УДК 517.95+511.2

©2004 р. О.М. Медвідь, М.М. Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України

ДІОФАНТОВІ НАБЛИЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Встановлено оцінки знизу для характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

The theorems of the estimations of characteristic determinant of the integral problem for linear partial differential equations with constant coefficients are proved.

Вступ

Нехай $Q_p^T = (0,T)\times\Omega_p$, де $T>0$, Ω_p- тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $x=(x_1,\dots,x_p)\in\Omega_p$, $D_x = (-i\partial_{x_1},\dots,-i\partial_{x_p})$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$; $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$; $W^\gamma_{\alpha,\beta}(\alpha,\beta\in\mathbb{R},\gamma>0)$ — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\varphi_k\exp(ik,x)$ за нормою

$$\|\varphi(x);W^\gamma_{\alpha,\beta}\| = \Big(\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_k|^2 w_k^2(\alpha,\beta,\gamma)\Big)^{1/2},$$

$$w_k(\alpha,\beta,\gamma)=(1+|k|)^\alpha\exp(\beta|k|^\gamma), k\in\mathbb{Z}^p.$$

Розглянемо таку задачу з інтегральними умовами:

$$\begin{gathered} L\left(\partial_t,D_x\right)u(t,x)\equiv\partial_t^n u(t,x)+ \\ +\sum_{j=0}^{n-1}A_j(D_x)\partial_t^j u(t,x)=0,(t,x)\in Q_p^T, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} I_j[u(t,x)]\equiv\int_0^{t_1}t^{j-1}u(t,x)dt=\varphi_j(x), \\ j=\overline{1,n},\ x\in\Omega_p,\ 0<t_1\leq T, \end{gathered} \tag{2}$$

де $A_j(\xi), j=\overline{0,n-1}$, — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів N_j, $N_j\in\mathbb{N}$, відповідно $(\xi\in\mathbb{R}^p)$.

Через $f_1(t,k),\dots,f_n(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, позначимо фундаментальну систему розв'язків рівняння $L(d/dt,k)y(t)=0$ таку, що $f_q^{(j-1)}(0,k)=\delta_{jq}$, $j,q=\overline{1,n}$, де $\delta_{jq}-$ символ Кронекера. При дослідженні розв'язності задачі (1), (2) у просторах 2π-періодичних за змінними $x_1,\dots,x_p$ функцій виникають такі визначники:

$$\Delta(k,t_1)=\det\left\|\int_0^{t_1}t^{j-1}f_q(t,k)dt\right\|_{j,q=1}^n, \tag{3}$$

де $k\in\mathbb{Z}^p$. Якщо $\Delta(k,t_1)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, то задача (1), (2) має єдиний формальний розв'язок, який зображується рядом

$$\begin{gathered} u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0}\exp(ik,x)\times \\ \times\sum_{j,q=1}^n\frac{\Delta_{jq}(k,t_1)}{\Delta(k,t_1)}f_q(t,k)\varphi_{jk}, \end{gathered} \tag{4}$$

де φ_{jk}, $k\in\mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x), j=\overline{1,n}$, $\Delta_{jq}(k,t_1), j,q=\overline{1,n}$, – алгебричне доповнення елемента $\int_0^{t_1}t^{j-1}f_q(t,k)dt$ у визначнику $\Delta(k,t_1)$.

Означення 1. *Верхню межу інтегрування t_1 в умовах (2) називаємо $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальною межею для рівняння (1) $(\omega,\delta\in\mathbb{R},\gamma>0)$, якщо існує стала $C>0$ така, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*

$$|\Delta(k,t_1)|>C(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma). \tag{5}$$

Якщо точка t_1 є $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальною межею для рівняння (1), то на основі відомих оцінок [10, с. 162] для фундаментальних систем $f_1(t,k),\dots,f_n(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, та оцінок для коефіцієнтів Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, можна встановити збіжність ряду (4) у шкалі просторів $C^n([0,T];W^\gamma_{\alpha,\beta})$. Тому важливим є дослідження питання про можливість виконання нерівності (5) – це і є метою даної роботи.

Структура роботи є такою. У §1 наведено рівняння (приклади 1.1, 1.2, 1.3, теорема 1.1), для яких кожна точка $t_1 \in (0,T]$ є $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальною межею інтегрування в умовах (2) для належно вибраних чисел ω,δ,γ. Приклад 1.4 з §1 показує, що існують точки $t_1 \in (0,T]$, які не можуть бути $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальними межами для рівняння коливання струни при жодних значеннях $\omega,\delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Явище, описане у прикладі 1.4, відображає, скоріше, виняткову властивість інтегральної задачі, а не загальну, бо у §4 роботи доведено загальний результат про те, що для кожного рівняння (1) існують такі значення $\omega_0,\delta_0,\gamma_0$, що множина тих чисел $t_1 \in (0,T]$, які не є $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальними для рівняння (1), має нульову міру Гаусдорфа для всіх $\omega > \omega_0$, $\delta \ge \delta_0$, $\gamma \ge \gamma_0$ та нульову розмірність Гаусдорфа для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > \delta_0$, $\gamma \ge \gamma_0$ або ж для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_0$.

Доведення результатів §4 спирається на твердження допоміжних §2 і §3.

У §2 встановлено твердження про оцінки кількості та довжин проміжків покриття так званих виняткових множин квазімногочлена, всі значення похідних якого в заданій початковій точці (до деякого скінченного порядку) не перетворюються в нуль одночасно. Розглянуто випадки дійснозначних та комплекснозначних квазімногочленів.

У §3 показано, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник $\Delta(k,t_1)$ є квазімногочленом за змінною t_1, всі похідні якого до порядку (n^2-1) включно перетворюються в нуль при $t_1 = 0$, а похідна порядку n^2 при $t_1 = 0$ є ненульовою сталою, що не залежить від k. Встановлено оцінки знизу для дійсних частин показників експонент, які входять до визначника $\Delta(k,t_1)$, а також оцінки зверху для порядку квазімногочлена $\Delta(k,t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Нарешті, у §5 обговорено можливі узагальнення отриманих результатів.

Зауважимо, що раніше П.І.Штабалюк [12], [13, §2.3] (див. також § 7.4 у [5]), досліджуючи інтегральну задачу (2) для строго гіперболічних за Петровським рівнянь вигляду

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{|s|=j} a_{j,s}\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{n-j}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}} = 0, \qquad (6)$$

де $a_{0,0}=1$, $a_{j,s}\in\mathbb{R}$, $|s|=j, j=\overline{1,n}$, встановив, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\vec{A} = \mathrm{colon}(a_{j,s} : |s| = j, j=\overline{1,n})$, складених з коефіцієнтів рівняння (6), і для майже всіх (стосовно міри Лебега на прямій) точок $t_1 \in (0,T]$ виконується оцінка

$$|\widetilde{\Delta}(k,\vec{A},t_1)| \ge c(1+|k|)^{-\omega-\varepsilon},\ \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $\widetilde{\Delta}(k,\vec{A},t_1) = \det\left\|\int_0^{t_1} t^{j-1}e^{\mu_q(k)t}dt\right\|_{j,q=1}^{n}$, $\mu_q(k)$, $q=\overline{1,n}$, – прості корені многочлена

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{|s|=j} a_{j,s}\mu^{n-j}(ik_1)^{s_1}\dots(ik_p)^{s_p},\ k\in\mathbb{Z}^p,$$

а числове значення для сталої ω можна знайти в теоремі 13 на с. 85 у [5] (це значення, з огляду на громіздкість формули для нього, тут не наводимо).

Порівняно з [12], [13, §2.3] (див. також §7.4 у [5]) дана робота містить виклад нової методики доведення метричних оцінок знизу характеристичних визначників інтегральної задачі (1), (2), а також нові результати, які стосуються міри та розмірності Гаусдорфа множини нормальних меж задачі.

Дана робота узагальнює дослідження статті [2], у якій встановлено, що множина чисел $t_1 \in (0,T]$, $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальних для рівняння (1) другого порядку за змінною t $(n=2)$, є множиною повної Лебега на прямій, якщо $\omega > 5(p+2\gamma_0)$, $\delta \ge 2\Lambda T$, $\gamma \ge \gamma_0$ (значення для γ_0, Λ вказані у §3 роботи).

Основні результати роботи доповідались на Міжнародній науковій конференції, присвяченій 125-ій річниці від дня народження Ганса Гана [3].

§1. Приклади

Наведемо приклади інтегральних задач та приклади нормальних меж для них.

Приклад 1.1. Для задачі

$$\left(\partial_t - a^2\partial_x^2\right)^2 u(t,x) = 0,\ a>0,\ (t,x)\in Q_1^T,$$

$$I_j[u(t,x)] = \varphi_j(x),\ j=1,2,\ x\in\Omega_1,$$

визначник $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}$, обчислюється за формулами:

$$\Delta(0,t_1) = \frac{t_1^4}{12},\ \Delta(k,t_1) = \frac{4\exp(-a^2k^2t_1)}{(ak)^8}\times$$

$$\times\left(\operatorname{sh}^2\left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right) - \left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right)^2\right),\ k\neq 0.$$

Оскільки для досить великих $|k|$ виконуються нерівності

$$\operatorname{sh}^2\left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right) - \left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2\left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right),$$

$$\exp(-a^2k^2t_1)\operatorname{sh}^2\left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right) \geq \frac{1}{8},\ t_1>0,$$

то $\Delta(k,t_1) \geq \dfrac{1}{4(ak)^8}$ $(t_1>0)$ для досить великих $|k|$. Враховуючи, що $\Delta(k,t_1)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$, $t_1>0$, з попередньої нерівності одержимо, що для довільного $\gamma>0$ будь-яка точка $t_1>0$ є $(8,0,\gamma)-$нормальною межею для даного рівняння.

Приклад 1.2. Розглянемо задачу

$$\left(\partial_t + a^2\partial_x^2\right)^2 u(t,x) = 0,\ a>0,\ (t,x)\in Q_1^T,$$

$$I_j[u(t,x)] = \varphi_j(x),\ j=1,2,\ x\in\Omega_1.$$

Для цієї задачі

$$\Delta(0,t_1) = \frac{t_1^4}{12},\quad \Delta(k,t_1) = \frac{4\exp(a^2k^2t_1)}{(ak)^8}\times$$

$$\times\left(\operatorname{sh}^2\left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right) - \left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right)^2\right),\ k\neq 0.$$

Очевидно, що для всіх $t_1>0$ та досить великих $|k|$ виконується нерівність

$$\exp(a^2k^2t_1)\operatorname{sh}^2\left(\frac{a^2k^2t_1}{2}\right) \geq \frac{1}{8}\exp(2a^2k^2t_1).$$

Враховуючи, що $\Delta(k,t_1)>0$, $k\in\mathbb{Z}$, якщо $t_1>0$, звідси дістанемо, що

$$\Delta(k,t_1) \geq C_1(1+|k|)^{-8}\exp(2a^2k^2t_1), k\in\mathbb{Z},$$

де $C_1 = C_1(a,t_1)$. Отже, кожна точка $t_1>0$ є $(8,-2a^2t_1,2)-$нормальною межею для даного рівняння.

Приклад 1.3. Легко перевірити, що для задачі

$$\left(\partial_t^2 + a^2\partial_x^2\right) u(t,x) = 0,\ a>0,\ (t,x)\in Q_1^T,$$

$$I_j[u(t,x)] = \varphi_j(x),\ j=1,2,\ x\in\Omega_1,$$

визначник $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}$, обчислюється за формулами

$$\Delta(0,t_1) = \frac{t_1^4}{12},\quad \Delta(k,t_1) = \frac{2\operatorname{sh}(akt_1/2)}{(ak)^4}\times$$

$$\times\left((akt_1)\operatorname{ch}(akt_1/2) - 2\operatorname{sh}(akt_1/2)\right),\ k\neq 0.$$

Оскільки для всіх $t_1>0$ та досить великих $|k|$ виконується нерівність

$$|\Delta(k,t_1)| \geq \frac{\exp(a|k|t_1)}{8a^3|k|^3},$$

то, враховуючи, що $\Delta(k,t_1)\neq 0$, $k\in\mathbb{Z}$, якщо $t_1>0$, звідси дістанемо, що кожна точка $t_1>0$ є $(3,-at_1,1)-$нормальною межею для даного рівняння.

Загальніші приклади рівнянь, для яких кожна точка $t_1>0$ є нормальною межею, дає наступна теорема.

Теорема 1.1. *Нехай оператор $L(\partial_t, D_x)$ у рівнянні (1) має вигляд*

$$L\left(\partial_t, D_x\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\partial_t - \mu_j B(D_x)\right), \qquad (7)$$

де $\mu_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j\neq\mu_q$, $j\neq q$, а диференціальний оператор $B(D_x)$ є таким, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ виконуються умови

$$B(k)\in\mathbb{R},\quad B(k)\geq b_1|k|^{\gamma_1},\ b_1>0.$$

Якщо $\mu_j<0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, то кожна точка $t_1>0$ є $(\gamma_1 n^2,0,\gamma_1)-$нормальною межею для рівняння (1). Якщо ж $\mu_j>0$ для всіх $j=\overline{1,n}$, то кожна точка $t_1>0$ є $(\gamma_1 n(n+1)/2,-b_1\mu t_1,\gamma_1)-$нормальною межею для рівняння (1), $\mu=\mu_1+\ldots+\mu_n$.

Для доведення теореми 1.1 встановимо спочатку допоміжні твердження.

Лема 1.1. *Якщо для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$ $\lambda-$*корені рівняння* $L(\lambda, k) = 0$ *є дійсними, то для довільного* $t_1 > 0$ *визначник* $\Delta(k, t_1)$ *є відмінним від нуля.*

Доведення. Зрозуміло, що умова відмінності від нуля визначника $\Delta(k, t_1)$ рівносильна тому, що інтегральна задача

$$L(d/dt, k)y(t) = 0, \tag{8}$$

$$\int_0^{t_1} t^{j-1}y(t)dt = 0, \ j = \overline{1, n}, \tag{9}$$

має в $C^n[0, T]$ тільки нульовий розв'язок.

Припустимо, що задача (8), (9) має нетривіальний розв'язок $f(t) \in C^n[0, T]$.

Оскільки функція $f(t)$ є ненульовим розв'язком диференціального рівняння (8), корені характеристичного многочлена є дійсними, то за теоремою Пойя [9, с. 87] $f(t)$ може мати на $[0, T]$ не більше, ніж $(n-1)$ нулів. Оскільки функція $f(t) \not\equiv 0$ справджує умови (9), то, згідно із задачею 140 на с. 90 у [4, Ч. 1], $f(t)$ має на $[0, t_1]$, а, отже, і на $[0, T]$, не менше, ніж n нулів.

Отримана суперечність означає істинність твердження леми 1.1.

Лема 1.2. *Для довільних* $\lambda \in \mathbb{C}$ *та довільних* $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *справедлива рівність*

$$\int_0^{t_1} t^m e^{\lambda t}dt = e^{\lambda t_1}P_m(\lambda, t_1) - P_m(\lambda, 0),$$

де $P_m(\lambda, t_1)-$*многочлени змінної* t_1 *вигляду*

$$P_m(\lambda, t_1) = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{a_{jm}t_1^{m-j}}{\lambda^{j+1}}, & \lambda \neq 0, \\ \dfrac{t_1^{m+1}}{m+1}, & \lambda = 0, \end{cases}$$

$a_{jm} = (-1)^j m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-j+1)$, $j = \overline{0, m}$.

Доведення леми 1.2 є елементарним і проводиться інтегруванням частинами.

Доведення теореми 1.1. Нехай

$$h_q(t, k) = \begin{cases} t^{q-1}/(q-1)!, \ k = \vec{0}, \ q = \overline{1, n}, \\ \exp(\mu_q B(k)t), \ k \neq \vec{0}, \ q = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Легко перевірити, що визначники $\Delta(k, t_1)$, $\Delta_1(k, t_1) = \det \| \int_0^{t_1} t^{j-1}h_q(t, k)dt\|_{j,q=1}^n$ відрізняються сталим множником, який дорівнює значенню в нулі вронскіана фундаментальної системи $h_1(t, k), \ldots, h_n(t, k)$. Тому

$$\Delta(0, t_1) = \Delta_1(0, t_1),$$
$$\Delta(k, t_1) = \frac{\Delta_1(k, t_1)}{\prod\limits_{n \geq j > q \geq 1} (\mu_j - \mu_q)B(k)}, \tag{10}$$

де $k \neq \vec{0}$. Застосовуючи лему 1.2 для обчислення елементів визначника $\Delta_1(k, t_1)$, дістанемо, що для $k \neq \vec{0}$

$$\Delta_1(k, t_1) = \det \| \exp(\mu_q B(k)t_1) \times$$
$$\times P_{j-1}(\mu_q B(k), t_1) - P_{j-1}(\mu_q B(k), 0)\|_{j,q=1}^n.$$

З отриманої формули і умов теореми 1.1 випливає, що для досить великих $|k|$ правильними є нерівності

$$|\Delta_1(k, t_1)| \geq \frac{1}{2} \left| \det \|P_{j-1}(\mu_q B(k), 0)\|_{j,q=1}^n \right| \geq$$
$$\geq C_2 B^{-n(n+1)/2}(k) \geq C_2 b_1 |k|^{-\gamma_1 n(n+1)/2}, \tag{11}$$

якщо $\mu_j < 0$ для всіх $j = \overline{1, n}$, та нерівності

$$|\Delta_1(k, t_1)| \geq \frac{1}{2} \Big| \det \| \exp(\mu_q B(k)t_1) \times$$
$$\times P_{j-1}(\mu_q B(k), t_1)\|_{j,q=1}^n \Big| = \frac{1}{2} \exp(\mu B(k)t_1) \times$$
$$\times \Big| \det \|P_{j-1}(\mu_q B(k), t_1)\|_{j,q=1}^n \Big| \geq$$
$$\geq C_3 B^{-n}(k) \exp(\mu B(k)t_1) \geq$$
$$\geq C_3 b_1 |k|^{-\gamma_1 n} \exp(\mu b_1 t_1 |k|^{\gamma_1}), \tag{12}$$

якщо $\mu_j > 0$ для всіх $j = \overline{1, n}$. Оскільки числа μ_j, $j = \overline{1, n}$, та числа $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є дійсними, то за лемою 1.1 визначник $\Delta(k, t_1)$ є відмінним від нуля. Тому з отриманих оцінок (11), (12) та формули (10) дістаємо твердження теореми 1.1.

У наступному прикладі наведемо задачу, верхня межа інтегрування якої не може бути $(\omega, \delta, \gamma)-$нормальною, якими б не були числа $\omega, \delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.

Приклад 1.4. Для задачі

$$\left(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2\right) u(t, x) = 0, \quad a > 0, \quad (t, x) \in Q_1^T,$$

$$I_j[u(t, x)] = \varphi_j(x), \ j = 1, 2, \ x \in \Omega_1,$$

визначник $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}$, обчислюється за формулами:

$$\Delta(0,t_1)=\frac{t_1^4}{12},\ \Delta(k,t_1)=\frac{2\sin(akt_1/2)}{(ak)^4}\times$$
$$\times\left(2\sin(akt_1/2)-(akt_1)\cos(akt_1/2)\right), \quad (13)$$

де $k\neq 0$. Зрозуміло, що будь-яка точка $t_1=\frac{2\pi l}{aq}$, де $l,q\in\mathbb{N}$, не може бути $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальною межею для розглядуваного рівняння коливання струни при жодних значеннях $\omega,\delta\in\mathbb{R}$ і $\gamma>0$, бо для таких точок t_1 визначник $\Delta(k,t_1), k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, дорівнює нулю, якщо $|k|$ є кратним числа q.

Існують точки $t_1\notin\frac{2\pi}{a}\mathbb{Q}$, які не можуть бути $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальними межами при жодних значеннях $\omega,\delta\in\mathbb{R}$ та $\gamma>0$. Наведемо необхідні пояснення. За теоремою Хінчина (див. с. 48 у [11]) для довільних $\omega,\delta\in\mathbb{R}$ та $\gamma>0$ існує таке число $\theta\in(0,aT/2]$, $\theta/\pi\notin\mathbb{Q}$, що нерівність

$$|k\theta-m\pi|<\frac{(ak)^4(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)}{4(aT|k|+1)}$$

має нескінченну множину розв'язків у цілих числах k,m $(k\neq 0)$. Оскільки при фіксованому k нерівність

$$|k\theta-m\pi|<\frac{(ak)^4(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)}{4(aT|k|+1)}$$

може мати лише скінченну кількість розв'язків у цілих m, то з того, що $|\sin(k\theta)|=|\sin(k\theta-m\pi)|\le|k\theta-m\pi|$, де $m-$ціле число, випливає, що нерівність

$$|\sin(k\theta)|<\frac{(ak)^4(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)}{4(aT|k|+1)}$$

має безмежну кількість розв'язків у цілих числах k. Вибираючи точку $t_1>0$ так, що $t_1=2\theta/a$, з формули (13) отримаємо, що нерівність $|\Delta(k,t_1)|<(1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^\gamma)$ може виконуватися для нескінченної множини K_1 цілих чисел k. Зауважимо, що з формули (13) випливає, що для вибраного таким чином значення t_1 кількість цілих чисел $k\in K_1$, для яких визначник $\Delta(k,t_1)$ перетворюється в нуль, може бути не більш ніж скінченною.

§2. Оцінка кількості та довжин проміжків покриття виняткових множин гладких функцій

Для заданої на відрізку $[a,b]$ функції $f(t)$ через $E(f,\varepsilon,[a,b])$ позначатимемо множину $\{t\in[a,b]:|f(t)|\le\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$. Множину $E(f,\varepsilon,[a,b])$ називатимемо „$\varepsilon-$винятковою“ для функції $f(t)$ на відрізку $[a,b]$. Проміжком називаємо множину одного з таких виглядів: $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, (α,β), де $\alpha<\beta$; символом $\operatorname{mes}A$ позначаємо міру Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A\subset\mathbb{R}$.

Наступна лема описує покриття та оцінку довжин проміжків покриття „$\varepsilon-$виняткової“ множини $E(f,\varepsilon,[a,b])$ для гладкої дійснозначної функції $f(t)$, деяка похідна якої не перетворюється в нуль на відрізку $[a,b]$.

Лема 2.1. *Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – така дійснозначна функція, що $f\in C^n[0,T]$ і для всіх $t\in[a,b]$ виконується нерівність $|f^{(n)}(t)|>\delta$, $\delta>0$. Тоді для довільного $\varepsilon>0$ множину $E(f,\varepsilon,[a,b])$ можна покрити не більш ніж (2^n-1) проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $\left(2\varepsilon/\delta\right)^{1/n}$.*

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за n. Якщо $|f'(t)|>\delta>0$ для всіх $t\in[a,b]$, то функція $f(t)$ строго монотонна на $[a,b]$. Тому множина $E(f,\varepsilon,[a,b])$ або порожня, або є точкою, або є відрізком $[\alpha,\beta]$, $a\le\alpha<\beta\le b$. У перших двох випадках твердження леми 2.1 є очевидним. В останньому випадку за теоремою Лагранжа знайдеться така точка $\xi\in(\alpha,\beta)$, що $f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha)$. Оскільки $\alpha,\beta\in E(f,\varepsilon,[a,b])$, то $|f(\alpha)|\le\varepsilon$, $|f(\beta)|\le\varepsilon$, і, отже,

$$|\beta-\alpha|=\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{|f'(\xi)|}\le\frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

База індукції доведена.

Припустимо, що лема 2.1 встановлена для заданого натурального $n\ge 2$ і довільної дійснозначної функції $f(t)\in C^n[a,b]$ (заданої на довільному відрізку $[a,b]$) такої, що $|f^{(n)}(t)|>\delta>0$ для всіх $t\in[a,b]$.

Розглянемо таку дійснозначну функцію $g(t)\in C^{n+1}[a,b]$, що $|g^{(n+1)}(t)|>\delta>0$ для всіх $t \in [a,b]$. Множину $E(g,\varepsilon,[a,b])$ покриємо двома множинами:

$$E(g,\varepsilon,[a,b]) \subset \{t \in [a,b] : |g(t)| \le \eta\} \cup$$

$$\cup \{t \in [a,b] : |g(t)| \le \varepsilon, |g^{(n)}(t)| > \eta\}, \quad (14)$$

де $\eta = \dfrac{\delta}{2}(4\varepsilon/\delta)^{1/(n+1)}$. Оскільки функція $g^{(n)}(t)$ строго монотонна на $[a,b]$, то множина $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| \le \eta\}$ або порожня, або складається лише з одного відрізка I_1 (який, можливо, вироджується в точку), а множина $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| > \eta\}$ або порожня, або складається щонайбільше з двох неперетинних проміжків I_2, I_3 (один з яких, можливо, є порожнім). Таким чином, або $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| \le \eta\} = \emptyset$, або $\{t \in [a,b] : |g^{(n)}(t)| \le \eta\} = E(g^{(n)}, \eta, I_1)$. Аналогічно, або $\{t \in [a,b] : |g(t)| \le \varepsilon, |g^{(n)}(t)| > \eta\} = \emptyset$, або $\{t \in [a,b] : |g(t)| \le \varepsilon, |g^{(n)}(t)| > \eta\} = E(g,\varepsilon,I_2) \cup E(g,\varepsilon,I_3) \subset E(g,\varepsilon,\overline{I}_2) \cup E(g,\varepsilon,\overline{I}_3)$, де відрізки $\overline{I}_2, \overline{I}_3$– замикання проміжків I_2, I_3.

На відрізку I_1 виконується нерівність $|g^{(n+1)}(t)| > \delta$, тому з істинності леми 2.1 при $n = 1$ випливає, що множину $E(g^{(n)}, \eta, I_1)$ можна покрити одним проміжком, довжина якого не перевищує $2\eta/\delta = \big(2\varepsilon/\delta\big)^{1/(n+1)}$.

На відрізках $\overline{I}_2, \overline{I}_3$ виконується нерівність $|g^{(n)}(t)| > \eta$. За припущенням індукції кожну з множин $E(g,\varepsilon,\overline{I}_2)$, $E(g,\varepsilon,\overline{I}_3)$ можна покрити не більш ніж $(2^n - 1)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $\big(2\varepsilon/\eta\big)^{1/n} = \big(2\varepsilon/\delta\big)^{1/(n+1)}$.

Враховуючи включення (14), дістаємо покриття множини $E(g,\varepsilon,[a,b])$ не більш ніж $(2^{n+1} - 1)$ проміжками довжини не більшої від $\big(2\varepsilon/\delta\big)^{1/(n+1)}$.

Лема доведена.

Зауваження 2.1. Якщо функція $f(t)$ справджує умовам леми 2.1, то для довільного $\varepsilon > 0$ оцінка $|f(t)| > \varepsilon$ виконується на всьому відрізку $[a,b]$ за винятком не більш ніж $(2^n - 1)$ проміжків, довжина кожного з яких не перевищує $\big(2\varepsilon/\delta\big)^{1/n}$. Таке еквівалентне формулювання леми 3.1 пояснює вибір назви терміну „$\varepsilon-$виняткової“ множини гладкої функції.

Нижче будемо розглядати квазімногочлени $Q(t)$ вигляду

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\mu_j t) p_j(t), \quad (15)$$

де $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,m}$, $\mu_j \ne \mu_r$, $j \ne r$, а $p_j(t)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів $(n_j - 1)$, $j = \overline{1,m}$, відповідно. Для квазімногочлена $Q(t)$ будемо позначати: $n = n_1 + \ldots + n_m$, $B_Q = 1 + \max\limits_{1\le j\le m} |\mu_j|$, $M_Q = \min\limits_{1\le j\le m} \operatorname{Re}\mu_j$, $\psi_Q = \max\limits_{t\in[0,T]} \exp(-M_Q t)$, $G_Q(t) = \max\limits_{1\le j\le n} \big\{|Q^{(j-1)}(t)| B_Q^{-j}\big\}$.

Наступні теореми 2.1 і 2.2 дають оцінки зверху для кількості та довжин проміжків покриття „$\varepsilon-$виняткових“ множин комплекснозначних та дійснозначних квазімногочленів (15).

Теорема 2.1. *Існують такі сталі C_4, C_5 (які залежать тільки від n, T), що для довільного квазімногочлена $Q(t)$ вигляду (15), довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{C_4 G_Q(0)}{4\psi_Q B_Q^{n-1}}$, множину $E(Q,\varepsilon,[0,T])$ можна покрити не більш ніж $C_5 B_Q$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $\left(\frac{4\varepsilon\psi_Q}{C_4 G_Q(0)}\right)^{1/(n-1)}$.*

Доведення. У доведенні леми з роботи [7] встановлено, що існує така стала C_4 (яка залежить тільки від n, T), що в кожній точці $t \in [0,T]$ виконується нерівність

$$G_Q(t) \ge \frac{C_4 G_Q(0)}{B_Q^n \psi_Q} \equiv \eta. \quad (16)$$

Розглянемо функції

$$y_j(t) = \mathrm{Re} Q^{(j-1)}(t)/B_Q^j,\ j = \overline{1,n},$$

$$y_{n+j}(t) = \mathrm{Im} Q^{(j-1)}(t)/B_Q^j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Легко перевірити, що функції

$$z_{jq}^{\pm}(t) = y_j(t) \pm y_q(t), 1 \le j < q \le 2n,$$

є розв'язками звичайного диференціального рівняння

$$\prod_{j=1}^{m} \left(\frac{d^2}{dt^2} - 2\operatorname{Re}\mu_j \frac{d}{dt} + |\mu_j|^2\right)^{n_j} y(t) = 0. \quad (17)$$

Оскільки $|\mu_j| < B_Q$, $j = \overline{1,m}$, то з теореми Вієта випливає, що модуль коефіцієнта при похідній $y^{(j)}(t)$, $j = \overline{1,2n}$, у рівнянні (17) не перевищує $C_6 B_Q^{2n-j}$. За теоремою Валле Пуссена (див. с. 157 у [6]) існує таке $h_0 = h_0(n, C_6)$, що кожний нетривіальний розв'язок рівняння (17) має не більше $(2n-1)$ нулів на будь-якому проміжку, довжина якого не перевищує h_0/B_Q. Розіб'ємо $[0,T]$ на відрізки $I_j = [\xi_{j-1}, \xi_j]$ так, що $\mathrm{mes}\, I_j \le h_0/B_Q$, $1 \le j \le [B_Q T/h_0] + 1 = K$. Тоді на кожному з відрізків I_r функції $z^{\pm}_{jq}(t)$ або тотожно дорівнюють нулеві, або ж мають на ньому $K^{\pm}_{jq}(r)$ нулів $t^{\pm}_{jqr}(1), \dots, t^{\pm}_{jqr}(K^{\pm}_{jq}(r))$, де $K^{\pm}_{jq}(r) \le 2n-1$.

Нехай $J = \{J_r, r = \overline{1,M}\}$ — розбиття відрізка $[0,T]$ на відрізки J_r, утворене точками ξ_j, $j = \overline{1,K}$, та точками $t^{\pm}_{jqr}(s)$, $s = \overline{1, K^{\pm}_{jq}(r)}$, $r = \overline{1,K}$, $1 \le j < q \le 2n$. Для кількості M відрізків розбиття J виконується нерівність $M \le C_7 B_Q$. Згідно з побудовою розбиття $J = \{J_r, r = \overline{1,M}\}$, кожна з функцій $z^{\pm}_{jq}(t,k) = y_j(t,k) \pm y_q(t,k)$, $1 \le j < q \le 2n$, не може набувати на відрізку J_r значень різних знаків. Тому на кожному з відрізків J_r для довільних j, q виконується нерівність $|y_j(t)| \ge |y_q(t)|$, $t \in J_r$, або ж нерівність $|y_q(t)| \ge |y_j(t)|$, $t \in J_r$. Звідси отримуємо, що для кожного r, $1 \le r \le M$, знайдеться таке $q(r)$, $1 \le q(r) \le 2n$, що в кожній точці $t \in J_r$ справджується рівність $|y_{q(r)}(t)| = \max\limits_{1\le j\le 2n} |y_j(t)|$. Оскільки $|Q^{(j-1)}(t)| B_Q^{-j} \le 2\max\{|y_j(t)|, |y_{n+j}(t)|\}$, то з нерівності (16) випливає, що на кожному відрізку J_r, $r = \overline{1,M}$, виконується нерівність

$$|y_{q(r)}(t)| \ge \eta/2, \quad t \in J_r,$$

тобто

$$|\mathrm{Re}\, Q^{(q(r)-1)}(t)| \ge \eta B_Q^{q(r)}/2, \quad t \in J_r, \quad (18)$$

якщо $1 \le q(r) \le n$, або

$$|\mathrm{Im}\, Q^{(q(r)-n-1)}(t)| \ge \eta B_Q^{q(r)-n}/2, t \in J_r, \quad (19)$$

якщо $n+1 \le q(r) \le 2n$. Зауважимо, що $E(Q, \varepsilon, J_r) \subset E(\mathrm{Re}\, Q, \varepsilon, J_r)$, $E(Q, \varepsilon, J_r) \subset E(\mathrm{Im}\, Q, \varepsilon, J_r)$. Тому з нерівностей (18), (19) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0 = \eta B_Q/4$, множина $E(Q, \varepsilon, J_r)$ є порожньою, якщо $q(r) = 1$ або $q(r) = n+1$. Якщо ж $2 \le q(r) \le n$, то на основі твердження леми 2.1 з нерівностей (18), (19) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0 = \eta B_Q/4$, множину $E(\mathrm{Re}\, Q, \varepsilon, J_r)$ можна покрити не більш ніж $(2^{q(r)-1} - 1) \le (2^{n-1} - 1)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує

$$\left(\frac{4\varepsilon}{\eta B_Q^{q(r)}}\right)^{\frac{1}{q(r)-1}} = \frac{1}{B_Q}\left(\frac{4\varepsilon}{\eta B_Q}\right)^{\frac{1}{q(r)-1}} \le$$

$$\le \frac{1}{B_Q}\left(\frac{4\varepsilon}{\eta B_Q}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{4\varepsilon\psi_Q}{C_4 G_Q(0)}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Аналогічно, якщо $n+2 \le q(r) \le 2n$, то на основі твердження леми 2.1 з нерівностей (18), (19) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0 = \eta B_Q/4$, множину $E(\mathrm{Im}\, Q, \varepsilon, J_r)$ можна покрити не більш ніж $(2^{q(r)-n-1} - 1) \le (2^{n-1} - 1)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує

$$\left(\frac{4\varepsilon}{\eta B_Q^{q(r)-n}}\right)^{\frac{1}{q(r)-n-1}} = \frac{1}{B_Q}\left(\frac{4\varepsilon}{\eta B_Q}\right)^{\frac{1}{q(r)-n-1}} \le$$

$$\le \frac{1}{B_Q}\left(\frac{4\varepsilon}{\eta B_Q}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{4\varepsilon\psi_Q}{C_4 G_Q(0)}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Залишається врахувати, що кількість проміжків покриття множини $E(Q, \varepsilon, [0,T])$ не перевищує $(2^{n-1} - 1)M \le C_8 B_Q$.

Теорема 2.2. *Нехай $Q(t)-$дійснозначний квазімногочлен вигляду (15), де $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,m}$, $\mu_j \ne \mu_r$, $j \ne r$, а $p_j(t)-$многочлени з дійсними коефіцієнтами степенів $(n_j - 1)$, $j = \overline{1,m}$, відповідно. Існують такі сталі C_9, C_{10} (які залежать тільки від n, T), що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{C_9 G_Q(0)}{2\psi_Q B_Q^{n-1}}$, множину $E(Q, \varepsilon, [0,T])$ можна покрити не більш ніж C_{10} проміжками, довжина кожного з яких не перевищує $\left(\frac{2\varepsilon\psi_Q}{C_9 G_Q(0)}\right)^{1/(n-1)}$.*

Доведення. Розглянемо функції

$$y_j(t) = Q^{(j-1)}(t)/B_Q^j, \; j = \overline{1,n},$$

$$z_{jq}^{\pm}(t) = y_j(t) \pm y_q(t), \ \ 1 \le j < q \le n.$$

Оскільки $z_{jq}^{\pm}(t), 1 \le j < q \le n,$ – дійснозначні квазімногочлени, то на основі твердження задачі 75 на с. 58 у [4, Ч. 2] на відрізку $[0, T]$ кожна функція $z_{jq}^{\pm}(t)$ може мати не більше, ніж $(n-1)$ нулів

$$\tau_{jq}^{\pm}(1), \ldots, \tau_{jq}^{\pm}(K_{jq}^{\pm}), \quad K_{jq}^{\pm} \le n-1.$$

Нехай $J = \{J_r, r = \overline{1, M}\}$ — розбиття відрізка $[0, T]$ на відрізки J_r, утворене точками $\tau_{jq}^{\pm}(s)$, $s = \overline{1, K_{jq}^{\pm}}$, $1 \le j < q \le n$. Зрозуміло, що $M \le n(n-1)^2/2 + 1$. Як і при доведенні попередньої теореми, легко перевірити, що для кожного відрізка J_r цього розбиття існує таке $q(r)$, $1 \le q(r) \le n$, для якого

$$|Q^{(q(r)-1)}(t)| \ge \eta B_Q^{q(r)}, \quad t \in J_r. \qquad (20)$$

З оцінки (20) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \eta B_Q/2$, множина $E(Q, \varepsilon, J_r)$ є порожньою, якщо $q(r) = 1$. Якщо ж $2 \le q(r) \le n$, то на основі твердження леми 2.1 з нерівності (20) випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ множину $E(Q, \varepsilon, J_r)$ можна покрити не більш ніж $(2^{q(r)-1} - 1) \le (2^{n-1} - 1)$ проміжками, довжина кожного з яких не перевищує

$$\left(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q^{q(r)}}\right)^{\frac{1}{q(r)-1}} = \frac{1}{B_Q}\left(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q}\right)^{\frac{1}{q(r)-1}} \le$$

$$\le \frac{1}{B_Q}\left(\frac{2\varepsilon}{\eta B_Q}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{2\varepsilon\psi_Q}{C_9 G_Q(0)}\right)^{1/(n-1)}.$$

Залишається врахувати, що кількість проміжків покриття множини $E(Q, \varepsilon, [0, T])$ не перевищує $(2^{n-1} - 1)M$.

§3. Структура визначника $\Delta(k, t_1)$

У цьому параграфі роботи з'ясуємо деякі структурні властивості визначника $\Delta(k, t_1)$.

Лема 3.1. *Для визначника $\Delta(k, t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, виконуються такі рівності:*

$$\left.\frac{\partial^q \Delta(k, t_1)}{\partial t_1^q}\right|_{t_1=0} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le q < n^2, \\ C_{11}, & \text{якщо } q = n^2, \end{cases}$$

де $C_{11} = (n^2)! \prod\limits_{q=1}^{n-1}(q!)^2 / \prod\limits_{q=n}^{2n-1}(q!) \in \mathbb{N}$.

Доведення. Згідно з вибором фундаментальної системи $f_q(t, k)$, $q = \overline{1, n}$, функції

$$\int_0^{t_1} t^{j-1} f_q(t, k) dt - \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)\cdot(q-1)!},$$

як функції змінної t_1 є аналітичними і мають в точці $t_1 = 0$ нуль $(n+j)$-го порядку, $j = \overline{1, n}$. Тому правильними є розвинення

$$\int_0^{t_1} t^{j-1} f_q(t, k) dt = \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)\cdot(q-1)!} +$$

$$+\alpha_{jq}(t_1, k) t_1^{n+j}, \ j, q = \overline{1, n},$$

де $\alpha_{jq}(t_1, k), j, q = \overline{1, n},$ – аналітичні функції в околі точки $t_1 = 0$. Таким чином, в околі точки $t_1 = 0$

$$\Delta(k, t_1) = \det \left\| \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)\cdot(q-1)!} + \right.$$

$$\left. +\alpha_{jq}(t_1, k) t_1^{n+j} \right\|_{j,q=1}^{n}.$$

У цьому визначнику винесемо з кожного j-го рядка множник t_1^j, $j = \overline{1, n}$, а потім в одержаному визначнику винесемо з кожного q-го стовпця множник $t_1^{q-1}/(q-1)!$, $q = \overline{1, n}$. У результаті дістанемо, що

$$\Delta(k, t_1) = C_{12} t_1^{n^2} \det \|(j+q-1)^{-1} +$$

$$+(q-1)!\alpha_{jq}(t_1, k) t_1^{n-q+1}\|_{j,q=1}^{n} = C_{12} t_1^{n^2} \times$$

$$\times \left(\det \|(j+q-1)^{-1}\|_{j,q=1}^{n} + \beta(t_1, k) t_1\right),$$

де $C_{12} = \prod\limits_{q=1}^{n-1}(q!)^{-1}$, $\beta(t_1, k)$–аналітична функція в околі точки $t_1 = 0$. Відомо (див. [4, Ч. 2], задача 3 на с. 110), що

$$\det \left\|(j+q-1)^{-1}\right\|_{j,q=1}^{n} = \prod_{q=1}^{n-1}(q!)^3 / \prod_{q=n}^{2n-1} q!.$$

Таким чином, дістаємо розвинення

$$\Delta(k, t_1) = \frac{C_{11} t_1^{n^2}}{(n^2)!} + C_{12}\beta(t_1, k) t_1^{n^2+1},$$

з якого випливає твердження леми 3.1.

Нехай $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{m(k)}(k)$, $m(k)\le n$, – різні корені рівняння $L(\lambda,k)=0$, $k\in\mathbb{Z}^p$, кратностей $n_1(k),\ldots,n_{m(k)}(k)$ відповідно. Позначимо:

$$\gamma_0=\max_{0\le j\le n-1}\left\{\frac{N_j}{n-j}\right\},$$

$$\Lambda=-\min\left\{0;\inf_{k\in\mathbb{Z}^p}\min_{1\le j\le m(k)}\frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\}.$$

Відомо (див. розділ 5, §7 у [8]), що точна нижня грань в попередній формулі є скінченним числом.

Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ нехай $m_0(k)=0$, $m_j(k)=n_1(k)+\ldots+n_j(k)$, $j=\overline{1,m(k)}$. Для кожного q, $q=\overline{1,n}$, позначимо

$$\begin{gathered}g_q(t,k)=t^{\alpha_q}\exp(\lambda_{\beta_q}(k)t),\\ \alpha_q=q-m_{j-1}(k)-1,\quad \beta_q=j,\end{gathered}\tag{21}$$

де індекс $j=j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k)<q\le m_j(k)$.

Лема 3.2. *Визначник $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є квазімногочленом вигляду*

$$\Delta(k,t_1)=\sum_{q=1}^{R}\exp(\Lambda_q(k)t_1)p_q(t_1,k),$$

де $R\le 2^n$, $\Lambda_j(k)\ne\Lambda_q(k), j\ne q$, а для дійсних частин показників експонент виконуються нерівності

$$\operatorname{Re}\Lambda_q(k)\ge -n\Lambda(1+|k|^{\gamma_0}),\ q=\overline{1,R}.$$

Порядок $n_\Delta(k)\equiv\sum\limits_{q=1}^{R}(\deg p_q(t_1,k)+1)$ квазімногочлена $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, не перевищує

$$2^n\Big(2+C_n^2+\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{n_j(k)(n_j(k)-1}{2}\Big).$$

Доведення. Через $\Delta_1(k,t_1)$ позначимо визначник $\det\|\int_0^{t_1}t^{j-1}g_q(t,k)dt\|_{j,q=1}^n$. Визначники $\Delta(k,t_1)$ та $\Delta_1(k,t_1)$ пов'язані рівністю

$$\Delta(k,t_1)=\Delta_1(k,t_1)/W(k),\tag{22}$$

де $W(k)=\prod\limits_{q=1}^{n-1}q!$, якщо $m(k)=1$, і $W(k)=\prod\limits_{j=1}^{m(k)}\prod\limits_{q=1}^{n_j(k)-1}q!\prod\limits_{m(k)\ge j>q\ge1}(\lambda_j(k)-\lambda_q(k))^{n_j(k)n_q(k)}$, якщо $m(k)\ge 2$. З огляду на рівність (22), для доведення леми 3.2 досить показати, що визначник $\Delta_1(k,t_1)$ має структуру, описану у формулюванні леми 3.2.

Із формул (21) та леми 1.2 випливає, що елементи визначника $\Delta_1(k,t_1)$ мають вигляд

$$\begin{gathered}\int_0^{t_1}t^{j-1}g_q(t,k)dt=\int_0^{t_1}t^{\alpha_q+j-1}e^{\lambda_{\beta_q}(k)t}dt=\\ =e^{\lambda_{\beta_q}(k)t_1}P_{\alpha_q+j-1}(\lambda_{\beta_q}(k),t_1)-\\ -P_{\alpha_q+j-1}(\lambda_{\beta_q}(k),0),\quad j,q=\overline{1,n}.\end{gathered}\tag{23}$$

Використовуючи формулу для розвинення визначника $\Delta_1(k,t_1)$ та формули (23), дістанемо

$$\begin{gathered}\Delta_1(k,t_1)=\sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}(-1)^{\rho_\omega}\times\\ \times\prod_{r=1}^{n}\int_0^{t_1}t^{i_r-1}g_r(t,k)dt=\sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}(-1)^{\rho_\omega}\times\\ \times\prod_{r=1}^{n}\Big(e^{\lambda_{\beta_r}(k)t_1}P_{\alpha_r+i_r-1}(\lambda_{\beta_r}(k),t_1)-\\ -P_{\alpha_r+i_r-1}(\lambda_{\beta_r}(k),0)\Big).\end{gathered}\tag{24}$$

Оскільки для довільних наборів чисел $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{C}$ та $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ виконується рівність

$$\prod_{r=1}^{n}(y_r+z_r)=\sum_{j_1=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1}\prod_{r=1}^{n}y_r^{j_r}\prod_{q=1}^{n}z_q^{1-j_q},$$

то з формули (24) отримаємо, що

$$\begin{gathered}\Delta_1(k,t_1)=\sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}\sum_{j_1=0}^{1}\cdots\sum_{j_n=0}^{1}(-1)^{S_\omega^{j_1,\ldots,j_n}}\times\\ \times\exp((j_1\lambda_{\beta_1}(k)+\ldots+j_n\lambda_{\beta_n}(k))t_1)\times\\ \times P^{j_1}_{\alpha_1+i_1-1}(\lambda_{\beta_1}(k),t_1)\cdot\ldots\cdot P^{j_n}_{\alpha_n+i_n-1}(\lambda_{\beta_n}(k),t_1)\times\\ \times P^{1-j_1}_{\alpha_1+i_1-1}(\lambda_{\beta_1}(k),0)\cdot\ldots\cdot P^{1-j_n}_{\alpha_n+i_n-1}(\lambda_{\beta_n}(k),0),\end{gathered}$$

де $S_\omega^{j_1,\ldots,j_n}=\rho_\omega+n+j_1+\ldots+j_n$. Зрозуміло, що кількість різних показників експонент в останній формулі не перевищує 2^n. За лемою 1.2 степінь кожного многочлена

$$P^{j_1}_{\alpha_1+i_1-1}(\lambda_{\beta_1}(k),t_1)\cdot\ldots\cdot P^{j_n}_{\alpha_n+i_n-1}(\lambda_{\beta_n}(k),t_1),$$

не перевищує

$$1+j_1(\alpha_1+i_1-1)+j_n(\alpha_n+i_n-1)\le$$
$$\le 1+(\alpha_1+i_1-1)+(\alpha_n+i_n-1)=$$
$$\le 1+(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)-n+(i_1+\ldots+i_n)=$$
$$=1+C_n^2+\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{n_j(k)(n_j(k)-1)}{2}.$$

Таким чином, для порядку $n_{\Delta_1}(k)$ визначника $\Delta_1(k,t_1)$ отримуємо оцінку

$$n_{\Delta_1}(k)\le 2^n\Big(2+C_n^2+\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{n_j(k)(n_j(k)-1)}{2}\Big).$$

Оцінка знизу для дійсних частин показників експонент в попередній формулі для визначника $\Delta(k,t_1)$ є очевидною.

Лема доведена.

Зауваження 3.1. Якщо $m(k)=1$, тобто корені многочлена $L(\lambda,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є простими, то для порядку $n_\Delta(k)$ квазімногочлена $\Delta(k,t_1)$ виконується точніша оцінка

$$n_\Delta(k)\le 2^n+C_n^2+\sum_{j=1}^{n-1}C_n^j\frac{(n-j)(n+j-1)}{2}.$$

§4. Міра та розмірність Гаусдорфа множини нормальних меж інтегральної задачі

Через $M^\gamma_{\omega,\delta}(0,T]$ позначимо множину чисел $t_1\in(0,T]$, які є $(\omega,\delta,\gamma)-$нормальними для рівняння (1).

Цей параграф роботи присвячений доведенню результатів про те, що для кожного рівняння (1) множина $M^\gamma_{\omega,\delta}(0,T]$ (для належно вибраних ω, δ, γ) є множиною повної міри або ж повної розмірності Гаусдорфа на прямій.

Наведемо для зручності викладу деякі поняття, які стосуються $\rho-$міри Гаусдорфа та розмірності Гаусдорфа множини $M\subset\mathbb{R}$.

Для довільного $\delta>0$ нехай $\Pi(\delta)$ позначає сім'ю інтервалів довжини не більшої, ніж δ. Для заданої множини $M\subset\mathbb{R}$ та заданого $\rho\in(0,1]$ нехай

$$H_{\rho,\delta}(M)=\inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{mes}S_j)^\rho\ \Big|\ S_j\in\Pi(\delta),\ j\ge1,\ M\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}S_j\Big\}.$$

Для фіксованих $M\subset\mathbb{R}$, $\rho\in(0,1]$ функція $H_{\rho,\delta}(M)$ як функція від δ є монотонно неспадною, якщо δ монотонно спадає. Тому існує границя (скінченна або нескінченна)

$$H_\rho(M):=\lim_{\delta\to0}H_{\rho,\delta}(M).$$

Величина $H_\rho(M)$ називається *$\rho-$мірою Гаусдорфа* множини M. 1-міра Гаусдорфа множини M співпадає із мірою Лебега цієї множини. Відзначимо, що функція $H_\rho(M)$ як функція від M є зовнішньою мірою. Однозначно визначене число $H(M)$ таке, що

$$1)\ \forall\rho>H(M):\ \ H_\rho(M)=0,$$
$$2)\ \forall\rho<H(M):\ \ H_\rho(M)=\infty,$$

називається *розмірністю Гаусдорфа* множини $M\subset\mathbb{R}$.

Будемо використовувати наступне твердження, доведення якого міститься в [1].

Теорема 4.1. *Множина $M\subset\mathbb{R}$ має нульову $\rho-$міру Гаусдорфа тоді і тільки тоді, коли існує покриття $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ множини M таке, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\operatorname{mes}S_j)^\rho<\infty,$$

і таке, що кожна точка множини M належить до нескінченної кількості проміжків S_j.

Теорема 4.2. *Для довільного $\rho\in(0;1]$ множина $(0,T]\backslash M^\gamma_{\omega,\delta}$ має нульову $\rho-$міру Гаусдорфа, якщо $\omega>\omega_0(\rho)$, $\delta\ge\delta_0$, $\gamma\ge\gamma_0$, де $\omega_0(\rho)=\gamma_0(n^2+1)+\frac{(p+\gamma_0)(\xi-1)}{\rho}$, $\delta_0=n\Lambda T$,*

$$\xi=\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}2^n\Big(2+C_n^2+\sum_{j=1}^{m(k)}\frac{n_j(k)(n_j(k)-1)}{2}\Big).$$

Для довільних $\omega > \gamma_0(n^2+1)+(p+\gamma_0)(\xi-1)$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ розмірність Гаусдорфа множини $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ не перевищує $\frac{(p+\gamma_0)(\xi-1)}{\omega-\gamma_0(n^2+1)}$. Для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ (або для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_0$) множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову розмірність Гаусдорфа.

Доведення. Через $A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k)$ позначимо множину тих $t_1 \in (0,T]$, для яких нерівність

$$|\Delta(k,t_1)| \leq (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma}) \qquad (25)$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$, а через $A^{\gamma}_{\omega,\delta}-$множину тих значень $t_1 \in (0,T]$, для яких нерівність (25) виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Множина $A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k)$ є „ε_k-винятковою“ множиною (де $\varepsilon_k = (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\delta|k|^{\gamma}), k \in \mathbb{Z}^p$) визначника $\Delta(k,t_1)$ на $(0,T]$. З теореми 2.1 на основі тверджень лем 3.1, 3.2 випливає, що для $\omega > \omega_0(\rho)$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ множину $A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k)$ можна покрити проміжками $S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k)$, $j=\overline{1,N(k)}$, так, що для кількості $N(k)$ цих проміжків виконуються нерівності

$$N(k) \leq C_{13}(1+|k|)^{\gamma_0}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \qquad (26)$$

а для їхніх довжин – нерівності

$$\begin{aligned}\operatorname{mes} S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k) &\leq C_{14}\big((1+|k|)^{\gamma_0(n^2+1)-\omega}\times\\ &\times\exp((n\Lambda T-\delta)|k|^{\gamma_0})\big)^{1/(n_{\Delta(k)}-1)} \leq\\ &\leq C_{14}\big(1+|k|\big)^{(\gamma_0(n^2+1)-\omega)/(\xi-1)} =\\ &= C_{14}(1+|k|)^{-(p+\gamma_0)/\rho-\varepsilon},\\ &j=\overline{1,N(k)},\ \ k\in\mathbb{Z}^p,\end{aligned} \qquad (27)$$

де $\varepsilon = \frac{\omega-\omega_0(\rho)}{\xi-1} > 0$. Зауважимо, що для $\omega > \omega_0(\rho)$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ правильним є включення

$$A^{\gamma}_{\omega,\delta} = \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\geq N} A^{\gamma}_{\omega,\delta}(k) \subset$$

$$\subset \bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\geq N}\bigcup_{j=1}^{N(k)} S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k).$$

Тому кожна точка множини $A^{\gamma}_{\omega,\delta}$ належить до нескінченної кількості проміжків $S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k)$, $j=\overline{1,N(k)}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. З нерівностей (26), (27) випливає, що

$$\sum_{|k|\geq 0}\sum_{j=1}^{N(k)}(\operatorname{mes} S^{\gamma,j}_{\omega,\delta}(k))^{\rho} \leq C_{15}\sum_{|k|\geq 0}(1+|k|)^{-p-\varepsilon\rho}.$$

Тоді за теоремою 4.1 $\rho-$міра Гаусдорфа множини $A^{\gamma}_{\omega,\delta}$ дорівнює нулеві, якщо $\omega > \omega_0(\rho)$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$. Очевидно, що множина

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p}\{t_1 \in (0,T] : \Delta(k,t_1)=0\}$$

є не більш ніж зліченною. Оскільки

$$(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta} \subset A^{\gamma}_{\omega,\delta} \cup S,$$

то з монотонності міри Гаусдорфа відносно включення множин і того, що дві множини, які відрізняються на не більш ніж зліченний доданок, мають однакову міру Гаусдорфа, випливає, що $H_{\rho}((0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}) = 0$, якщо $\omega > \omega_0(\rho)$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$.

Друге твердження теореми одразу випливає з першого, а третє доводиться такими ж міркуваннями, як і перше.

Теорема доведена.

Запропонований при доведенні теореми 4.2 підхід до аналізу оцінки знизу модуля визначника $\Delta(k,t_1)$, відрізняється від відомого методу П.І.Штабалюка (див. [12] та §2.3 у [13], §7.4 у [5]) і в технічному плані є зручнішим.

Теорема 4.3. *Нехай у рівнянні* (1) *оператор $L(\partial_t, D_x)$ є таким, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені многочлена $L(\lambda,k)$ є дійсними. Для всіх $\rho \in (0;1]$ множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову $\rho-$міру Гаусдорфа, якщо $\omega > \omega_1(\rho)$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$, де $\omega_1(\rho) = \gamma_0(n^2+1) + \frac{p(\xi-1)}{\rho}$. Для довільних $\omega > \gamma_0(n^2+1)+p(\xi-1)$, $\delta \geq \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ розмірність Гаусдорфа множини $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ не перевищує $\frac{p(\xi-1)}{\omega-\gamma_0(n^2+1)}$. Для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > \delta_0$, $\gamma \geq \gamma_0$ (або для довільних $\omega \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\gamma > \gamma_0$) множина $(0,T]\backslash M^{\gamma}_{\omega,\delta}$ має нульову розмірність Гаусдорфа.*

Доведення теореми 4.3 проводиться аналогічно до доведення теореми 4.2 —

при цьому для оцінки кількості проміжків покриття виняткових множин визначника $\Delta(k, t_1)$ та для оцінки довжин відрізків покриття слід використати допоміжні леми 3.1, 3.2 і теорему 2.3.

Зауваження 4.1. Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені многочлена $L(\lambda, k)$ є простими, то у формулюванні теорем 4.2, 4.3 можна вважати, що

$$\xi = 2^n + C_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \frac{(n-j)(n+j-1)}{2}.$$

Зауваження 4.2. Для випадку рівняння (1) другого порядку за часовою змінною t $(n = 2)$ результати §4 узгоджуються з результатами, отриманими в [2].

§5. Перспектива наступних досліджень

Нехай $\psi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ така монотонно спадна функція, що

$$\begin{aligned} &1)\ \forall m \in \mathbb{Z}_+ \quad \psi(m) > 0, \\ &2)\ \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \psi(|k|) < \infty. \end{aligned}$$

Означення 2. *Верхню межу інтегрування t_1 в умовах* (2) *називаємо*

$$(\omega, \delta, \gamma, \xi)_\psi - \textit{нормальною межею}$$

для рівняння (1) $(\omega, \delta, \xi \in \mathbb{R},\ \gamma > 0)$, *якщо існує стала $C > 0$ така, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*

$$|\Delta(k, t_1)| > C(1 + |k|)^{-\omega} \exp(-\delta|k|^\gamma)\psi^\xi(|k|).$$

Поняття нормальності верхньої межі інтегрування t_1, запроваджене в означенні 2, є, очевидно, ширшим від уведеного в означенні 1.

Запропонована в даній роботі методика може бути використана для встановлення загальніших (порівняно з викладеними) результатів про міру та розмірність Гаусдорфа множини тих чисел $t_1 \in (0, T]$, які є $(\omega, \delta, \gamma, \xi)_\psi$−нормальними межами для рівняння (1).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Берник В.И., Мельничук Ю.В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. — 144 с.

2. *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 4. — С. 92—101.

3. *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 125-річчю від дня народження Ганса Гана. — Чернівці. — 27 червня — 3 липня 2004 р. — С.73—74.

4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. — М.: Наука, 1978. — Ч.1. — 391 с. — Ч.2.— 432 с.

5. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К.: Наук. думка, 2002. — 416 с.

6. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2-х т. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953. — Т.1. — 346 с.

7. *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. — 2002. — Вип.7. — С.96—107.

8. *Фаддеєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. — К.: Вища школа, 1971. — 316 с.

9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: в 4-х т. — М.: Мир, 1986. — Т.2. — 456 с.

11. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, 1978. — 112 с.

12. *Штабалюк П.И.* Почти–периодические решения задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // В сб.: Материалы IX-ой конференции молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР, ч.II. — Львов, 1982. — С.175—182 (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.01.1984 г., № 324-84 Деп.)

13. *Штабалюк П.И.* Почти–периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов // Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. — Львов. — 1984. — 146 с.

Надійшла до редколегії 11.12.2004