УДК 517.956.4

©2004 р. Г.С. Пасічник, І.Р. Тимків

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Доведено теореми про інтегральне зображення розв'язків задачі Діріхле та Неймана для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна та рівняння, що зводиться до згаданого.

There have been proved the theorems about integral image of Dirichle's and Neumann's task for Kolmogorov's equations of Ulenbeck-Ornstein's diffusion process and the equations which is derived from the above-said one.

На даний час теорія лінійних параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами досить повно розвинена. Побудова фундаментального розв'язку задачі Коші, векторфункцій Гріна крайових задач для параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами здійснена у працях С.Д. Ейдельмана [1] та С. Д. Івасишена [2,3]. Значний інтерес виникає на сучасному етапі до рівнянь, коефіцієнти яких можуть необмежено зростати при $|x| \to \infty$. У роботах [1–3] вивчаються питання дослідження коректної розв'язності задачі Коші та крайових задач для загальних параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами в спеціальних класах функцій. При цьому на коефіцієнти системи накладаються додаткові умови.

Важливим прикладом параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами є рівняння з теорії сигналів вигляду

$$\partial_t u(t,x) = a\partial_x^2 u(t,x) + b\partial_x(xu(t,x)),$$
$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Такі рівняння виникають в теорії дифузійних процесів із значенням на дійсній прямій при дослідженні швидкості вільної частинки у броунівському русі. Уленбеком і Орнштейном було встановлено, що ймовірність u швидкості переходу частинки з одного стану в інший описується заданим рівнянням. Це рівняння називається прямим рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна. Воно цікаве тим, що для нього відомі явні вирази векторфункцій Гріна крайових та спряжених задач [4].

Природно виникає питання дослідження розв'язності крайових для згаданого рівняння і рівняння, що зводиться до нього.

1. Нехай b – диференційовна на $[0,\infty)$ функція така, що $b(0) = 0$, а B – деяка її первісна така, що $B(0) = 0$, $\Pi_{(t_0,T]} \equiv \{(t,x) \mid t \in (t_0,T]\,, x \in \mathbb{R}_+\}$, де T – довільне фіксоване додатне число.

Розглянемо диференціальні вирази

$$L \equiv \partial_t - \partial_x^2 - x\partial_x - 1,$$
$$L_1 \equiv \partial_t - \partial_x^2 - 2b(x)\partial_x - b'(x) - b^2(x) + \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{1}{2};$$

і крайові задачі вигляду

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}, \tag{1}$$
$$(Au)(t,x)|_{x=0} = g(t), \quad t \in (t_0,T], \tag{2}$$
$$u(t,x)|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

де умова (2) збігається з однією з таких умов

$$u(t,x)|_{x=0} = g(t), \quad t \in (t_0,T], \tag{2_1}$$
$$\partial_x u(t,x)|_{x=0} = g(t), \quad t \in (t_0,T], \tag{2_2}$$

а t_0 - фіксоване дійсне число таке, що $t_0 < T$.

За допомогою заміни

$$v(t,x) = \exp\{-B(x) + \tfrac{x^2}{4}\}u(t,x), \tag{4}$$

до задач (1)–(3) зводяться задачі

$$(L_1 v)(t,x) = f_1(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}, \tag{5}$$
$$(Av)(t,x)|_{x=0} = g_1(t), \quad t \in (t_0,T], \tag{6}$$
$$v(t,x)|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{7}$$

причому умова (6) є однією з таких умов

$$v(t,x)|_{x=0} = g_1(t), \quad t \in (t_0,T], \tag{6_1}$$
$$\partial_x v(t,x)|_{x=0} = g_1(t), \quad t \in (t_0,T], \tag{6_2}$$

а $f(t,x) = \exp\{B(x) - \frac{x^2}{4}\}f_1(t,x)$,
$\varphi(t,x) = \exp\{B(x) - \frac{x^2}{4}\}\varphi_1(x)$, $g(t) = g_1(t)$.

Означення. *Вектор-функцією Гріна задачі (1), (2_i), (3), $i \in \{1,2\}$, називається така вектор-функція $\overrightarrow{G_i} = (G_{0i}, G_{1i}, G_{2i})$, що для довільних досить гладких і фінітних функцій f, g і φ розв'язок задачі (1), (2_i), (3), $i \in \{1,2\}$, зображується у вигляді*

$$u(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} G_{0i}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} G_{1i}(t,x;\tau) g(\tau) d\tau + \\ + \int\limits_{0}^{\infty} G_{2i}(t,x;\xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}.$$

Функцію G_{0i} називають однорідною функцією Гріна, а функцію G_{1i}– ядром Пуассона крайової задачі (1), (2_i), (3), $i \in \{1,2\}$.

Явні формули для компонент вектор-функцій Гріна $\overrightarrow{G_i} = (G_{0i}, G_{1i}, G_{2i})$ крайових задач (1), (2_i), (3) мають вигляд [5]

$$G_{0i}(t,x;\tau,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2(t-\tau)})}} \times \\ \times \left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\right\} + (-1)^i \times \right. \\ \left. \times \exp\left\{-\frac{(x+\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\right\}\right], \ \tau < t, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

$$G_{1i}(t,x;\tau) = (-1)^{i+1} \frac{\sqrt{2}(xe^{-(t-\tau)})^{2-i}}{\sqrt{\pi(1-e^{-2(t-\tau)})^{2+(-1)^{i+1}}}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{x^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\right\}, \quad \tau < t, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (9)$$

$$G_{2i}(t,x;\xi) = G_{0i}(t,x;t_0,\xi), \ i \in \{1,2\}. \quad (10)$$

Формули для компонент вектор-функцій Гріна $\overrightarrow{G_i^1} = (G_{0i}^1, G_{1i}^1, G_{2i}^1)$, $i \in \{1,2\}$, задач (5)–(7) одержуються із формул (8)–(10) за допомогою рівностей

$$G_{0i}^1(t,x;\tau,\xi) = \exp\{-B(x) + B(\xi) + \tfrac{x^2-\xi^2}{4}\} \times \\ \times G_{0i}(t,x;\tau,\xi), \ \tau < t, \ \{x,\xi\} \in \mathbb{R}_+,$$

$$G_{1i}^1(t,x;\tau) = \exp\{-B(x) + \tfrac{x^2}{4}\} G_{1i}(t,x;\tau), \\ \tau < t, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

$$G_{2i}^1(t,x;\xi) = \exp\{-B(x) + B(\xi) + \tfrac{x^2-\xi^2}{4}\} \times \\ \times G_{2i}(t,x;\xi), \quad t_0 < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+. \quad (11)$$

Розглянемо спряжені крайові задач до задач (1)–(3) в $\Pi_{(t_0,T]}$. Ці задачі відповідно мають вигляд

$$(L^* u)(\tau,\xi) = f(\tau,\xi), \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[t_0,T)}, \\ Au(\tau,\xi)|_{\xi=0} = g(\tau), \quad \tau \in [t_0,T), \\ u(\tau,\xi)|_{\tau=T} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}_+,$$

де $L^* = -\partial\tau - \partial_\xi^2 + \xi\partial_\xi$.

Зазначимо [5], що однорідні функції Гріна задач (1)–(3) в $\Pi_{(t_0,T]}$ володіють властивістю нормальності, тобто

$$G_{0i}^*(\tau,\xi;t,x) = G_{0i}(t,x;\tau,\xi), \ i \in \{1,2\}, \\ \tau < t, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}_+. \quad (12)$$

Для формулювання результатів роботи введемо необхідні норми.

Розглянемо функцію [1]

$$k(t,a) \equiv \frac{cae^{2t}}{c+a(1-e^{2t})}, \quad (13)$$

де $0 < c < \frac{1}{2}$, $a \geq 0$, $\quad t < \mathrm{T} < \frac{1}{2} \ln \frac{c+a}{a}$.

Для неперервної функції $u \ : \Pi_{(t_0,\mathrm{T}]} \to \mathbb{R}$ розглянемо норми

$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (|u(t,x)| \exp\{-k(t,a)\,x^2\}),$$

$$\|u(t,\cdot)\|^{k(t,a),B} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (|u(t,x)| \times \\ \times \exp\{B(x) - (k(t,a) + \tfrac{1}{4})\,x^2\})$$

При цьому під виразами $\|\varphi\|^{k(t_0,a)}$ і $\|\varphi\|^{k(t_0,a),B}$, якщо $\varphi \ : \ \mathbb{R}_+ \ \to \ \mathbb{R}$, розумітимемо:

$$\|\varphi\|^{k(t_0,a)} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (|\varphi(x)| \exp\{-k(t_0,a)x^2\}),$$

$$\|\varphi\|^{k(t_0,a),B} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}_+} (|\varphi(x)| \times \\ \times \exp\{B(x) - (k(t_0,a) + \tfrac{1}{4})x^2\}).$$

2. Сформулюємо та доведемо теорему про інтегральне зображення розв'язків крайових задач (1)–(3).

Теорема 1. *Нехай розв'язок u задачі (1), (2_i), (3), $i \in \{1,2\}$, задовольняє умову* $\forall T > 0\, \exists C > 0\, \forall t \in (t_0,T] : \ \|u(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \leq C$ *і, крім того,*

1) $\exists C > 0 : \ \|\varphi\|^{k(t_0,a)} \leq Ce^{-(T-t_0)}$;

2) $\int\limits_{t_0}^{t} \|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)} e^{t-\tau} d\tau < \infty$;

3) $\exists C > 0 \ \forall t \in (t_0,T] : \ |g(t)| \leq Ce^{-i(T-t)}$.

Тоді для $u \in \Pi_{(t_0,T]}$ правильне зображення

$$u(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{\infty} G_{0i}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} G_{1i}(t,x;\tau) g(\tau) d\tau + \\ + \int\limits_{0}^{\infty} G_{0i}(t,x;t_0,\xi)\varphi(\xi) d\xi, \ (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}. \quad (14)$$

Доведення. Нехай u – розв'язок задачі (1), (2_1), (3), який задовольняє умови теореми.

Вважатимемо, що Θ – функція з простору $C^\infty([0,\infty))$ така, що $\Theta(\tau)=1$ при $\tau\in[0,\frac12]$, $\Theta(\tau)=0$ при $\tau\in[\frac34,\infty]$ і $\Theta'(\tau)\le 0$; (t,x) – фіксована точка з $(t_0,T]\times(0,\frac{\overline{R}}{4})$, де $\overline{R}>0$. Скористаємось формулою Гріна–Остроградського

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}d\beta\int\limits_0^R(uLv-vL^*u)(\beta,\lambda)d\lambda=$$

$$=\int\limits_0^R u(t_2,\lambda)\,v(t_2,\lambda)d\lambda-\int\limits_0^R u(t_1,\lambda)v(t_1,\lambda)d\lambda-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_1}[u\partial_\lambda v-v\partial_\lambda u](\beta,\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=R}d\beta-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_1}[\lambda(u,v)](\beta,\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda=R}d\beta,\qquad(15)$$

де $t_1<t_2$, $R>0$. У формулі (15) покладемо замість β, λ, t_1, t_2, $u(\beta,\lambda)$ і $v(\beta,\lambda)$ відповідно τ, ξ, $t_0+\varepsilon$, $t-h$, $G_{01}(t,x;\tau,\xi)\Theta(\frac{\xi}{R})$ і $u(\tau,\xi)$, де $0<\varepsilon<\frac12(t-t_0)$, $0<h<\frac12(t-t_0)$, $R\ge\overline{R}$, а u – розв'язок задачі. Оскільки

$$Lu(\tau,\xi)=f(\tau,\xi),\quad(\tau,\xi)\in\Pi_{(t_0,\mathrm{T}]},$$
$$u(\tau,\xi)|_{\xi=0}=g(\tau),\quad\tau\in(t_0,T],$$
$$L^*G_{01}(t,x;\tau,\xi)=0,\quad\tau<t,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+,$$
$$G_{01}(t,x;\tau,\xi)|_{\xi=0}=0,\quad\tau<t,\ x\in\mathbb{R}_+,$$
$$\partial_\xi G_{01}(t,x;\tau,\xi)|_{\xi=0}=G_{11}(t,x;\tau),\ \tau<t,\ x\in\mathbb{R}_+,$$

то, перейшовши до границі при $h\to0$ та використавши властивість однорідної функції Гріна, одержимо

$$u(t,x)=\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{t}d\tau\int\limits_0^R G_{01}(t,x;\tau,\xi)\Theta(\tfrac{\xi}{R})f(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{t}G_{11}(t,x;\tau)g(\tau)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^R G_{01}(t,x;t_0+\varepsilon,\xi)\Theta(\tfrac{\xi}{R})u(t_0+\varepsilon,\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{t}d\tau\int\limits_{\frac{R}{2}}^{\frac{3R}{4}}L^*(G^*_{01}(\tau,\xi;t,x)\Theta(\tfrac{\xi}{R}))u(\tau,\xi)d\xi\equiv$$
$$\equiv I_1^R+I_2+I_3^R+I_4^R.$$

Перейдемо до границі при $R\to\infty$. Доведемо, що при цьому I_1^R прямує до

$$I_1\equiv\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{t}d\tau\int\limits_0^\infty G_{01}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi.$$

Оцінимо різницю

$$|I_1-I_1^R|=|\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{t}d\tau\int\limits_0^\infty G_{01}(t,x;\tau,\xi)\times$$
$$\times(1-\Theta(\tfrac{\xi}{R}))f(\tau,\xi)d\xi|.\qquad(16)$$

Використовуючи оцінку

$$|G_{01}(t,x;\tau,\xi)|\le\frac{\sqrt2}{\sqrt{\pi(1-e^{-2(t-\tau)})}}\times$$
$$\times\exp\{-\tfrac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\},\ \xi\in\mathbb{R}_+,\quad(17)$$

яка випливає з (10) і того, що для $x>0$ і $\xi>0$ $(x+\xi e^{-(t-\tau)})^2\ge(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2$, маємо $|\,I_1-I_1^R|\le$

$$\le\frac{\sqrt2}{\sqrt\pi}\int\limits_{t_0+\varepsilon}^{t}d\tau\int\limits_{\frac{R}{2}}^{\infty}\exp\{-(\tfrac12-c)\tfrac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\}\times$$
$$\times\exp\{-c\tfrac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}+k(\tau,a)\xi^2\}\times$$
$$\times(\exp\{-k(\tau,a)\xi^2\}|f(\tau,\xi)|)\frac{d\xi}{\sqrt{1-e^{-2(t-\tau)}}}.$$

З властивостей функції k, умови 2) теореми і збіжності інтеграла

$$\int\limits_0^\infty\exp\{-(\tfrac12-c)\tfrac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\}\frac{d\xi}{\sqrt{1-e^{-2(t-\tau)}}}$$

випливає, що $|I_1-I_1^R|\to0$ при $R\to\infty$.

Доведемо, що I_3^R прямує до

$$I_3\equiv\int\limits_0^\infty G_{01}(t,x;t_0+\varepsilon,\xi)u(t_0+\varepsilon,\xi)d\xi.$$

Оцінимо різницю

$$|I_3-I_3^R|=|\int\limits_0^\infty G_{01}(t,x;t_0+\varepsilon,\xi)\times$$
$$\times(1-\Theta(\tfrac{\xi}{R}))u(t_0+\varepsilon,\xi)d\xi|.$$

Використовуючи оцінку (17) маємо

$$|I_3-I_3^R|\le\frac{\sqrt2}{\sqrt{\pi(1-e^{-2(t-(t_0+\varepsilon))})}}\times$$
$$\times\int\limits_{\frac{R}{2}}^{\infty}\exp\{-(\tfrac12-c)\tfrac{(x-\xi e^{-(t-(t_0+\varepsilon))})^2}{1-e^{-2(t-(t_0+\varepsilon))}}\}\times$$
$$\times\exp\{-c\tfrac{(x-\xi e^{-(t-(t_0+\varepsilon))})^2}{1-e^{-2(t-(t_0+\varepsilon))}}+k(t_0+\varepsilon,a)\xi^2\}\times$$
$$\times(\exp\{-k(t_0+\varepsilon,a)\xi^2\}|u(t_0+\varepsilon,\xi)|)\,d\xi.\quad(18)$$

Скористаємось нерівностями

$$-c\tfrac{(x-\xi e^{-(t-(t_0+\varepsilon))})^2}{1-e^{-2(t-(t_0+\varepsilon))}}+k(t+\varepsilon,a)\xi^2\le k(t,a)\tfrac{\overline{R}^2}{16},$$
$$x\in(x\in[0;\tfrac{\overline{R}}{4}],\quad\xi>0\quad(19)$$
$$(x-\xi e^{-(t-(t_0+\varepsilon))})^2\ge\tfrac{1}{16}e^{-2(t-(t_0+\varepsilon))}R^2,$$
$$0<t-t_0+\varepsilon<T,\ x\in(0,\tfrac{\overline{R}}{4}],\ \xi\in[\tfrac{R}{2},\infty),\ (20)$$

де R – досить велике, $\overline{R}$ – фіксоване число, причому $0<\overline{R}<e^{-\mathrm{T}}R$. З нерівностей (18)–(20) та умови 1) теореми випливає, що $|I_3-I_3^R|\to0$ при $R\to\infty$ і фіксованому ε.

Тепер доведемо, що $I_4^R\to0$ при $R\to\infty$. Для цього відзначимо, що

$$L^*G^*_{01}(\tau,\xi;t,x)\Theta(\tfrac{\xi}{R})=L^*G^*_{01}(\tau,\xi;t,x)\Theta(\tfrac{\xi}{R})-$$
$$-G^*_{01}(\tau,\xi;t,x)\partial^2_{\xi^2}\Theta(\tfrac{\xi}{R})-2\partial_\xi G^*_{01}(\tau,\xi;t,x)\times$$
$$\times\partial_\xi\Theta(\tfrac{\xi}{R})+\xi G_{01}(t,x;\tau,\xi)\partial_\xi\Theta(\tfrac{\xi}{R}).\ (21)$$

На підставі властивостей G_{01} перший доданок в (21) дорівнює нулеві. Використовуючи те, що

$$|\partial_\xi \Theta(\tfrac{\xi}{R})| \le \tfrac{C}{R}, \quad |\partial_\xi^2 \Theta(\tfrac{\xi}{R^2})| \le \tfrac{C}{R^2},$$

оцінки $|G_{01}|$ та $|\partial_\xi G_{01}|$ при $R \ge 1$, маємо

$$|L^* G_{01}^*(\tau,\xi;t,x)\Theta(\tfrac{\xi}{R})| \le \tfrac{C}{1-e^{-2(t-\tau)}} \times$$
$$\times \exp\{-(\tfrac{1}{2}-c)\tfrac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\}.$$

За допомогою цієї оцінки так само, як вище для $|I_3 - I_3^R|$, одержуємо

$$|\int\limits_{\frac{R}{2}}^{\frac{3R}{4}} L^*(G_{01}^*(\tau,\xi;t,x)\Theta(\tfrac{\xi}{R}))u(\tau,\xi)d\xi| \le$$
$$\le C\|u(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)} \exp\{-(\tfrac{1}{2}-c)\tfrac{R^2 e^{-2(t-\tau)}}{64(1-e^{-2(t-\tau)})}\}\times$$
$$\times \tfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2(t-\tau)}}}.$$

Звідси на підставі нерівності

$$\tfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2(t-\tau)}}} \exp\{-(\tfrac{1}{2}-c)\tfrac{R^2 e^{-2(t-\tau)}}{64(1-e^{-2(t-\tau)})}\} \le$$
$$\le C\exp\{-\delta \tfrac{e^{-2(t-\tau)}}{1-e^{-2(t-\tau)}}, \ \tau < t, \ R \ge 1, \ \delta > 0,$$

та умови теореми випливає, що
$|I_4^R| \le C\exp\{-\delta \frac{e^{-2(t-(t_0+\varepsilon))}}{1-e^{-2(t-(t_0+\varepsilon))}} R^2\} \to 0$ при $R \to \infty$.

Отже, після переходу в (16) до границі при $R \to \infty$ одержуємо

$$u(t,x) = \int_{t_0+\varepsilon}^t d\tau \int_0^\infty G_{01}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$
$$+ \int_{t_0+\varepsilon}^t G_{11}(t,x;\tau)g(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int_0^\infty G_{01}(t,x;t_0+\varepsilon,\xi)u(t_0+\varepsilon,\xi)d\xi. \quad (22)$$

Тепер у рівності (22) перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$. Очевидно, що другий доданок в (22) за умови 3) теореми прямує при $\varepsilon \to 0$ до відповідного доданка з (14). При $\varepsilon \to 0$ третій доданок з (22) прямує до відповідного доданка з (14) на підставі теореми Лебега про обмежену збіжність.

У випадку задачі (1), (2_2), (3) доведення здійснюється аналогічно. Тут використовується формула Гріна-Остроградського та властивості

$$\partial_\xi u(\tau,\xi)|_{\xi=0} = g(\tau), \quad \tau \in (t_0,T],$$
$$G_{02}(t,x;\tau,\xi)|_{\xi=0} = 0, \quad \tau < t, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$
$$\partial_\xi G_{02}(t,x;\tau,\xi)|_{\xi=0} = -G_{12}(t,x;\tau), \tau < t,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_{02}(t,x;t_0+\varepsilon,\xi)u(t_0+\varepsilon,\xi) =$$
$$= G_{02}(t,x;t_0,\xi)\varphi(\xi), \ \xi \in \mathbb{R}_+, \ x \in \mathbb{R}_+.$$

Зауважимо, що з формул зв'язку між крайовими задачами для рівняння (5) та відповідними задачами для рівняння (1) випливають аналогічні теореми про інтегральне зображення розв'язків задач (5)–(7).

3. Наведемо деякі властивості інтегралів вигляду

$$v_1(t,x) = \int\limits_{t_0}^t d\tau \int\limits_0^\infty G_{0i}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$v_2(t,x) = \int\limits_0^\infty G_{0i}(t,x;t_0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ (t,x) \in \Pi_{(t_0,T]},$$

де $G_{0i}(t,x;\cdot,\cdot)$ – однорідна функція Гріна крайової задачі (1), (2_i), (3), $i \in \{1,2\}$.

Лема 1. *Нехай для функції f виконуються такі умови:*

1) функція f неперервна і задовольняє таку локальну умову Гельдера за змінною x з показником $\lambda \in (0,1]$:
$\forall R > 0 \ \exists C > 0 \ \forall \{x,\xi\} \subset (0,R] \ \forall t \in (t_0,T]:$

$$|f(t,x) - f(t,\xi)| \le Ce^{-3(T-t)}|x-\xi|^\lambda;$$

2) $\forall t \in (t_0,T]: \ \|f(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \le Ce^{-3(T-t)}$.

Тоді 1) функція v_1 має неперервні похідні, які входять в рівняння (1), при цьому похідна $\partial_x v_1$ одержується формальним диференціюванням під знаком інтегралів, а похідна другого порядку одержується за формулою

$$\partial_x^2 v_1(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_0^\infty \partial_x^2 G_{0i}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^\infty \partial_x^2 G_{0i}(t,x;\tau,\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t}(\int\limits_0^\infty \partial_x^2 G_{0i}(t,x;\tau,\xi)d\xi)f(\tau,x)d\tau, \ (23)$$
$$\partial_t v_1(t,x) = f(t,x) +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_0^\infty \partial_t G_{0i}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^\infty \partial_t G_{0i}(t,x;\tau,\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]d\xi +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t}(\int\limits_0^\infty \partial_t G_{0i}(t,x;\tau,\xi)d\xi)f(\tau,x)d\tau, \ (24)$$
$$(t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}, \ t_1 = \tfrac{t+t_0}{2}, \ i \in \{1,2\};$$

2) для функції v_1 виконується оцінка

$$\|v_1(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \le C\int\limits_{t_0}^{t} \|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)} e^{t-\tau} d\tau. \ (25)$$

Доведення здійснимо для випадку $i=1$. Розглянемо v_1 і доведемо, що для довільної точки $(t,x) \in \Pi_{(t_0,\mathrm{T}]}$

$$\partial_x v_1 = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_0^{\infty} \partial_x G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi. \quad (26)$$

Нехай $\Pi^R_{(t_0,T]} \equiv \{(t,x) \mid t \in (t_0,T]\,, x \in [0,R]\}$, де $R>0$ довільно фіксоване число. Позначимо через J_0 інтеграл по $(0,\infty)$ з формули (26) і встановимо його оцінку, користуючись нерівностями властивості G_{01} та функції k. Маємо

$$|J_0| = |\int\limits_0^{\infty} \partial_x G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi| \le$$

$$\le \frac{C\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)} e^{k(t,a)R^2}}{1-e^{-2(t-\tau)}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\infty} \exp\{-(\tfrac{1}{4}-c)\frac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{1-e^{-2(t-\tau)}}\} d\xi.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^{\infty} \exp\{-(\tfrac{1}{4}-c)\frac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{1-e^{-2(t-\tau)}}\} d\xi \le$$

$$\le C e^{t-\tau}\sqrt{1-e^{-2(t-\tau)}}, \quad (27)$$

то маємо остаточно оцінку

$$|J_0| \le \frac{C\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)} e^{k(t,a)R^2} e^{t-\tau}}{\sqrt{1-e^{-2(t-\tau)}}},$$

яка говорить про рівномірну збіжність щодо $x \in [0,R]$ інтеграла J_0 для довільних t, τ.

З останньої нерівності випливає формула (26) для $(t,x) \in \Pi^R_{(t_0,\mathrm{T}]}$, бо інтеграл $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)} e^{t-\tau}}{\sqrt{1-e^{-2(t-\tau)}}} d\tau$ збігається для довільного $t \in (t_0,T]$. Оскільки R – довільно фіксоване число, то формула (26) правильна для довільних $(t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}$.

Щодо похідної $\partial_x^2 v_1$, то попередньо викладена методика дослідження уже не придатна.

Нехай $x \in [\delta,R]$, $t \in [t_0,T]$, де δ, R – довільно фіксовані числа такі, що $0<\delta<R<\infty$. Встановимо вигляд другої похідної від функції v_1 для $(t,x) \in \Pi^{\delta,R}_{(t_0,T]} \equiv \{(t,x) \mid t \in (t_0,T]\,, x \in [\delta,R]\}$.

Нехай

$$\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_0^{\infty} G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_0^{\infty} G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^{\infty} G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi \equiv H_1 + H_2. (28)$$

Оскільки в інтегралі H_1 підінтегральна функція не має особливостей, то можемо диференціювати під знаком інтеграла

$$\partial_x^2 H_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_0^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi^{\delta,R}_{(t_0,T]}. \quad (29)$$

Щоб довести можливість застосування операції ∂_x^2 під знаком інтеграла по $(0,\infty)$, досить показати, що інтеграл

$$J_0^0 \equiv \int\limits_0^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi$$

збігається рівномірно щодо $x \in [\delta,R]$ для довільних фіксованих t , τ. Враховуючи оцінки G_{01}, властивості функції k, умову 2) леми 1, отримаємо оцінку

$$|\partial_x^2 H_1| \le C e^{k(t,a)R^2} e^{-3(T-t)} \ln \frac{1-e^{-2(t-t_0)}}{1-e^{-2(t-t_1)}},$$

яка свідчить про рівномірну щодо $t \in (t_0,T]$ збіжність інтеграла $\partial_x^2 H_1$. Отже, маємо формулу (29) для $(t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}$.

Доведемо, що $\partial_x^2 H_2 =$

$$\int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{2Re^{t-\tau}}^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,x) d\xi \equiv$$

$$\equiv J_1 + J_2 + J_3, \quad (t,x) \in \Pi^{\delta,R}_{(t_0,T]}.$$

Для цього розглянемо при $0<h<\frac{t+t_0}{2}=t_1$ функції

$$H_2^{(h)} = \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{\infty} G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}. \quad (30)$$

Очевидно, що $\lim\limits_{h\to 0} H_2^{(h)} = H_2$, $(t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}$. Доведемо існування границі $\lim\limits_{h\to 0} \partial_x^2 H_2^{(h)}$. Запишемо

$$H_2^h = \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} G_{01}(t,x;\tau,\xi) \times$$

$$\times [f(\tau,\xi)-f(\tau,x)] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_{2Re^{t-\tau}}^{\infty} G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,x) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi^{\delta,R}_{(t_0,T]}.$$

Оскільки в кожному з цих інтегралів підінтегральна функція не має особливостей,

то можемо диференціювати $\partial_x^2 H_2^{(h)} = \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]\times$
$\times d\xi + \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_{2Re^{t-\tau}}^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$
$+ \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,x) d\xi \equiv$

$$\equiv J_1^h + J_2^h + J_3^h.$$

Щоб обґрунтувати можливість застосування операції ∂_x^2 під знаками інтегралів по $[0,\ 2Re^{t-\tau}]$ та $[2Re^{t-\tau},\infty)$, досить довести, що інтеграли по $[0,\ 2Re^{t-\tau}]$ з J_1^h, по $[2Re^{t-\tau},\infty)$ з J_2^h та по $[0, 2Re^{t-\tau}]$ з J_3^h збігаються рівномірно щодо $x \in [\delta, R]$ для довільних фіксованих t і τ. Тут використовуються властивості G_{01}, функції k, умова 2) леми, нерівності

$|x-\xi|^\lambda \le |x-\xi e^{-(t-\tau)}|^\lambda + (1-e^{-2(t-\tau)})^\lambda \xi^\lambda,$
$\{x,\xi\} \subset [0,\infty),\ \lambda \in (0,1],$
$|x-\xi e^{-(t-\tau)}| \ge R,$
$x \in [\delta, R],\ \xi \in [2Re^{t-\tau},\infty).$

Оскільки

$$\int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) d\xi = \int\limits_0^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) d\xi - \int\limits_{2Re^{t-\tau}}^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) d\xi,$$

то дослідження інтеграла J_3^h зводиться до дослідження інтеграла, аналогічного J_2^h та інтеграла

$$\int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi.$$

Для оцінки цього інтеграла використовується зображення

$$\int\limits_0^{\infty} \partial_x^2 G_{01}(t,x;\tau,\xi) d\xi = - \int\limits_{-\infty}^{0} \partial_x^2 Z(t,x;\tau,\xi) d\xi - \int\limits_0^{\infty} \partial_x^2 V(t,x;\tau,\xi) d\xi,$$

де Z – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1), а $V(t,x;\tau,\xi) \equiv \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2(t-\tau)})}} \exp\{-\frac{(x+\xi e^{-(t-\tau)})^2}{2(1-e^{-2(t-\tau)})}\}.$

Доведемо, що похідна за t від функції v_1 дорівнює $\partial_t v_1 = f(t,x) +$
$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_0^{\infty} \partial_t G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$
$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_t G_{01}(t,x;\tau,\xi)[f(\tau,\xi)-f(\tau,x)]\times$
$\times d\xi + \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{2Re^{t-\tau}}^{\infty} \partial_t G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$
$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_t G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,x) d\xi,$

$$(t,x) \in \Pi_{(t_0,T]}^{\delta R}.$$

Як і в попередньому випадку, розглянемо множину $\Pi_{(t_0,T]}^{\delta,R}$ і зображення (28). Можливість застосування операції ∂_t перевіряється аналогічно випадку $\partial_x^2 H_1$.

При $0 < h < t_1$ розглянемо функції (30) і застосуємо до них операцію ∂_t

$\partial_t H_2^{(h)} = \int\limits_0^{\infty} G_{01}(t,x;t-h,\xi) f(t-h,\xi) d\xi -$
$- \int\limits_0^{\infty} G_{01}(t,x;t_1,\xi) f(t_1,\xi) d\xi +$
$+ \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_t G_{01}(t,x;\tau,\xi)\times$
$\times [f(\tau,\xi)-f(\tau,x)] d\xi +$
$+ \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_{2Re^{t-\tau}}^{\infty} \partial_t G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$
$+ \int\limits_{t_1}^{t-h} d\tau \int\limits_0^{2Re^{t-\tau}} \partial_t G_{01}(t,x;\tau,\xi) f(\tau,x) d\xi.$ Обґрунтування можливості застосування операції ∂_t проводиться аналогічно випадку з другою похідною від функції v_1.

Друге твердження леми випливає на підставі (27) з

$$|v_1(t,x)| \le \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\sqrt{2}d\tau}{\sqrt{\pi(1-e^{-2(t-\tau)})}} \times \int\limits_0^{\infty} \exp\{-(\tfrac{1}{2}-c)\tfrac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{1-e^{-2(t-\tau)}}\} \times$$
$$\times \exp\{-c\tfrac{(x-\xi e^{-(t-\tau)})^2}{1-e^{-2(t-\tau)}} + k(\tau,a)\xi^2\} \times |f(\tau,\xi)| \exp\{-k(\tau,a)\xi^2\} d\xi \le$$
$$\le Ce^{k(t,a)x^2} \int\limits_{t_0}^{t} \|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)} e^{t-\tau} d\tau.$$

Наведемо деякі властивості інтеграла v_2.

Лема 2. *Нехай для функції φ виконуються умови*

$$\exists C > 0 \quad : \|\varphi\|^{k(t_0,a)} \le Ce^{-(T-t_0)}. \qquad (31)$$

Тоді для v_2 виконується оцінка

$$\|v_2(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \leq C\|\varphi\|^{k(t_0,a)}e^{T-t_0}. \quad (32)$$

Доведемо для v_2 нерівність (32) у випадку $i=1$. Використовуючи оцінки G_{01} та (27) маємо

$$|v_2(t,x)| \leq \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi(1-e^{-2(t-t_0)})}}\times$$
$$\times \exp\{-(\tfrac{1}{2}-c)\tfrac{(x-\xi e^{-(t-t_0)})^2}{1-e^{-2(t-t_0)}}\}\times$$
$$\times \exp\{k(t_0,a)\xi^2 - c\tfrac{(x-\xi e^{-(t-t_0)})^2}{1-e^{-2(t-t_0)}}\}\times$$
$$\times(|\varphi(\xi)|\exp\{-k(t_0,a)\xi^2\})d\xi \leq$$
$$\leq C\|\varphi\|^{k(t_0,a)}e^{k(t,a)x^2}e^{t-t_0}.$$

Звідси одержуємо нерівність (32).

4. Сформулюємо і доведемо теореми про коректну розв'язність крайових (1)–(3).

Теорема 2. *Нехай для функцій f, g та φ виконуються умови:*
1) $\exists C>0 \forall t\in(t_0,T]$: $\|f(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \leq Ce^{-3(T-t)}$;
2) f задовольняє локальну умову Гельдера за змінною x з показником $\lambda\in(0,1]$:
$\forall R>0\ \exists C>0\ \forall\{x,\xi\}\subset(0,R]\ \forall t\in(t_0,T]$
$$|f(t,x)-f(t,\xi)| \leq Ce^{-3(T-t)}|x-\xi|^\lambda;$$
3) $\exists C>0\ \forall t\in(t_0,T]: |g(t)| \leq Ce^{-i(T-t)}$;
4) $\exists C>0\ : \|\varphi\|^{k(t_0,a)} \leq Ce^{-(T-t_0)}$.

Тоді формулою

$$u(t,x)=\int\limits_{t_0}^t d\tau\int\limits_0^\infty G_{0i}(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$
$$+\int\limits_{t_0}^t G_{1i}(t,x;\tau)g(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^\infty G_{0i}(t,x;t_0,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(t_0,T]},\ (33),$$

визначається єдиний розв'язок крайової задачі (1)–(3) в $\Pi_{(t_0,T]}$, який задовольняє умову:

$$\exists C>0\ \forall t\in(t_0,T]: \|u(t,\cdot)\|^{k(t,a)} \leq C\times$$
$$\times(\int\limits_{t_0}^t \|f(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a)}e^{t-\tau}d\tau + \|\varphi\|^{k(t_0,a)}e^{T-t_0}).\ (34)$$

Щоб довести, що функція u, яка визначається формулою (33) є розв'язком крайової задачі Діріхле (1)–(3), треба довести, що функція u задовольняє ці задачі, тобто досить показати можливість диференціювання інтегралів з (33). Це випливає з властивостей об'ємних потенціалів та інтегралів Пуассона породжених однорідною функцією Гріна та (23), (24). Оцінка (34) випливає з (25) та (32). Теореми про коректну розв'язність крайових задач для рівняння, що зводиться до рівняння Колмогорова одержуються з теореми 2 на підставі заміни (4).

Теорема 3. *Нехай для функцій f_1 , g_1 та φ_1 виконуються умови: 1) $\exists C>0\ \forall t\in(t_0,T]$: $\|f_1(t,\cdot)\|^{k(t,a),B} \leq Ce^{-3(T-t)}$; 2) f_1 задовольняє локальну умову Гельдера за змінною x з показником $\lambda\in(0,1]$: $\forall R>0\ \exists C>0\ \forall\{x,\xi\}\subset(0,R]\ \forall t\in(t_0,T]$ $|f_1(t,x)-f_1(t,\xi)| \leq Ce^{-3(T-t)}|x-\xi|^\lambda$; 3) $\exists C>0\ \forall t\in(t_0,T]$: $|g_1(t)|\leq Ce^{-i(T-t)}$; 4) $\exists>0: \|\varphi_1\|^{k(t_0,a),B}\leq Ce^{-(T-t_0)}$. Тоді формулою $v(t,x)=\int\limits_{t_0}^t d\tau\int\limits_0^\infty G^1_{0i}(t,x;\tau,\xi)\ f_1(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_{t_0}^t G^1_{1i}(t,x;\tau)g_1(\tau)d\tau+\int\limits_0^\infty G^1_{0i}(t,x;t_0,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi$, $(t,x)\in\Pi_{(t_0,T]}$, визначається єдиний розв'язок задачі (5)–(7) в $\Pi_{(t_0,T]}$, який задовольняє умову: $\exists C>0\ \forall t\in(t_0,T]$: $\|v(t,\cdot)\|^{k(t,a),B} \leq C(\int\limits_{t_0}^t \|f_1(\tau,\cdot)\|^{k(\tau,a),B}e^{t-\tau}d\tau + \|\varphi_1\|^{k(t_0,a),B}e^{T-t_0})$.*

Тут $G^1_{0i}(t,x;\cdot,\cdot)$ та $G^1_{1i}(t,x;\cdot)$, – відповідно однорідна функція Гріна та ядро Пуассона задачі (5), (6_i), (7), $i\in\{1,2\}$. Доведення даної теореми здійснюється аналогічно доведенню теореми 2. оскільки однорідна функція Гріна та ядра Пуассона задач (5)–(7) виражаються формулами (11).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 443 с.

2. *Івасишен С. Д.* Інтегральні зображення розв'язків загальних параболічних крайових задач і коректна розв'язність у просторах зростаючих функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1973. — №7 — С. 596—599 .

3. *Ивасишен С. Д., Лавренчук В. П.* О корректной разрешимости общих граничных задач для параболических систем с растущими коэффициентами // Укр. мат. журн. — К. — 1978. — Т.30, №1. – С. 99—106.

4. *Пасічник Г. С., Івасишен С. Д.* Деякі теореми типу Ліувілля для розв'язківі одного класу параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами. — Чернівець. держ. ун-т. Чернівці. — 1996. — 29 с. — Деп. в ДНТБ України 08.04.96, N905-Ук96.

Надійшла до редколегії 4.10.2004