УДК 517.51

©2004 р. Н. Мазуренко

Прикарпатський педагогічний університет ім. В.Стефаника, м.Івано-Франківськ

ТОПОЛОГІЯ ГІПЕРПРОСТОРІВ КОНТИНУУМІВ ЗАДАНОГО ВИМІРУ ГАУСДОРФА В СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ КУБІ

Доведено, що для довільної послідовності (α_i), $1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < n$, послідовність гіперпросторів континуумів в $\mathbb{I}^n$, вимір Гаусдорфа яких $> \alpha_i$, утворює $\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючу послідовність в $\exp^c(\mathbb{I}^n)$.

It is proved that the sequence of continuum hyperspaces in $\mathbb{I}^n$ with Hausdorff dimension $> \alpha_i$ constructs $\mathcal{F}_\sigma$-absorbing sequence in $\exp^c(\mathbb{I}^n)$ for arbitrary sequence $(\alpha_i) 1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < n$.

Вступ

Різними авторами розглядалися гіперпростори компактів (континуумів) заданого виміру Лебега (див., наприклад, [3,4,5,8]). Зокрема, в [8] доведено, що система множин $(\dim_{\geq k}(Q))_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ гомеоморфна системі множин $(B(Q)^k \times Q \times Q \ldots)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$; тут Q означає гільбертів куб, $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty}[-1,1]_i$, $B(Q) = Q\backslash \prod\limits_{i=1}^{\infty}(-1,1)_i$ – псевдомежу в Q, а $\dim_{\geq k}(Q)$ – сім'я множин в Q виміру Лебега $\geq k$; вона розглядається як підпростір в гіперпросторі $\exp(Q)$ (означення див. нижче).

Автор [6] довів аналогічні результати для системи гіперпросторів компактів заданого виміру Гаусдорфа в скінченновимірному кубі. В цій статті розглядається гіперпростір підконтинуумів заданого виміру Гаусдорфа. Основним результатом є теорема 1, яка дає опис топології системи $(D^c_{>\alpha_i}(\mathbb{I}^n))_{i=1}^{\infty}$, де $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k < \ldots < n$; тут $D^c_{>\alpha}(\mathbb{I}^n)$ – сім'я підконтинуумів в $\mathbb{I}^n$ виміру Гаусдорфа $> \alpha$.

Позначення і попередні відомості

Типову метрику позначаємо d. Діаметр підмножини A в метричному просторі позначаємо $\mathrm{diam}(A)$. Для довільного покриття $\mathcal{U}$ метричного простору означимо $\mathrm{mesh}(\mathcal{U})$ як $\sup\{\mathrm{diam}(U) | U \in \mathcal{U}\}$. Для $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ множина $O_\varepsilon(x) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$ є *відкритою ε-кулею* з центром в x.

Через Q ми позначаємо гільбертів куб, $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty}[-1,1]_i$. Клас абсолютних околових ретрактів позначаємо ANR. Замкнену підмножину A в $X \in ANR$ називаємо *Z-множиною* в X, якщо для довільного неперервного відображення $\varepsilon\colon X \longrightarrow (0,\infty)$ існує неперервне відображення $f\colon X \longrightarrow X\backslash A$, ε-близьке до тотожнього в сенсі, що $d(x, f(x)) < \varepsilon(x)$, для кожного $x \in X$. Вкладення $g\colon Y \longrightarrow X$ називаємо *Z-вкладенням* якщо його образ $g(Y)$ є Z-множиною в X. Через $B(Q)$ ми позначаємо *псевдомежу* Q, $B(Q) = Q\backslash \prod\limits_{i=1}^{\infty}(-1,1)_i$.

Гіперпростори

Нехай X – метричний простір. Гіперпростором X називаємо простір $\exp X$ непорожніх компактних підмножин в X з топологією Вієторіса. Базу цієї топології складають множини вигляду

$$\langle V_1, ..., V_n\rangle = \{A \in \exp X | A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

і для кожного $i \in \{1,2,...,n\}$ $A \cap V_i \neq \emptyset\}$, де $V_1, ..., V_n$ пробігають сім'ю відкритих в X множин. Топологія Вієторіса породжується метрикою Гаусдорфа d_H,

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$, позначаємо $\exp_n X$ підпростір в $\exp X$, що складається з множин, потужність яких не перевищує n. Нехай $\exp_\omega X = \cup\{\exp_n X | n \in \mathbb{N}\}$.

Через $\exp^c(X)$ позначаємо підпростір в $\exp X$, що складається з усіх непорожніх підконтинуумів в X.

Для $\alpha \in [1, n)$ позначаємо $D^c_{>\alpha}(X) = \{A \in \exp^c(X) | \dim_H(A) > \alpha\}$.

Вимір Гаусдорфа

Нехай F підмножина в $\mathbb{R}^n$ для деякого n і s – невід'ємне число. Для $\varepsilon > 0$ позначимо

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(F) = \inf_{\mathcal{B}} \sum_{B \in \mathcal{B}} (\mathrm{diam} B)^s,$$

де інфінум береться по всіх покриттях $\mathcal{B}$ множини F для яких $\mathrm{mesh}(\mathcal{B}) < \varepsilon$.

Нехай $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(F)$. Існує єдине число s_0, *вимір Гаусдорфа* множини F, таке що $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ якщо $0 \le s < s_0$ і $\mathcal{H}^s(F) = 0$ якщо $s_0 < s < \infty$(див.[1]). Позначаємо, $\dim_H(F) = s_0$. Множину F в $\mathbb{R}^n$ називаємо *s-множиною* ($0 \le s \le n$), якщо $\dim_H(F) = s$.

Поглинаючі системи

Нагадаємо коротко деякі означення з теорії поглинаючих систем; детальніше див. [2,4,8].

Нехай Γ впорядкована множина і для $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{M}_\gamma$ – клас метричних просторів. Позначимо $\mathcal{M}_\Gamma = (\mathcal{M}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. *$\mathcal{M}_\Gamma$-системою* в просторі X називається зберігаючий порядок індексів набір $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ підмножин в X такий, що $A_\gamma \in \mathcal{M}_\gamma$ для кожного γ.

$\mathcal{M}_\Gamma$-система $\mathcal{X}$ в $X \in ANR$ називається *сильно $\mathcal{M}_\Gamma$-універсальною* в X якщо для кожної $\mathcal{M}_\Gamma$-системи (A_γ) в Q, кожне відображення $f\colon Q \longrightarrow X$, що є Z-вкладенням на деякому компакті K в Q можна наблизити Z-вкладенням $g\colon Q \longrightarrow X$ так, що $g|K = f|K$ і для кожного $\gamma \in \Gamma$ маємо $g^{-1}(X_\gamma) \backslash K = A_\gamma \backslash K$.

$\mathcal{M}_\Gamma$-система $\mathcal{X}$ називається *$\mathcal{M}_\Gamma$-поглинаючою* системою в X якщо множина $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ міститься в σ-компактній σ-Z-множині в X і $\mathcal{X}$ є сильно $\mathcal{M}_\Gamma$-універсальною в X.

Через $\mathcal{F}_\sigma$ позначаємо клас σ-компактних просторів.

Основний результат

Твердження. $\bigcup_{k=1}^{\infty} D^c_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *де* A_i – *Z-множина в* $\exp^c(\mathbb{I}^n)$ *для кожного* $i \in \mathbb{N}$ *і* $1 \le \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k < \ldots < n$.

Доведення. Досить показати, що множина $D^c_{>1}(\mathbb{I}^n)$ є σZ-множиною в просторі $\exp^c(\mathbb{I}^n)$. Оскільки $D^c_{>1}(\mathbb{I}^n)$ є $\mathcal{F}_\sigma$-множиною (див.[6]), то можемо записати $D^c_{>1}(\mathbb{I}^n) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, де K_i – компактна підмножина простору $\exp^c(\mathbb{I}^n)$ і $K_i \subset D^c_{>1}(\mathbb{I}^n)$ для кожного $i \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо довільні $\varepsilon > 0$ і неперервне відображення $f\colon Q \to \exp^c(\mathbb{I}^n)$. Нехай H і l – відображення, означені в доведенні теореми 1. Позначимо $F(x) = H(f(x), \varepsilon/4)$ і для кожного $x \in Q$ означимо відображення $h\colon Q \to \exp^c(\mathbb{I}^n)$ формулою

$$h(x) = \bigcup_{y,z \in F(x)} l(y, z, \varepsilon/2).$$

Коректність визначення і неперервність відображення h доводиться аналогічно, як в доведенні теореми 1. Легко переконатися, що $\hat{d}(f, h) < \varepsilon$. Оскільки, за побудовою, для кожного $x \in Q$, множина $h(x)$ є скінченним об'єднанням відрізків в $\mathbb{I}^n$, то, за властивостями виміру Гаусдорфа, $\dim_H(h(x)) = 1$, тобто, для кожного $i \in \mathbb{N}$, $h[Q] \subseteq \exp^c(\mathbb{I}^n)\underline{D}^c_{>1}(\mathbb{I}^n) \subset \exp^c(\mathbb{I}^n)\underline{K}_i$. Отже, для кожного $i \in \mathbb{N}$, множина K_i є Z-множиною в просторі $\exp^c(\mathbb{I}^n)$, що доводить твердження.$\square$

Теорема 1. *Якщо* $n \ge 2$ *і* $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– зліченна впорядкована множина, де* $1 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_k < \ldots < n$, *то послідовність* $\{D^c_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n)\}_{k=1}^{\infty}$ *є сильно $\mathcal{F}_\sigma$-універсальною в* $\exp^c(\mathbb{I}^n)$.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Без зменшення загальності припустимо, що $\varepsilon < 1$. Виберемо спадну послідовність σ-компактних підмножин $\{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ в Q і для кожного $m \geq 1$ нехай $\mathcal{A}_m = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A_m^p$, де A_m^p – компактні підмножини в Q. Нехай $f : Q \longrightarrow \exp^c(\mathbb{I}^n)$ – відображення, що є Z-вкладенням на деякій компактній підмножині K в Q. Означимо $\mu : Q \longrightarrow [0, \frac{1}{3}\varepsilon]$ наступним чином:

$$\mu(x) = \frac{1}{3} \cdot \min\{\varepsilon, d_H(f(x), f[K])\}.$$

Оскільки множина $\exp(\mathbb{I}^n) \setminus \exp_\omega(\mathbb{I}^n)$ є локально гомотопійно знехтуваною в $\exp(\mathbb{I}^n)$ (див. [2]), то існує гомотопія $H : \exp(\mathbb{I}^n) \times \mathbb{I} \longrightarrow \exp(\mathbb{I}^n)$ така, що:

(1) $H_0 = 1_{\exp(\mathbb{I}^n)}$;

(2) для кожного $t \in (0,1]$, $H_t(\exp(\mathbb{I}^n)) \subseteq \exp_\omega(\mathbb{I}^n)$.

Очевидно, додатково можемо припустити, що

(3) для кожного $t \in [0,1]$, $\hat{d}_H(H_t, 1_{\exp(\mathbb{I}^n)}) \leq 2t$;

(4) для кожного $t \in (0,1]$, $H_t(\exp(\mathbb{I}^n)) \subseteq \exp_\omega([\frac{t}{2}, 1 - \frac{3t}{4}]^n)$.

Для кожного $x \in Q$, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ означимо $\hat{x} \in Q$ наступним чином:

$$\hat{x} = (\underbrace{x_1}, \underbrace{x_1, x_2}, \underbrace{x_1, x_2, x_3}, \underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4}, \ldots).$$

Означимо $R : Q \longrightarrow \exp^c(\mathbb{R}^2)$ формулою

$$R(x) = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{1 - \frac{1}{2^n}\right\} \times$$

$$\times \begin{cases} \left[0, \frac{\hat{x}_n}{2^n}\right], & \hat{x}_n \geq 0; \\ \left[\frac{\hat{x}_n}{2^n}, 0\right], & \hat{x}_n \leq 0. \end{cases}$$

Для всіх $x, y \in \mathbb{I}^n$ позначимо $\overline{xy}$ – відрізок в $\mathbb{I}^n$, що з'єднує x і y. Крім того, для $x, y \in \mathbb{I}^n$ і $r \in [0, \infty)$ нехай

$$l(x,y,r) = \{p \in \overline{xy} | d(p, \{x,y\}) \leq r\}.$$

Для кожного $x \in Q$ нехай $F(x) = H(f(x), \mu(x))$. Тоді, якщо $\mu(x) > 0$, $F(x)$ є скінченним наближенням континууму $f(x)$.

Лема. *Якщо $n \geq 2$ то для кожного $\gamma \in [1,n]$ існує γ-множина C_γ в $\exp^c(\mathbb{I}^n)$.*

Доведення леми. Спочатку доведемо, що для $n = 2$ і $\gamma \in [1,2)$ існує γ-множина в $\exp^c(\mathbb{I}^2)$. Розглянемо площину $\mathbb{R}^2$, яку ототожнюємо з комплексною площиною $\mathcal{C}$ і наділяємо евклідовою метрикою. За аналогією до побудови кривої Коха (див. [1]), розглянемо множину чотирьох стискуючих відображень подібності площини $\mathcal{C}$ в себе, що залежать від $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, які означимо наступним чином

$$\begin{aligned} f_{a1}(z) &= z_0 + a \cdot (z - z_0); \\ f_{a2}(z) &= z_0 + a \cdot e^{i\varphi}(z - z_0) + a; \\ f_{a3}(z) &= z_1 + a \cdot e^{-i\varphi}(z - z_1) - a; \\ f_{a4}(z) &= z_1 + a \cdot (z - z_1), \end{aligned}$$

де $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ і $\varphi = \arccos(\frac{1}{2a} - 1)$.

Через $\Phi_a \subset \mathbb{I}^2$ позначимо інваріантну множину для ітерованої системи відображень
$\{f_{a1}, f_{a2}, f_{a3}, f_{a4}\}$ (див.[1]). Легко бачити, що для кожного s маємо $\mathcal{H}^s((f_a)_i(\Phi_a) \cap (f_a)_j(\Phi_a)) = 0$ для $i \neq j$, тому для $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, Φ_a – само-подібна множина (див. [1]). Таким чином, ми можемо стверджувати, що вимір Гаусдорфа співпадає з similarly dimension множини Φ_a (див. [1]). Тому, $\dim_H(\Phi_a) = \gamma$, де γ – єдине додатнє число для якого $4 \cdot a^\gamma = 1$. Очевидно, що якщо a неперервно зростає від $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$ то γ неперервно зростає від 1 до 2.

Якщо $E \subset \mathbb{R}^m$ – s-множина, то $E \times \mathbb{I}$ – $(s+1)$-множина в $\mathbb{R}^{m+1}$ (див. [1]). Таким чином, для кожного $\gamma \in [1,n]$ існує γ-множина C_γ в $\exp^c(\mathbb{I}^n)$, яка може бути побудована наступним чином

$$C_\gamma = \begin{cases} \Phi_a \times \mathbb{I}^{[\gamma]-1}, & \text{де } 4 \cdot a^{\gamma - [\gamma]+1} = 1 \text{ і } \gamma \notin \mathbb{N}; \\ \Phi_a \times \mathbb{I}^{\gamma - 1}, & \text{де } a = \frac{1}{4} \text{ і } \gamma \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Легко бачити, що для кожного $\gamma \in [1,n]$, $C_\gamma \in \exp^c(\mathbb{I}^n)$. Лему доведено. □

Запишемо $\mathbb{N}$ як диз'юнктне об'єднання нескінченної кількості нескінченних множин, нехай, $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \ldots$. За лемою 1 для кожного $\gamma \in [1,n]$ існує γ-множина в

$\exp^c(\mathbb{I}^n)$, нехай C_γ. Зауважимо, що для кожного $\gamma \in [1,n]$, за побудовою C_γ, $(0,0,...,0),(1,0,...,0) \in C_\gamma$. Для $p \geq 1$ і $i \in \mathbb{N}_p$, нехай $S_i = C_{\gamma_{p+1}}$ – γ_{p+1}-множина в $\exp^c(\mathbb{I}^n)$.

Означимо для кожного $i \in \mathbb{N}$ неперервну функцію $\varphi_i : \mathbb{I} \longrightarrow \exp(\mathbb{I}^n)$ за формулою

$$\varphi_i(t) = H_t(S_i) \cup \{(0,0,...,0),(1,0,...,0)\}.$$

Тоді $\varphi_i(0) = S_i$ і $\varphi_i((0,1]) \subseteq \exp_\omega(\mathbb{I}^n)$.

Нехай $i(m,p)$ – p-ий елемент $\mathbb{N}_m$.

Для всіх $m,p \in \mathbb{N}$ і $x \in Q$ нехай

$$T_{i(m,p)}(x) = $$
$$= \begin{cases} \varphi_{i(m,p)}(d_Q(x,A_m^p)), \\ \qquad \text{якщо } d_Q(x,A_m^p) = 0; \\ \bigcup\limits_{a,b \in \varphi_{i(m,p)}(d_Q(x,A_m^p))} l(a,b,2d_Q(x,A_m^p)), \\ \qquad \text{якщо } d_Q(x,A_m^p) > 0. \end{cases}$$

Розглянемо послідовність компактних підмножин $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ в $\mathbb{I}^n$, що збігається до точки $(1,0,...,0)$, означену наступним чином:

$$B_1 = \tfrac{1}{2}\mathbb{I}^n;$$
$$B_2 = \tfrac{1}{2^2}\mathbb{I}^n + \tfrac{1}{2}y_0;$$
$$\cdots$$
$$B_k = \tfrac{1}{2^k}\mathbb{I}^n + \left(1 - \tfrac{1}{2^{k-1}}\right)y_0;$$
$$\cdots$$

де $y_0 = (1,0,...,0)$.

Нехай $\beta_i : \mathbb{I}^n \longrightarrow B_i$ – гомеоморфізм. Для довільного $\lambda \in (0,1]$ і $y \in \mathbb{I}^n$ нехай $(\beta_i)_y^\lambda = \lambda\beta_i + y + \lambda y_0$, де $y_0 = (1,0,...,0)$.

Тепер означимо шукане відображення $h : Q \longrightarrow \exp^c(\mathbb{I}^n)$ наступним чином:

$$h(x) = \bigcup_{y,z \in F(x)} l(y,z,2\mu(x)) \cup$$
$$\cup \bigcup_{y \in F(x)} \left[y + \frac{\mu(x)}{4}(R(x) \times \{\underbrace{(0,\ldots,0)}_{(n-2)}\}) \right] \cup$$
$$\bigcup_{y \in F(x)} \bigcup_{m=1}^\infty \bigcup_{p=1}^\infty (\beta_{i(m,p)})_y^{\mu(x)/4} \circ T_{i(m,p)}(x) \cup$$
$$\cup \bigcup_{y \in F(x)} \left[y + \frac{\mu(x)}{2}y_0 + \frac{\mu(x)}{4}(R(x) \times \{\underbrace{(0,\ldots,0)}_{(n-2)}\}) \right].$$

Позначимо

$$h_y(x) = \left[y + \frac{\mu(x)}{4}(R(x) \times \{\underbrace{(0,\ldots,0)}_{(n-2)}\}) \right] \cup$$
$$\cup \bigcup_{m=1}^\infty \bigcup_{p=1}^\infty (\beta_{i(m,p)})_y^{\mu(x)/4} \circ T_{i(m,p)}(x) \cup$$
$$\left[y + \frac{\mu(x)}{2}y_0 + \frac{\mu(x)}{4}(R(x) \times \{\underbrace{(0,\ldots,0)}_{(n-2)}\}) \right]$$

Тоді, можемо записати $h(x) = \bigcup\limits_{y,z \in F(x)} l(y,z,2\mu(x)) \cup \bigcup\limits_{y \in F(x)} h_y(x)$

CLAIM 1: Відображення h – означене коректно, неперервне і задовільняє $h|_K = f|_K$. Більше того, для кожного $x \in Q$, $d_H(f(x),h(x)) \leq \frac{11}{12}\min\{\varepsilon, d(f(x),f[K])\}$.

(a) Нехай $x \in Q$. Тоді за (4), $F(x) \subseteq [\mu(x)/2, 1-3\mu(x)/4]^n$, що означає, що $\bigcup\limits_{y,z \in F(x)} l(y,z,2\mu(x)) \subseteq [\mu(x)/2, 1-3\mu(x)/4]^n$ і оскільки діаметр множини $h_y(x)$ не перевищує $3\mu(x)/4$ для кожного $y \in F(x)$, можемо стверджувати, що $h(x) \subseteq \mathbb{I}^n$.

(b) Якщо $\mu(x) > 0$, то $h(x)$ – компактна і непорожня, як скінченне об'єднання компактних непорожніх множин. Якщо $\mu(x) = 0$, то $h(x) = f(x)$, що є також компактною і непорожньою. Отже, для кожного $x \in Q$, $h(x) \in \exp(\mathbb{I}^n)$.

(c) $h(x)$ – зв'язна. Зауважимо, що достатньо показати, що

$$P_1 = \bigcup_{y,z \in F(x)} l(y,z,2\mu(x))$$

і

$$P_2 = \bigcup_{a,b \in \varphi_{i(m,p)}(d_Q(x,A_m^p))} l(a,b,2d_Q(x,A_m^p))$$

зв'язні множини. Припустимо, що P_1 – незв'язна. Тоді, можемо записати P_1 як $U \cup V$, де U і V – диз'юнктні непорожні відкриті підмножини в P_1. Позначимо $F = U \cap F(x)$ і $G = V \cap F(x)$. Тоді обидві F і G – непорожні. Оскільки за (3) маємо $d_H(f(x), F \cup G) \leq 2\mu(x)$, звідси слідує, що $f(x) \subseteq \overline{B}(F, 2\mu(x)) \cup \overline{B}(G, 2\mu(x))$ (де $\overline{B}(A, \delta)$ – замкнений δ-окіл множини A). Із зв'язності $f(x)$ і того факту, що обидві множини F і G – непорожні, слідує що

$$\overline{B}(F, 2\mu(x)) \cap \overline{B}(G, 2\mu(x)) \neq \emptyset.$$

Отже, існують $a \in F$ і $b \in G$ такі, що $d(a, b) \leq 4\mu(x)$. Таким чином, $\frac{1}{2}(a + b)$ належить і множині U і V. Ми отримали протиріччя. Зв'язність множини P_2 для довільних $m, p \in \mathbb{N}$ доводиться аналогічно.

(d) Очевидно, що h – неперервне.

(e) Зафіксуємо $x \in Q$. Очевидно, що $d_H(f(x), h(x)) \leq 2\mu(x) + 3\mu(x)/4 = 11\mu(x)/4$, звідки слідує, що $d_H(f(x), h(x)) \leq \frac{11}{12} \min\{\varepsilon, d_H(f(x), f[K])\}$. Остання нерівність означає, що $h|_K = f|_K$.

CLAIM 2: Відображення h – ін'єктивне.

Зауважимо спочатку, що з Claim 1 і того, що f – вкладення, слідує, що

$$h[Q \backslash K] \cap h[K] = \emptyset. \qquad (*)$$

Зафіксуємо тепер довільні $x, y \in Q$. Якщо обидві точки x і y належать K, то оскільки $h|K = f|K$ і f – вкладення, маємо, що з рівності $h(x) = h(y)$ слідує рівність $x = y$. Якщо $x \notin K$ і $y \in K$, то з $(*)$ слідує, що $h(x) \neq h(y)$. Отже, не зменшуючи загальності, можемо припустити, що $x, y \in Q \backslash K$. Тоді $\mu(x)$ і $\mu(y)$ – додатні.

Нехай $x \neq \mathbf{0}$ і $y \neq \mathbf{0}$. Доведемо спочатку, що $\mu(x) = \mu(y)$. Припустимо протилежне, тобто припустимо, що $\mu(x) < \mu(y)$. Існує точка $m = (m_1, .., m_n) \in h(x)$ така, що $m_1 \leq p_1$ для кожного $p \in h(x)$. Більше того, точка m є елементом $F(x)$ і, очевидно, $F(y)$.

Розглянемо послідовність підмножин $\{l_i\}_{i=1}^{\infty}$ в $\mathbb{I}^n$ таку, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ $l_i = m + \mu(x)/4\left([0,1] \times \left\{\frac{1}{2^i}\right\} \cup [0,1] \times \left\{-\frac{1}{2^i}\right\}\right) \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{(n-2)}\}$. Оскільки $x \neq \mathbf{0}$ і $y \neq \mathbf{0}$, то легко бачити, що для всіх, крім скінченної кількості, $i \in \mathbb{N}$, множини $l_i \cap h(x)$ і $l_i \cap h(y)$ – скінченні. Оскільки $\mu(x) < \mu(y)$ то, за побудовою відображення R, існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що потужність множини $l_i \cap h(y)$ є меншою ніж N для всіх, крім скінченної кількості, $i \in \mathbb{N}$. З іншого боку, потужність множини $l_i \cap h(x)$ – зростає, якщо i зростає. Це означає, що існує $i_0 \in \mathbb{N}$ таке, що потужність множини $l_i \cap h(y)$ є меншою ніж потужність множини $l_i \cap h(x)$, тобто $l_i \cap h(y) \neq l_i \cap h(x)$ для всіх, крім скінченної кількості $i \geq i_0$. Ми отримали протиріччя з $h(x) = h(y)$. Це означає, що $\mu(x) = \mu(y)$.

Тепер розглянемо точку $\hat{m} = (\hat{m}_1, ..., \hat{m}_n)$ таку, що $p_1 \leq \hat{m}_1$ для кожного $p \in h(x)$. Оскільки $\mu(x) = \mu(y)$, то

$$m^* = (\hat{m}_1 - 3\mu(x)/4, \hat{m}_2, ..., \hat{m}_n) \in F(x) \cap F(y).$$

Оскільки $F(x)$ і $F(y)$ – скінченні, $\hat{m}_1$ – максимальна, і відрізок $\left[0, \frac{\hat{x}_n}{2^n}\right]$ має довжину не більшу як $\frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$, то існують окіл U точки $\hat{m}$ і $\xi \in (0,1)$ такі, що

$$U \cap h(x) = m^* + \frac{\mu(x)}{2}(1, 0, ..., 0) +$$

$$+ \frac{\mu(x)}{4}\left(R(x) \cap ([\xi, 1] \times [-\xi, \xi]) \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{(n-2)}\}\right) =$$

$$= m^* + \frac{\mu(y)}{2}(1, 0, ..., 0) +$$

$$+ \frac{\mu(y)}{4}\left(R(y) \cap ([\xi, 1] \times [-\xi, \xi]) \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{(n-2)}\}\right).$$

Оскільки координати x зустрічаються нескінченну кількість раз в координатах $\hat{x}$ (на вказаних місцях), і те ж є справедливим для y, то звідси очевидним чином випливає, що $x = y$.

Тепер припустимо, що $x = \mathbf{0}$. Доведемо, що $y = \mathbf{0}$. Знову розглядаємо точку $\hat{m} \in h(x)$. Нехай $\hat{m}^* = (\hat{m}_1 - \mu(x)/4, \hat{m}_2, ..., \hat{m}_n)$ і $\hat{m}_* = (\hat{m}_1 - \mu(y)/4, \hat{m}_2, ..., \hat{m}_n)$. Оскільки

$F(x)$ і $F(y)$ – скінченні, $\hat{m}_1$ – максимальна і $x = \mathbf{0}$, то існують окіл U точки $\hat{m}$ і $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$ такі, що

$$U \cap h(x) = \hat{m}^* + \frac{\mu(x)}{4}\Bigg(R(x) \cap ([\xi_1, 1] \times$$

$$\times [-\xi_1, \xi_1]) \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{(n-2)}\}\Bigg) =$$

$$= [\hat{m}_1 - \xi_2, \hat{m}_1] \times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{(n-1)}\} =$$

$$= \hat{m}_* + \frac{\mu(y)}{4}\Bigg(R(y) \cap ([\xi_3, 1] \times [-\xi_3, \xi_3]) \times$$

$$\times \{\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{(n-2)}\}\Bigg).$$

Оскільки координати y зустрічаються нескінченну кількість раз в координатах $\hat{y}$, то остання рівність означає, що $y = \mathbf{0}$.

CLAIM 3: Для кожного k маємо: $h^{-1}[D^c_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n)] \backslash K = \mathcal{A}_k \backslash K$.

Виберемо $x \in Q \backslash K$. Якщо $x \in \mathcal{A}_k$ для деякого k, то $x \in A^p_k$ для деякого p, звідси $d_Q(x, A^p_k) = 0$ і $T_{i(k,p)}(x) = S_p$, де, за побудовою, S_p є γ_{k+1}-множиною в $\exp^c(\mathbb{I}^n)$. Це означає, що $h(x)$ містить γ_{k+1}-множину, а тому $\dim_H(h(x)) \geq \gamma_{k+1}$ (див. [1]) і $h(x) \in D^c_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n)$.

З іншого боку, якщо $x \notin \mathcal{A}_k$ (для деякого $k \in \mathbb{N}$), то $d_Q(x, A^p_{k'}) > 0$ для кожного $p \in \mathbb{N}_{k'}$ і $k' \geq k$. Тому для таких k' і p, $T_{i(k',p)}(x)$ є 1-множиною, оскільки вона є скінченним об'єднанням 1-множин. Так як множина $\bigcup\limits_{y,z \in F(x)} l(y, z, 2\mu(x))$ є 1-множиною, як зліченне об'єднання 1-множин і множина $R(x)$ є 1-set, як зліченне об'єднання 1-множин, легко бачити, що $h(x)$ є об'єднанням зліченної кількості 1-множин і зліченної кількості γ-множин, де $\gamma \leq \gamma_k$. Тобто, $h(x) \notin D^c_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n)$.

Таким чином, $h^{-1}[D^c_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n)] \backslash K = \mathcal{A}_k \backslash K$.

CLAIM 4: Відображення h – Z-вкладення.

Оскільки $h[K] = f[K]$ – Z-множина, досить показати, що $h[Y]$ – Z-множина, якщо $Y \subseteq Q \backslash K$ – компакт. Але це очевидно тому, що кожний континуум в $h[Y]$ містить вільну дугу, тобто гомотопія $A \longmapsto B_\delta(A) = \{p \in \mathbb{I}^n | d(p, A) \leq \delta\}$ відображає $\exp^c(\mathbb{I}^n)$ в доповнення до $h[Y]$, для кожного додатнього δ і є δ-близькою до тотожнього відображення.

Це завершує доведення теореми. □

Висновки

З теореми 1 та стандартних результатів теорії поглинаючих систем випливає наслідок, що дає змогу описати топологію системи гіперпросторів континуумів заданого виміру Гаусдорфа.

Наслідок. *Системи* $(D^c_{>\gamma_i}(\mathbb{I}^n))_{i=1}^{\infty}$ *і* $(B(Q)^i \times Q \times Q \times \cdots)_{i=1}^{\infty}$ *– гомеоморфні.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *K.J.Falkoner* The Geometry of Fractal Sets. — Cambridge University Press,1985.
2. *T. Banakh, T. Radul, M. Zarichnyi* Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds. — VNTL Publishers, 1996.
3. *J. Baars, H. Gladdines, J. van Mill* Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds // Topology Appl. — 1993. — Vol. 50. — B2. — P.147–182.
4. *H. Gladdines and J. van Mill* Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds and applications. — Amsterdam, Vrije Universiteit, 1994.
5. *R. Cauty* Suites $\mathcal{F}_\sigma$-absorbantes en theorie de la dimension // Fundamenta Mathematicae. — 1999. — Vol. 159. — B2. P.115—126.
6. *N. Mazurenko* Absorbing sets related to Hausdorff dimension // Вісн. Львів. ун-ту.
7. *М. М. Зарічний* Топологія функторів і монад у категорії компактів. — Київ, ІСДО, 1993.
8. *J. van Mill* . The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces. — Amsterdam: Elsevier, 2001. — Vol.64. — 630 p.

Надійшла до редколегії 3.07.2004