УДК 517.51

©2004 р. О.В. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ТОПОЛОГІЧНІ ІГРИ ТИПУ ШОКЕ

В цій замітці ми розглядаємо загальну топологічну гру типу Шоке, частковими випадками якої є ігри Шоке, Сан-Ремо, Талаґрана та ін. Ми встановлюємо одну необхідну умову еквівалентності введених ігор а також з'ясовуємо мультиплікативні властивості сприятливих і несприятливих для ігор типу Шоке просторів.

In this note we consider general topological games of Choquet type (in particular, the Choquet game, the Saint-Raymond game, Talagrand game etc.). We obtain a necessary condition of equivalence for topological games of Choquet type and prove some multiplicative properties of favorable and unfavorable spaces for games of Choquet type.

1. Вступ

Серед топологічних ігор, які ми будемо розглядати, найпростішою є *гра Шоке* [1], яка є аналогом класичної гри Банаха-Мазура [2]. В цій грі два гравці α і β по черзі ходять відкритими непорожніми підмножинами U_n^α і U_n^β деякого топологічного простору X. Гру починає β ходом U_0^β. Далі ходить α так, щоб $U_1^\alpha \subseteq U_0^\beta$. Потім β бере $U_1^\beta \subseteq U_1^\alpha$. І так далі, гравці ходять по черзі так, щоб $U_n^\beta \subseteq U_n^\alpha \subseteq U_{n-1}^\beta$. Гравець α виграє, якщо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\alpha \neq \emptyset$, інакше виграє β. Якщо гравець α має правило, граючи згідно з яким, він завжди виграє, то кажуть, що *α має виграшну стратегію у грі Шоке*, а простір X при цьому називається *α-сприятливим.* Якщо ж α не має виграшної стратегії у грі Шоке, то кажуть, що простір X є *α-несприятливим.* Аналогічно вводиться поняття *β-(не-)сприятливого* простору. Властивість простору бути α-, β-(не-)сприятливим позначатимемо відповідно α^+, β^+ (α^-, β^-). Зрозуміло, що $\alpha^+ \Rightarrow \beta^-$ і $\beta^+ \Rightarrow \alpha^-$. Крім того, як відомо [3], β-несприятливість рівносильна беровості.

Р.Христенсен [4] розглядав дві інші топологічні гри, які він назвав *τ-грою* і *σ-грою.* У τ-грі (σ-грі) гравець α грає парами (U_n^α, x_n), де U_n^α – відкритий окіл x_n, а β, як і раніше, відкритими непорожніми множинами U_n^β. Правила гри ті ж самі, тобто $U_n^\beta \subseteq U_n^\alpha \subseteq U_{n-1}^\beta$. Але гравець α виграє, якщо кожна піднапрямленість (підпослідовність) (x_{n_m}) послідовності (x_n) має граничну точку в перетині $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\alpha$. Інакше виграє β. Сан-Ремо [3] розглядав гру дуже подібну до σ-гри Христенсена. Відмінність полягає в тому, що x_n не обов'язково належать до U_n^α, а гравець α виграє, якщо $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\alpha \neq \emptyset$. Цю гру ми називатимемо *s-грою Сан-Ремо.* У *k-грі Талаґрана* [5] гравець α грає парами (U_n^α, K_n), де K_n – компактні підмножини X, а умова виграшу α виглядає так: $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\alpha \neq \emptyset$. Так само, як і раніше, вводиться поняття *виграшної стратегії* у відповідних іграх і класи *α-σ-, α-τ-, α-s-, α-k-(не-)сприятливих* і *β-σ-, β-τ-, β-s-, β-k-(не-)сприятливих* просторів. Відповідні властивості позначатимемо $\alpha\sigma^+$, $\alpha\sigma^-$, $\beta\sigma^+$, $\beta\sigma^-$; $\alpha\tau^+$, $\alpha\tau^-$, $\beta\tau^+$, $\beta\tau^-$; αs^+, αs^-, βs^+, βs^-; αk^+, αk^-, βk^+, βk^-.

Зрозуміло, що із α-сприятливості для відповідної гри випливає β-несприятливість для неї. Крім того, $\alpha\tau^+ \Rightarrow \alpha\sigma^+ \Rightarrow \alpha s^+ \Rightarrow \alpha k^+$ і $\beta\tau^- \Rightarrow \beta\sigma^- \Rightarrow \beta s^- \Rightarrow \beta k^-$. В [4] доведено, що з повноти за Чехом випливає $\alpha\tau^+$, а з зліченної повноти за Чехом – $\alpha\sigma^+$.

Ігри Шоке, Сан-Ремо і Талаґрана вкладаються в наступну схему.

Означення 1.1. Нехай X – топологічний простір і p – властивість його підмножин. Множини з властивістю p називатимемо *p-множинами.* Розглянемо гру двох гравців α і β, в якій α грає парами (U_n^α, P_n), де U_n^α – відкрита непорожня множина, а P_n – p-множина, а β – відкритими непорожніми множинами U_n^β. Гру починає β ходом U_0^β. Далі гравці ходять по черзі так, щоб $U_n^\beta \subseteq U_n^\alpha \subseteq U_{n-1}^\beta$. Гравець α виграє, якщо $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^\alpha \neq \emptyset$. Інакше виграє β. Цю гру будемо називати *p-грою.* Як і раніше вводиться поняття *виграшної стратегії* і класи *α-p-* та *β-p-(не-)сприятливих* просторів. Відповідні властивості просторів позначатимемо αp^+, αp^-, βp^+, βp^-.

Якщо за p брати властивість s бути одноточковою множиною чи k бути компактною множиною, то ми одержимо відповідно s-гру Сан-Ремо і k-гру Талаґрана.

2. Порівняння топологічних ігор типу Шоке та їх еквівалентність

Означення 2.1. Нехай γ_1 і γ_2 – якісь із введених раніше топологічних ігор. Гра γ_1 називається *сильнішою* за γ_2 (чи γ_2 *слабшою* за γ_1), якщо $\alpha\gamma_1^+ \Rightarrow \alpha\gamma_2^+$ і $\beta\gamma_1^- \Rightarrow \beta\gamma_2^-$. Ігри γ_1 і γ_2 називаються *еквівалентними*, якщо γ_1 сильніша за γ_2 і γ_2 сильніша за γ_1, тобто, якщо $\alpha\gamma_1^+ \Leftrightarrow \alpha\gamma_2^+$ і $\beta\gamma_1^+ \Leftrightarrow \beta\gamma_2^+$.

Зараз ми з'ясуємо певні умови та властивості p і q, при яких p-гра сильніша за q-гру. Зокрема, ми одержимо певні умови еквівалентності p-гри і q-гри.

Означення 2.2. Нехай p і q – властивості підмножин топологічного простору X. Казатимемо, що p *$\overline{\sigma}$-накриває* q, якщо для довільної q-множини $Q \subseteq X$ існує послідовність p-множин $P_n \subseteq X$, така, що $Q \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n}$.

Теорема 2.3. *Нехай p і q – властивості підмножини топологічного простору X. Тоді, якщо p $\overline{\sigma}$-накриває q, то p-гра слабша за q-гру на просторі X.*

Доведення. Зафіксуємо деяку бієкцію $\nu(n) = (\nu_1(n), \nu_2(n))$ з $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$, причому таку, що $\nu_i(n) \leq n$ для $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Далі, оскільки p $\overline{\sigma}$-накриває q, то для довільної q-множини Q існує послідовність p-множин $P_n(Q)$ така, що $Q \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(Q)}$. Доведемо тепер, що p-гра слабша за q-гру.

З'ясуємо спочатку, що $\alpha q^+ \Rightarrow \alpha p^+$. Нехай α має виграшну стратегію у q-грі. Побудуємо виграшну стратегію для α у p грі. Припустимо, що U_0^β – початковий хід β у p-грі. Нехай (U_1^α, Q_1) – відповідь α у q-грі на хід U_0^β згідно своєї виграшної стратегії. Покладемо $P_1 = P_{\nu_1(1)}(Q_{\nu_2(1)})$, враховуючи, що $\nu_1(1) = \nu_2(1) = 1$. Нехай U_1^β довільна відповідь у p-грі на хід α (U_1^α, P_1). Гравець α у q-грі має відповідь (U_2^α, Q_2) на хід U_1^β згідно виграшної стратегії. Покладемо $P_2 = P_{\nu_1(2)}(Q_{\nu_2(2)})$ і відповіддю α у p-грі назвемо (U_2^α, P_2). Далі, нехай на n-му кроці β у p-грі походив U_{n-1}^β. На цей хід α має відповідь (U_n^α, Q_n) у q-грі згідно виграшної стратегії. Нехай α у p-грі відповідає (U_n^α, P_n), де $P_n = P_{\nu_1(n)}(Q_{\nu_2(n)})$. Таким чином, визначена стратегія для α у p-грі. Доведемо, що вона виграшна. По-перше, оскільки у відповідній партії (U_n^α, Q_n), U_n^β у q-грі α грав згідно своєї виграшної стратегії, то

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^\alpha \neq \emptyset.$$

Але

$$Q_n \subseteq \overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m(Q_n)},$$

тому

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subseteq \overline{\bigcup_{m,n=1}^{\infty} P_m(Q_n)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_{\nu_1(n)}(Q_{\nu_2(n)})},$$

адже ν – бієкція. Значить,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{\alpha} \neq \emptyset$$

і у p-грі α завжди виграє. Таким чином, α має виграшну стратегію у p-грі.

Доведемо тепер, що $\beta p^+ \Rightarrow \beta q^+$. Нехай β має виграшну стратегію у p-грі. Побудуємо виграшну стратегію для β у q-грі. По-перше, початковий хід β у q-грі визначимо як початковий хід β у p-грі згідно своєї виграшної стратегії. Нехай уже зроблені ходи (U_k^{α}, Q_k), U_{k-1}^{β}, $k \leq n$. Візьмемо за U_n^{β} відповідь β у p-грі згідно своєї виграшної стратегії на ходи (U_k^{α}, P_k), U_{k-1}^{β}, $k \leq n$, де $P_k = P_{\nu_1(k)}(Q_{\nu_2(k)})$. Перевіримо, що визначена стратегія для β у q-грі виграшна. Оскільки у партії (U_n^{α}, P_n), U_n^{β} у p-грі β грав згідно своєї виграшної стратегії, то

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{\alpha} = \emptyset.$$

Але, як і раніше,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n}.$$

Тому і

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^{\alpha} = \emptyset,$$

тобто β виграє у q-грі. Таким чином, β має виграшну стратегію у q-грі.

3. Мультиплікативні властивості сприятливих і несприятливих просторів

Приступимо до вивчення мультиплікативних властивостей просторів, пов'язаних із введеними іграми.

Означення 3.1. Нехай $X = \prod_{s\in S} X_s$ і p_s – властивість підмножини X_s, $s \in S$. *Добутком* властивостей p_s називається властивість $p = \prod_{s\in S} p_s$, яка полягає в тому, що множина $P \subseteq X$ подається у вигляді добутку $\prod_{s\in S} P_s$ p_s-множин $P_s \subseteq X_s$. У випадку $S = \{1, 2\}$ писатимемо $p = p_1 \times p_2$.

Теорема 3.2. *Нехай $X = \prod_{s\in S} X_s$ і p_s – властивість підмножин топологічного простору X_s, $s \in S$ і $p = \prod_{s\in S} p_s$ – їх добуток. Тоді:*

(i) якщо всі X_s є α-p_s-сприятливими, то X є α-p-сприятливим;

(ii) якщо один із X_s є β-p_s-несприятливим, а решта α-p_s-сприятливі, X є β-p-несприятливий.

Доведення. Перш за все зауважимо, що внаслідок теореми 2.3., замість властивості p можна розглядати q, яка полягає в тому, що множина $Q \subseteq X$ подається у вигляді скінченного об'єднання p-множин, адже p-гра еквівалентна q-грі. Далі, для довільної відкритої в X множини $U \neq \emptyset$ через $U_s(U)$ позначимо такі відкриті в X_s непорожні множини, що $\prod_{s\in S} U_s(U) \subseteq U$ і множина

$$E(U) = \{s \in S : U_s(U) \neq X\}$$

скінченна.

(i) Нехай X_s – α-p_s-сприятливі. Доведемо, що X – α-q-сприятливий. Зафіксуємо деяку непорожню p_s-множину $P_s \subseteq X_s$. Визначимо виграшну для α стратегію у q-грі. Нехай U_{n-1}^{β} – $(n-1)$-й хід β у q-грі. Візьмемо $U_{n-1,s}^{\beta} = U_s(U_{n-1}^{\beta})$, $s \in S$ і $E_n = E(U_{n-1}^{\beta})$. Покладемо $U_{n,s}^{\alpha} = X_s$ і $P_{n,s} = P_s$, якщо $s \notin E_n$. Якщо ж $s \in E_n$, то через $(U_{n,s}^{\alpha}, P_{n,s})$ позначимо відповідь α згідно своєї виграшної стратегії на хід $U_{n-1,s}^{\beta}$ гравця β у p_s-грі, причому $P_{n,s} \neq \emptyset$. За відповідь α у q-грі візьмемо (U_n^{α}, Q_n), де $U_n^{\alpha} = \prod_{s\in S} U_{n,s}^{\alpha}$ і $Q_n = \prod_{s\in S}(\bigcup_{k=1}^{n} P_{k,s})$. Оскільки $P_{k,s} = P_s$ і $U_{n,s}^{\alpha} = X_s$, якщо $s \notin E_n$, то U_n^{α} – відкрита непорожня множина і Q_n – q-множина. Доведемо, що описана стратегія виграшна. Оскільки в кожній партії $(U_{n,s}^{\alpha}, P_{n,s})$, $U_{n,s}^{\beta}$ гравець α виграє, то для

$Q_s = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_{n,s}$ матимемо, що

$$\overline{Q_s} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n,s} \neq \emptyset.$$

Але за побудовою

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} = \overline{\prod_{s\in S} Q_s} = \prod_{s\in S} \overline{Q_s}$$

і

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n} = \prod_{s\in S} \bigcap_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n,s}.$$

Тоді

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n} \neq \emptyset.$$

Таким чином, щойно побудована стратегія у q-грі є виграшна для α.

(ii) Внаслідок (i) досить розглянути випадок $S = \{1, 2\}$. Припустимо, що X є β-q-сприятливим, а X_1 є α-p_2-сприятливим. Доведемо, що тоді X_1 є β-p_1-сприятливим, і цим самим прийдемо до суперечності. Нехай U^{β}_0 – початковий хід β у q-грі згідно своєї виграшної стратегії. Покладемо $U^{\beta}_{01} = U_1(U^{\beta}_0)$ і $U^{\beta}_{02} = U_2(U^{\beta}_0)$. Нехай $(U^{\alpha}_{11}, P_{11})$ довільна відповідь α у p_1-грі, а $(U^{\alpha}_{12}, P_{12})$ – відповідь α у p_2-грі згідно своєї виграшної стратегії. Покладемо $U^{\alpha}_1 = U^{\alpha}_{11} \times U^{\alpha}_{12}$ і $Q_1 = P_{11} \times P_{12}$. Нехай U^{β}_1 – відповідь β на хід (U^{α}_1, Q_1) у q-грі згідно своєї виграшної стратегії. Покладемо знову $U^{\beta}_{1i} = U_i(U^{\beta}_1)$. Нехай $(U^{\alpha}_{21}, P_{21})$ довільна відповідь α у p_1-грі на хід U^{β}_{11}, а $(U^{\alpha}_{22}, P_{22})$ – відповідь α у p_2-грі на хід U^{β}_{12} згідно виграшної стратегії. Покладемо $U^{\alpha}_2 = U^{\alpha}_{21} \times U^{\alpha}_{22}$ і $Q_2 = (P_{11} \cup P_{21}) \times (P_{12} \cup P_{22})$. Продовжуючи побудову аналогічним чином, на n-му кроці матимемо, що U^{β}_n – хід β у q-грі згідно виграшної стратегії, $U^{\beta}_{ni} = U_i(U^{\beta}_n)$, $(U^{\alpha}_{n1}, P_{n1})$ – довільний хід α у p_1-грі, а $(U^{\alpha}_{n2}, P_{n2})$ – хід α у p_2-грі згідно виграшної стратегії, $U^{\alpha}_n = U^{\alpha}_{n1} \times U^{\alpha}_{n2}$ і $Q_n = (\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_{k1}) \times (\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_{k2})$. Таким чином ми описали стратегію для β у p_1-грі, граючи згідно якої, він матиме, що $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_n = \left(\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_{n1}} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n1}\right) \times \left(\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_{n2}} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n2}\right)$. Але у відповідній q-грі β грає згідно своєї виграшної стратегії. Тому написаний вище добуток порожній. Крім того, оскільки у p_2-грі α грає згідно виграшної стратегії, то другий співмножник $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_{n2}} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n2}$ непорожній. Отже, $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_{n1}} \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U^{\alpha}_{n1} = \emptyset$. Значить, описана стратегія у p_1-грі є виграшною для β.

Наслідок 3.3. *Нехай X – добуток топологічних просторів X_t, $t \in T$. Тоді:*

(i) якщо всі X_t, $t \in T$ є α-s-сприятливими (α-k-сприятливими), то X є таким же;

(ii) якщо ж один із X_t, $t \in T$ – β-s-несприятливий (β-k-несприятливим), а решта – α-s-сприятливі (α-k-сприятливі), то X – β-s-несприятливий (β-k-несприятливий).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Choquet G.* Lectures on analusis. Vol. I. — New York-Amsterdam: Benjamin, 1969.
2. *Oxtoby J.C.* The Banach-Mazur game and Banach category theorem// Contributions to the theory of games, vol. III. Ann. of Math. Studies, N39. — Prinston, 1957. — P.159—163.
3. *Saint-Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc. — 1984. — **87,** N 4. — P.409—504.
4. *Christensen J.P.R.* Joint continuity of separateli cntinuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1981. — **82**, N 3. — P.455—461.
5. *Talagrand M.* Espaces de Baire et espaces de Namioka //Math. Ann. — 1985. — **270,** N 2. — P.159—164.

Надійшла до редколегії 13.12.2004