УДК 517.51, 515.12

©2004 р. В.В. Михайлюк

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТУ ВЕРИ

Узагальнюється на випадок топологічних просторів результат Вери про необхідні і достатні умови метризовності всіх компактних підпросторів простору $C_p(X)$ в класі цілком регулярних просторів X.

A Vera result on necessary and sufficient conditions of the metrizability of all compact subspaces in $C_p(X)$ for completely regular space X is generalized on the case of topological space X.

1. Відображення $f : X \to \mathbb{R}$, визначене на топологічному просторі X, називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Для довільного не більш ніж зліченного ординала α відображення $f : X \to \mathbb{R}$ називається *функцією берівського класу* α, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, які є берівського класу, меншого ніж α, така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Функції берівського класу α, де α деякий не більш ніж зліченний ординал, називаються *вимірними за Бером*.

В дослідженнях берівської класифікації нарізно неперервних функцій, тобто функцій, неперервних відносно кожної змінної зокрема, які беруть свій початок з класичної праці А. Лебега [1], було виявлено, що важливу роль тут відіграють властивості типу зліченності ланцюжків і топологічні простори X, для яких кожна компактна множина Y в $C_p(X)$ метризовна, де через $C_p(X)$ ми позначаємо простір неперервних на X функцій з топологією поточкової збіжності.

Нагадаємо, що топологічний простір X має *властивість зліченності ланцюжків (C.C.C.)*, якщо довільна система попарно неперетинних відкритих в X непорожніх множин є не більш ніж зліченною, чи *властивість зліченності дискретних ланцюжків (D.C.C.C.)*, якщо довільна дискретна система відкритих в X непорожніх множин є не більш ніж зліченною. В. Моран [2] і Г. Розенталь [3] довели наступний результат.

Теорема (Моран, Розенталь). *Нехай X компактний гаусдорфовий простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) кожний компактний простір Y в $C_p(X)$ метризовний;

(ii) кожний слабко компактний простір Y в $C_p(X)$ слабко метризовний;

(iii) для довільного компактного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера;

(iv) для довільного компактного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ вимірна за Бером;

(v) X має C.C.C.

Топологічний простір X називається *морановим (слабко морановим)*, якщо для довільного компактного простору Y кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера (вимірною за Бером). Ці поняття ввів Г. Вера в [4], який вивчав берівську класифікацію нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, один з яких задовольняє умову типу компактності.

Теорема (Вера). *Нехай X цілком регулярний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) кожний компактний простір Y в $C_p(X)$ метризовний;

(ii) X морановий (слабко морановий) з умовою C.C.C.;

(iii) X морановий (слабко морановий) з умовою D.C.C.C.

В даній статті ми покажемо, що цей результат Вери можна узагальнити на випадок топологічного простору X, замінивши умови *D.C.C.C.* і *C.C.C.* на їхні слабші аналоги, які формулюються в термінах функціонально відкритих множин.

2. Розпочнемо з викладу допоміжних результатів.

Множина A в топологічному просторі X називається *функціонально відкритою*, якщо існує неперервна функція $f : X \to [0,1]$ така, що $A = f^{-1}((0,1])$. Відображення топологічного простору X в топологічний простір Y називатимемо *функціонально відкритим*, якщо образ довільної функціонально відкритої в X множини є функціонально відкритою в Y множиною. Систему $\mathcal{A}$ множин в топологічному просторі X називатимемо *функціонально дискретною*, якщо для довільної точки $x \in X$ існує функціонально відкритий окіл U точки x в X такий, що $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \emptyset\}| \leq 1$.

Твердження 1. *Нехай X, Y – топологічні простори, $f : X \to Y$ – неперервне функціонально відкрите відображення і $Z = f(X)$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) кожна диз'юнктна (функціонально дискретна) система функціонально відкритих в X множин не більш ніж злічена;

(ii) кожна диз'юнктна (функціонально дискретна) система функціонально відкритих в Z множин не більш ніж злічена.

Доведення. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Доведемо спочатку властивість диз'юнктних систем. Нехай $\{V_i : i \in I\}$ – система непорожніх функціонально відкритих множин в Z, причому $V_i \cap V_j = \emptyset$ для різних $i, j \in I$. Для кожного $i \in I$ покладемо $U_i = f^{-1}(V_i)$. Зрозуміло, що всі множини U_i непорожні, функціонально відкриті, як прообрази функціонально відкритих множин при неперервному відображенні, і $U_i \cap U_j = \emptyset$ для різних $i, j \in I$. Тому згідно з умовою $|I| \leq \aleph_0$.

Якщо, крім того, система $\{V_i : i \in I\}$ функціонально дискретна в Z, то і система $\{U_i : i \in I\}$ функціонально дискретна в X.

При доведенні імплікації $(ii) \Longrightarrow (i)$ міркуємо аналогічно, використовуючи функціональну відкритість відображення f.

Зауважимо, що для цілком регулярних просторів вищезгадані властивості, сформульовані в термінах функціонально відкритих множин, збігаються з властивостями *C.C.C.* і *D.C.C.C.* відповідно.

Твердження 2. *Нехай X – довільний топологічний простір, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$, $\varphi(x)(y) = y(x)$, T – компактний простір і α – не більш ніж злічений ординал. Тоді функція $g : X \times T \to \mathbb{R}$ берівського класу α тоді і тільки тоді, коли існує функція $f : \varphi(X) \times T \to \mathbb{R}$ берівського класу α така, що $g(x,t) = f(\varphi(x), t)$ для довільних $x \in X$ і $t \in T$.*

Доведення. Необхідність доведемо індукцією відносно α.

Нехай g неперервна. Зауважимо, що для кожного $t \in T$ і для довільних $x_1, x_2 \in X$ таких, що $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ маємо $g(x_1, t) = g(x_2, t)$, тобто існує функція $f : \varphi(X) \times T \to \mathbb{R}$ така, що $g(x,t) = f(\varphi(x), t)$ для довільних $x \in X$ і $t \in T$. Залишається перевірити неперервність функції f.

Розглянемо асоційоване з g відображення $\psi : X \to C(T)$, $\psi(x)(t) = g(x,t)$, де простір $C(T)$ взятий з супремум нормою $\|u\| = \sup\limits_{t \in T} |u(t)|$. Оскільки T компактний простір, то з неперервності відображення g випливає неперервність відображення ψ.

Нехай $z_0 \in \varphi(X)$, $t_0 \in T$ і $\varepsilon > 0$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \varphi^{-1}(z_0)$ і розглянемо неперервну на X функцію $y_0 : X \to \mathbb{R}$, $y_0(x) = \|\psi(x) - \psi(x_0)\|$. Зауважимо, що $z_0(y_0) = \varphi(x_0)(y_0) = y_0(x_0) = 0$.

Позначимо через W відкритий окіл $\{z \in \varphi(X) : |z(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ точки z_0 в $\varphi(X)$, а через V – відкритий окіл $\{t \in T : |g(x_0,t) - g(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ точки t_0 в T. Тоді для довільних $z \in W$, $t \in T$ і $x \in \varphi^{-1}(z)$ маємо $|f(z,t) - f(z_0,t_0)| \leq |f(z,t) - f(z_0,t)| + |f(z_0,t) - f(z_0,t_0)| = |g(x,t) - g(x_0,t)| +$

$|g(x_0,t)-g(x_0,t_0)| \le \|\psi(x)-\psi(x_0)\| + \frac{\varepsilon}{2} = y_0(x) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Отже, f неперервне в точці (z_0, t_0) і необхідність при $\alpha = 0$ доведено.

Припустимо, що відповідне твердження справджується для всіх функцій берівського класу, меншого ніж α, де $\alpha > 0$, і g функція берівського класу α. Тоді існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $g_n : X \times T \to \mathbb{R}$ берівського класу $\alpha_n < \alpha$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x,t) = g(x,t)$ для довільних $x \in X$ і $t \in T$. Згідно з припущенням існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : \varphi(X) \times T \to \mathbb{R}$ берівського класу α_n така, що $g_n(x,t) = f_n(\varphi(x),t)$ для довільних $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ і $t \in T$. Тоді для довільних $x_1, x_2 \in X$ таких, що $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ маємо $g(x_1,t) = g(x_2,t)$, тобто існує функція $f : \varphi(X)\times T \to \mathbb{R}$ така, що $g(x,t) = f(\varphi(x),t)$ для довільних $x \in X$ і $t \in T$. Зрозуміло, що f берівського класу α.

Достатність випливає з неперервності φ.

Наслідок 1. *Нехай X – довільний топологічний простір, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$, $\varphi(x)(y) = y(x)$. Тоді довільна функція $g : X \to \mathbb{R}$ неперервна тоді і тільки тоді, коли існує неперервна функція $f : \varphi(X) \to \mathbb{R}$ така, що $g(x) = f(\varphi(x))$.*

Наслідок 2. *Нехай X – довільний топологічний простір і $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$, $\varphi(x)(y) = y(x)$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

(i) простір X морановий (слабко мораневий);

(ii) простір $\varphi(X)$ морановий (слабко мораневий).

Твердження 3. *Нехай X – довільний топологічний простір, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$, $\varphi(x)(y) = y(x)$ і $Z = \varphi(X)$. Тоді простори $C_p(X)$ і $C_p(Z)$ гомеоморфні.*

Доведення. Розглянемо відображення $\psi : C_p(Z) \to C_p(X)$, $\psi(u)(x) = u(\varphi(x))$. З наслідку 1 випливає, що ψ біекція. Нехай $u_0 \in C_p(Z)$, $v_0 = \psi(u_0)$, $x_1,\dots,x_n \in X$, $z_1 = \varphi(x_1),\dots,z_n = \varphi(x_n)$, $\varepsilon > 0$, $U = \{u \in C_p(Z) : |u(z_i) - u_0(z_i)| < \varepsilon, 1 \le i \le n\}$ і $V = \{v \in C_p(X) : |v(x_i) - v_0(x_i)| < \varepsilon, 1 \le i \le n\}$. Тоді $\psi(U) = V$, тому ψ і ψ^{-1} неперервні. Отже, ψ гомеоморфізм.

3. Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема. *Нехай X – довільний топологічний простір. Тоді наступні твердження рівносильні:*

(i) довільний компактний простір Y в $C_p(X)$ метризовний;

(ii) X морановий (слабко мораневий) простір, у якому кожна система попарно неперетинних функціонально відкритих множин не більш ніж зліченна.

(iii) X морановий (слабко мораневий) простір, у якому кожна функціонально дискретна система функціонально відкритих множин не більш ніж зліченна.

Доведення. Розглянемо відображення $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$, $\varphi(x)(y) = y(x)$ і покладемо $Z = \varphi(X)$. Згідно з наслідком 1 неперервне відображення $\varphi : X \to Z$ є функціонально відкритим.

$(i) \implies (ii)$. Нехай кожний компактний простір в $C_p(X)$ метризовний. Тоді з твердження 3 випливає, що кожний компактний простір в $C_p(Z)$ метризовний і згідно з теоремою Вери простір Z мораневий (слабко мораневий) з умовою $C.C.C.$ Тепер (ii) випливає з наслідку 2 і твердження 1.

Імплікація $(ii) \implies (iii)$ є очевидною.

$(iii) \implies (ii)$. З наслідку 2 і твердження 1 випливає, що простір Z мораневий (слабко мораневий) з умовою $D.C.C.C.$ Залишилось використати теорему Вери і твердження 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lebesgue H.* Sur les fonctions representables analitiquement // Journ. Math., ser.2. — 1905. — **1**. — P.139—216.

2. *Moran W.* Separate continuity and support of measures // J. London. Math. Soc. — 1969. — **44**. — P.320—324.

3. *Rosental H.P.* On injective Banach spaces and the $L^{\infty}(\mu)$ for finite measure μ // Acte Math. — 1970. — **124**. — P.205-247.

4. *Vera G.* Baire measurability of separately continuous functions // Quart. J. Math. Oxford. — 1988. — **39**, № 153. — P.109-116.

Надійшла до редколегії 13.12.2004