{D}'_\Gamma, \hat{D}_\Gamma \rangle$.

Доведено [2], що простір $\hat{D}_\Gamma$ є щільним в $\hat{D}'_\Gamma$ в сильній топології простору $\hat{D}'_\Gamma$ відносно дуальності $\langle \hat{D}'_\Gamma, \hat{D}_\Gamma \rangle$, і $\hat{D}'_\Gamma$ є алгеброю відносно множення

$$\mathcal{F}^*[f] \cdot \mathcal{F}^*[h] = \widehat{f \cdot h} = \widehat{f * h} = \mathcal{F}^*[f * h],$$

$f, h \in D'_\Gamma$, яка топологічно ізоморфна згортковій алгебрі D'_Γ .

3. Допоміжні твердження. Нехай

$$\Gamma^* = \{\eta \in \mathbb{R}^n : (\eta, t) \leq 0, \forall t \in \Gamma\}$$

— спряжений конус до Γ . Для кожного елемента $\eta \in \Gamma^*$ на просторі основних функцій Шварца $D(\mathbb{R}^n)$ визначимо оператор множення на експоненту

$$\mathcal{Q}_\eta : D(\mathbb{R}^n) \ni \varphi(t) \longmapsto e^{(\eta,t)} \varphi(t) \in D(\mathbb{R}^n).$$

Лема 1. *Відображення*

$$\mathcal{Q} : \Gamma^* \ni \eta \longmapsto \mathcal{Q}_\eta \in \mathcal{L}(D(\mathbb{R}^n))$$

є одностайно неперервною (C_0) -напівгрупою операторів у просторі $D(\mathbb{R}^n)$.

Доведення. Напівгрупові властивості перевірити легко. Очевидно, що $\mathcal{Q}_0$ — тотожний оператор. Для довільних $\eta, \mu \in \Gamma^*$ та функції $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\eta+\mu} \varphi(t) &= e^{(\eta+\mu,t)} \varphi(t) \\ &= e^{(\eta,t)} e^{(\mu,t)} \varphi(t) = (\mathcal{Q}_\eta \circ \mathcal{Q}_\mu) \varphi(t). \end{aligned}$$

Доведемо сильну неперервність напівгрупи. Для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ і кожної замкненої кулі K_r маємо

$$\|\mathcal{Q}_\eta \varphi - \varphi\|_{m,K_r} = \sup_{|k| \leq m} \sup_{t \in K_r} |\partial^k (\mathcal{Q}_\eta \varphi - \varphi)|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{|k| \leq m} \sup_{t \in K_r} |\partial^k e^{(\eta, t)} \varphi(t) - \partial^k \varphi(t)| \\
&= \sup_{|k| \leq m} \sup_{t \in K_r} \left| \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \eta^l e^{(\eta, t)} \partial^{k-l} \varphi(t) - \partial^k \varphi(t) \right| \\
&\leq M_\eta \sup_{|k| \leq m} \sup_{t \in K_r} |\partial^k \varphi(t)| \left| \sum_{|l|=0}^{|k|} C_k^l \eta^l - 1 \right| \\
&= M_\eta \|\varphi\|_{m, K_r} ((1 + \eta)^k - 1),
\end{aligned}$$

де $M_\eta = \sup_{t \in K_r} e^{(\eta, t)}$, $\sum_{|l|=0}^{|k|} := \sum_{l_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{k_n}$, $C_k^l := C_{k_1}^{l_1} \cdots C_{k_n}^{l_n}$. Зауважимо, що $\lim_{\Gamma^* \ni \eta \rightarrow 0} M_\eta = 1$, тому з доведеної нерівності випливає сильна неперервність та поточкова обмеженість напівгрупи $\mathcal{Q}$. Одностайна неперервність цієї напівгрупи випливає з бочковості простору $D(\mathbb{R}^n)$ та принципу рівномірної обмеженості. Лема доведена.

Визначимо оператор

$$Q_\eta : D_\Gamma \ni \psi(t) \mapsto e^{(\eta, t)} \psi(t) \in D_\Gamma.$$

Використовуючи топологічний ізоморфізм $D(\mathbb{R}^n) / (D'_\Gamma)^o \simeq D_\Gamma$ легко довести

Наслідок 1. Відображення

$$Q : \Gamma^* \ni \eta \mapsto Q_\eta \in \mathcal{L}(D_\Gamma),$$

є одностайно неперервною (C_0) -напівгрупою операторів над простором D_Γ .

На Фур'є-образі $\widehat{D}_\Gamma$ визначимо оператор

$$\widehat{Q}_\eta : \widehat{\psi}(\xi) \mapsto \widehat{\psi}(\xi + i\eta), \quad \eta \in \Gamma^*, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Лема 2. Сім'я операторів

$$\widehat{Q} : \Gamma^* \ni \eta \mapsto \widehat{Q}_\eta \in \mathcal{L}(\widehat{D}_\Gamma) \quad (2)$$

є одностайно неперервною (C_0) -напівгрупою операторів над простором $\widehat{D}_\Gamma$.

Доведення. Напівгрупові властивості очевидні. Доведемо сильну неперервність напівгрупи (2). Для довільних $\psi \in D_\Gamma$ та $\eta \in \Gamma^*$ маємо

$$\widehat{Q}_\eta \widehat{\psi}(\xi) = \int_\Gamma e^{(\eta, t)} \psi(t) e^{-i(t, \xi)} dt$$

$$= \int_\Gamma \psi(t) e^{-i(t, \xi + i\eta)} dt = \widehat{\psi}(\xi + i\eta) = \widehat{Q}_\eta \widehat{\psi}(\xi).$$

Тому для довільного $m \in \mathbb{Z}_+$ і кожної множини $\Gamma_r := \Gamma \cap K_r$ маємо

$$\|\widehat{Q}_\eta \widehat{\psi} - \widehat{\psi}\|_{m, \Gamma_r} = \|\widehat{Q}_\eta \psi - \psi\|_{m, \Gamma_r}$$

$$= \|\widehat{Q_\eta \psi} - \psi\|_{m, \Gamma_r} = \|Q_\eta \psi - \psi\|_{m, \Gamma_r}$$

для всіх $\psi \in D_\Gamma$ та $\eta \in \Gamma^*$. З наслідку 1 випливає, що $\|\widehat{Q}_\eta \widehat{\psi} - \widehat{\psi}\|_{m, \Gamma_r} \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$ для всіх $\widehat{\psi} \in \widehat{D}_\Gamma$, що еквівалентно сильній неперервності напівгрупи $\widehat{Q}$.

Аналогічно, поточкова обмеженість напівгрупи (2) випливає з відповідної властивості напівгрупи $\mathcal{Q}$.

В [2] доведено, що простір $\widehat{D}_\Gamma$ є бочковим. Отже, за принципом рівномірної обмеженості $\widehat{Q}$ є одностайно неперервною напівгрупою операторів над простором $\widehat{D}_\Gamma$. Лема доведена.

Нехай $\text{Int}\Gamma^*$ позначає внутрішність конуса Γ^* . Визначимо в $\mathbb{C}^n$ трубчасту область

$$\mathbb{C}_\Gamma^n := \{z = \xi + i\eta : \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \text{Int}\Gamma^*\}.$$

Лема 3. Кожна із функцій $\widehat{\psi}(\xi) \in \widehat{D}_\Gamma$ припускає єдине аналітичне продовження $\widehat{\psi}(z)$ у трубчасту область $\mathbb{C}_\Gamma^n$, яке можна зобразити у вигляді інтеграла Лапласа

$$\widehat{\psi}(z) = L[\psi](z) = \int_\Gamma e^{-i(t, z)} \psi(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}_\Gamma^n.$$

При цьому для довільного $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконується граничне співвідношення

$$\widehat{\psi}(\xi) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \widehat{\psi}(z), \quad z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}_\Gamma^n.$$

Доведення. Твердження є безпосереднім наслідком класичної теореми Пелі-Вінера для класу Гарді-Лебега у випадку n незалежних змінних (див. [9, ст. 226]).

4. Граничні значення перетворення Фур'є-Лапласа елементів простору D'_Γ .

Розширимо сім'ю операторів $\{Q_\eta : \eta \in \Gamma^*\}$ на простір D'_Γ природним способом

$$\langle Q_\eta f, \psi \rangle := \langle f, Q_\eta \psi \rangle, \quad \psi \in D_\Gamma, \quad f \in D'_\Gamma.$$

Для кожного розподілу $f \in D'_\Gamma$ визначимо перетворення Фур'є-Лапласа

$$\mathcal{L}[f](z) := \mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi) = \widehat{Q_\eta f}(\xi),$$

$z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}_\Gamma^n$, де $\mathcal{F}^*$ — узагальнене перетворення Фур'є, визначене формулою (1).

Будемо казати, що аналітична в трубчастій області $\mathbb{C}_\Gamma^n$ функція $g(z)$ належить до алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$, якщо вона задовольняє дві умови:

1) для кожного фіксованого $\eta \in \text{Int}\Gamma^*$ функція $\xi \mapsto g(\xi + i\eta)$ належить до простору $\widehat{D}'_\Gamma$;

2) сукупність $\{g(\xi + i\eta) : \eta \in \Gamma_r^*\}$ обмежена в просторі $\widehat{D}'_\Gamma$ для кожного скінченного дійсного додатного числа r , де $\Gamma_r^* := \text{Int}\Gamma^* \cap K_r$.

Теорема 1. *Перетворення Фур'є-Лапласа здійснює алгебраїчний ізоморфізм згорткової алгебри D'_Γ в мультиплікативну алгебру $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$. Зокрема,*

$$\mathcal{L}[f * h] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[h], \quad f, h \in D'_\Gamma,$$

і $\mathcal{L}[\delta]$ є одиничною функцією алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$.

Доведення. Зауважимо, що для $\psi \in D_\Gamma$ і кожного фіксованого $\eta \in \Gamma^*$ формула

$$\begin{aligned} \langle \widehat{Q_\eta f}, \widehat{\psi} \rangle &= (2\pi)^n \langle Q_\eta f, \psi \rangle \\ &= (2\pi)^n \langle f, Q_\eta \psi \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{Q_\eta \psi} \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

однозначно визначає $\widehat{Q_\eta f}$ як лінійний та неперервний функціонал на просторі $\widehat{D}_\Gamma$. Справді, однозначність є наслідком відокремлюваності двоїстості $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$. Неперервність є наслідком неперервності функціонала $\widehat{f}$ на $\widehat{D}_\Gamma$.

З іншого боку, оскільки $\mathcal{F}^*$ здійснює топологічний ізоморфізм згорткової алгебри D'_Γ на мультиплікативну алгебру $\widehat{D}'_\Gamma$ (див. [3]), то з означення відображення $\mathcal{L}$ випливає, що $\mathcal{L}[f]$ є узагальненим перетворенням Фур'є розподілу $Q_\eta f \in D'_\Gamma$, а тому є елементом простору $\widehat{D}'_\Gamma$ для кожного фіксованого $\eta \in \text{Int}\Gamma^*$.

Покажемо, що формула (3) визначає продовження функціонала $\widehat{f} \in \widehat{D}'_\Gamma$ в простір $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$. Для цього достатньо довести виконання умови 2) з означення алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$.

З наслідку 1 випливає, що для довільної функції $\psi \in D_\Gamma$ сукупність $\{Q_\eta \psi : \eta \in \Gamma_r^*\}$ є обмеженою в D_Γ для кожного скінченного дійсного $r > 0$. Тоді із співвідношення (3) випливає, що сукупність $\{\widehat{Q_\eta \psi} : \eta \in \Gamma_r^*\}$, де $0 < r < \infty$, є обмеженою в слабкій топології простору $\widehat{D}'_\Gamma$. Оскільки $\widehat{D}'_\Gamma$ — монтелевий простір (див. [3]), то для кожного скінченного дійсного додатного r ця сукупність є обмеженою в сильній топології.

Покажемо аналітичність функціонала $\mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)$ при $\eta \in \text{Int}\Gamma^*$. Враховуючи щільність підпростору D_Γ в D'_Γ в сильній топології простору D'_Γ відносно дуальності $\langle D'_\Gamma, D_\Gamma \rangle$, стверджуємо, що існує така послідовність $\{f_p\} \in D_\Gamma$, що $\lim_{p \rightarrow \infty} f_p = f$ в сильній топології простору D'_Γ .

Доведено [3], що алгебра D'_Γ топологічно ізоморфна максимальній підалгебрі $M(D_\Gamma)$ тих операторів в алгебрі $\mathcal{L}(D_\Gamma)$, які комутують з оператором зсуву T_s вздовж конуса Γ . Враховуючи бочковість простору D_Γ , з принципу рівномірної обмеженості випливає гіпонеперервність відносно змінної $\varphi \in D_\Gamma$ білінійної форми $D'_\Gamma \times D_\Gamma \ni (f, \varphi) \rightarrow f * \varphi$. Отже, топології рівномірної збіжності на обмежених множинах і на скінчених множинах збігаються в алгебрі $M(D_\Gamma)$, тому $M(D_\Gamma)$ є повною підалгеброю в топології поточної збіжності. В такому випадку $\lim_{p \rightarrow \infty} (f_p * \varphi) = f * \varphi$ для кожної функції $\varphi \in D_\Gamma$.

Оскільки $f * \varphi \in D_\Gamma$, то Фур'є-образи функцій виду $Q_\eta(f_p * \varphi) := e^{(\eta, t)}(f_p * \varphi)(t)$ при $\eta \in \text{Int}\Gamma^*$ є аналітичними. Тоді для $m = 0$ існує таке число $r > 0$, що при кожному $0 < \varepsilon < r$ отримуємо

$$\begin{aligned} &\sup_p \sup_{-\eta \in \Gamma_r \setminus K_\varepsilon} \|\widehat{Q_\eta(f_p * \varphi)}\|_{0, \Gamma_r} \\ &\leq \sup_p \|f_p * \varphi\|_{0, \Gamma_r} = C < +\infty. \end{aligned}$$

Це означає, що послідовність аналітичних функцій $\{\widehat{Q_\eta(f_p * \varphi)}(\xi)\}$ є обмеженою в множині $\Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Тоді з неї можна виділити підпослідовність $\{\widehat{Q_\eta(f_{p_j} * \varphi)}(\xi)\}$, що збігається до деякої аналітичної функції $\widehat{g}_\varphi(\xi)$ для

довільного $-\eta \in \Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Враховуючи повноту алгебри $M(D_\Gamma)$, робимо висновок, що $\widehat{g}_\varphi$ належить Фур'є-образу $M(D_\Gamma)$.

Оскільки кожний оператор алгебри $M(D_\Gamma)$ має вигляд згортки f_1* з деяким розподілом $f_1 \in D'_\Gamma$, то $\widehat{g}_\varphi(\xi) = \widehat{(f_1 * \varphi)}(\xi)$. Тоді з єдиності границі при $j \rightarrow \infty$ отримуємо, що $f_1 = f$.

Крім того, для всіх $\varphi, \psi \in D_\Gamma$ маємо

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{F}^*[Q_\eta(f * \varphi)](\xi), \mathcal{F}[\psi](\xi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^*[f * \varphi](\xi), \mathcal{F}[Q_\eta \psi](\xi) \rangle = (2\pi)^n \langle f * \varphi, Q_\eta \psi \rangle \\ &= (2\pi)^n \langle Q_\eta(f * \varphi), \psi \rangle = (2\pi)^n \langle Q_\eta f * Q_\eta \varphi, \psi \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi) \cdot \mathcal{F}^*[Q_\eta \varphi](\xi), \mathcal{F}[\psi](\xi) \rangle, \end{aligned}$$

тобто $\mathcal{F}^*[Q_\eta(f * \varphi)] = \mathcal{F}^*[Q_\eta f] \cdot \mathcal{F}^*[Q_\eta \varphi]$ є аналітичною при $-\eta \in \Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Тоді $\mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)$ є аналітичною у множині $\Gamma_r \setminus K_\varepsilon$. Отже, на підставі довільності вибору чисел ε і r робимо висновок, що $\mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi)$ є аналітичною в $\text{Int } \Gamma^*$.

З рівності $Q_\eta(f * h) = Q_\eta f * Q_\eta h$ для довільних розподілів $f, h \in D'_\Gamma$ і функції $\psi \in D_\Gamma$ отримаємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * h](z) &= \mathcal{F}^*[Q_\eta(f * h)](\xi) = \mathcal{F}^*[Q_\eta f * Q_\eta h](\xi) \\ &= \mathcal{F}^*[Q_\eta f](\xi) \cdot \mathcal{F}^*[Q_\eta h](\xi) = \mathcal{L}[f](z) \cdot \mathcal{L}[h](z). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\mathcal{L}[\delta]$ є одиничною функцією в $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$, оскільки δ — одиниця згорткової алгебри D'_Γ . Теорема доведена.

Теорема 2. Для довільної функції g з $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$ існує єдиний розподіл $\widehat{f} \in \widehat{D}'_\Gamma$, такий, що в сильній топології простору $\widehat{D}'_\Gamma$ справедлива рівність

$$\lim_{\text{Int } \Gamma^* \ni \eta \rightarrow 0} g(\xi + i\eta) = \widehat{f}(\xi),$$

тобто, Фур'є-образи $\widehat{D}'_\Gamma$ можна трактувати як узагальнені граничні значення аналітичних функцій алгебри $\mathcal{H}'(\Gamma^*)$.

Доведення. Твердження є наслідком теореми 1 і сильної неперервності напівгрупи Q_η .

Зауважимо, що оскільки згорткова алгебра D'_Γ в сильній топології є бочкова, то

згортка є неперервною відносно секвенційальної збіжності. Отже, в просторі $\widehat{D}'_\Gamma$ виконується співвідношення

$$\lim_{\text{Int } \Gamma^* \ni \eta \rightarrow 0} \widehat{Q_\eta f} \cdot \widehat{Q_\eta h} = \widehat{f} \cdot \widehat{h},$$

для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, $f, h \in D'_\Gamma$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Lopushansky O.V., Solomko A.V., Sharyn S.V. Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone // Matematychni Studii. — 2011. — **35**, N1. — P. 78-90.
2. Соломко А.В. Операторне зображення Фур'є-образу згорткової алгебри розподілів на конусі // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. — 2005. — Вип. 64. — С. 266-272.
3. Лопушанський О.В., Соломко А.В., Шарин С.В. Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2004. — **47**, N2. — С. 95-99.
4. Соломко А.В. Окремий випадок операторного числення для узагальнених функцій з носіями на конусі // Карпатські математичні публікації. — 2009. — **1**, N1. — С. 92-99.
5. Komatsu H. An introduction to the theory of generalized functions // Tokyo University Publ. — 2000.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979. — 318 с.
7. Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971. — 360 с.
8. Seeley R.T. Extensions of C^∞ -functions defined in a half-space // Proc. Amer. Math. Soc. — 1964. — **15**. — P. 625-626.
9. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.