УДК 517.953

©2004 р. В.М. Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці

ПРО ДВОТОЧКОВУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Доведено існування і встановлено оцінки класичного розв'язку у всьому просторі.

The existence of the classical solution and it's estimations are established on the whole space.

У 1938 р. з'явилася фундаментальна робота І.Г. Петровського "Про задачу Коші для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними в області неаналітичних функцій" [5], в якій було почато вивчення деяких важливих класів систем диференціальних рівнянь із частинними похідними. В ній був визначений широкий клас параболічних систем (параболічних за Петровським систем), які є узагальненням рівняння теплопровідності. У 1964 р. вийшла у світ праця С.Д. Ейдельмана [2], в якій вивчено фундаментальні матриці розв'язків параболічних систем, для яких одержані точні оцінки, і їх застосування до вивчення класів коректності задачі Коші.

Нелокальні багатоточкові крайові задачі вивчалися для рівнянь з частинними похідними багатьма авторами. Зокрема, у працях Б.Й. Пташника [1] та його учнів проводилось дослідження нелокальних задач для гіперболічних та безтипних рівнянь в обмежених областях (на торі) у різних функціональних просторах.

У даній роботі розглядається двоточкова крайова задача для параболічних рівнянь вищого порядку по t.

1. У шарі $\Pi = (0,T)\times\mathbb{R}^n$ розглянемо задачу про знаходження розв'язку рівняння

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = \sum_{2bk_0+|k|\le 2bm} A_{k_0k} D_t^{k_0} D_x^k u(t,x) + f(t,x), \quad (1)$$

який задовольняє умови

$$\left.\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j=\overline{1,m}, \quad (2)$$

де A_{k_0k} — сталі або функції від аргумента t, $\varphi_j(x)$, $f(t,x)$ — функції, які апріорі допускають перетворення Фур'є.

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i_0(\sigma,x)} v(t,\sigma)d\sigma, \quad (3)$$

де $v(t,\sigma)$ — розв'язок двоточкової задачі

$$\frac{d^m v}{dt^m} = \sum_{2bk_0+|k|\le 2bm} A_{k_0k}(i_0\sigma)^k D_t^{k_0} v(t,\sigma) + \tilde{f}(t,\sigma), \quad (4)$$

$$\left.\frac{d^{j-1}v}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{d^{j-1}v}{dt^{j-1}}\right|_{t=T} = \tilde{\varphi}_j(\sigma), \quad j=\overline{1,m}, \quad i_0^2=-1. \quad (5)$$

Рівняння (1) будемо називати параболічним, якщо дійсні частини $\lambda_i(\sigma)$ коренів характеристичного рівняння

$$\lambda^m - \sum_{2bk_0+|k|=2bm} A_{k_0k}(i_0\sigma)^k\lambda^{k_0} = 0,$$

задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda_i(\sigma) \le -\delta|\sigma|^{2b}, \quad \delta>0, \quad \sigma\in\mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Нехай $\{K_i(t,\sigma)\}_{i=1}^m$ фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння (4), що задовольняють початкові умови

$$\left.\frac{d^{j-1}K_i(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} = \delta_{i,j}, \quad i,j=\overline{1,m}, \qquad (7)$$

а функція $K(t-\tau,\sigma)$ є функцією Гріна задачі Коші однорідного рівняння (4) і задовольняє умови

$$\left.\frac{d^{j-1}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=\tau} = \delta_{j-1,m-1},$$
$$j=1,m, \qquad (8)$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ 1, & i=j. \end{cases}$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4) набуде вигляду

$$v(t,\sigma) = \sum_{i=1}^m c_i K_i(t,\sigma) + \int\limits_0^t K(t-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau. \qquad (9)$$

Для отримання розв'язку задачі (4), (5) застосуємо до $v(t,\sigma)$ крайові умови (5), після чого будемо мати систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь щодо $c_1,...,c_m$

$$\sum_{i=1}^m c_i\left[\left.\frac{d^{j-1}K_i(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} - \mu\left.\frac{d^{j-1}K_i(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=T}\right] =$$
$$= \tilde{\varphi}_j(\sigma) + \mu\int\limits_0^T \left.\frac{d^{j-1}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=T}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau,$$
$$j=\overline{1,m}. \qquad (10)$$

Знайшовши величини $c_i(T,\sigma)$ з (10), розв'язок задачі (4), (5) можна записати у вигляді

$$v(t,\sigma) = \sum_{i=1}^m \tilde{\varphi}_i(\sigma)\frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)}K_i(t,\sigma) +$$
$$+\mu\int\limits_0^T\sum_{i=1}^m \left.\frac{d^{j-1}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=T} K_i(t,\sigma)\times$$
$$\times\frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)}\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau +$$
$$+\int\limits_0^t K(t-\tau,\sigma)\tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau, \qquad (11)$$

де через $\Delta(\sigma,\mu)$ позначено визначник системи (10), $\Delta_i(\sigma,\mu)$ — алгебраїчні доповнення відповідної матриці.

У праці [2, с.55] для функцій $K_i(t,\sigma)$ та $K(t-\tau,\sigma)$ і їх похідних, за умови параболічності, отримані оцінки при комплексних аргументах $s=\sigma+i_0\gamma$

$$\left|\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}}K_i(t,s)\right| \leq$$
$$\leq c_{1k_0}t^{i-k_0-1}\exp\{(-\delta_1|\sigma|^{2b}+F_1|\gamma|^{2b})t\}, \quad (12)$$
$$\left|\frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}}K(t-\tau,s)\right| \leq$$
$$\leq c_{2k_0}(t-\tau)^{m-k_0-1}\exp\{(-\delta_2|\sigma|^{2b}+$$
$$+F_2|\gamma|^{2b})(t-\tau)\}, \quad i=\overline{1,m},$$
$$\delta_1>0, \quad \delta_2>0. \qquad (13)$$

Підставимо функцію $v(t,\sigma)$ з (11) у формулу (3) і поміняємо порядок інтегрування, отримуємо формально розв'язок задачі (1), (2) у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^m \varphi_i(\xi)G_i^{(1)}(t,x-\xi)d\xi +$$
$$+\mu\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^m G_i^{(2)}(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi +$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \qquad (14)$$

де вжито такі позначення:

$$G_0(t,\tau,x-\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i_0(x-\xi)\sigma}K(t-\tau,\sigma)d\sigma, \qquad (15)$$

функція Гріна задачі Коші,

$$G_i^{(1)}(t,x-\xi) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i_0(x-\xi)\sigma} \frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} K_i(t,\sigma)d\sigma, \quad (16)$$

$$G_i^{(2)}(t,\tau,x-\xi) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i_0(x-\xi)\sigma} \left. \frac{d^{i-1}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{i-1}} \right|_{t=T} \times$$

$$\times \frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} K_i(t,\sigma)d\sigma, \quad i=\overline{1,m}. \quad (17)$$

Будемо вважати, що μ задовольняє обмеження, при яких збігаються інтеграли

$$I_i(t,c,\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ct|\sigma|^{2b}} \left| \frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} \right| d\sigma, \quad i=\overline{1,m}. \quad (A)$$

Оцінимо функції $G_i^{(1)}$ та $G_i^{(2)}$ ($i=\overline{1,m}$). Згідно з (12), для похідних $D_t^{k_0}D_x^kG_i^{(1)}$ маємо

$$|D_t^{k_0}D_x^kG_i^{(1)}(t,x-\xi)| \le c_{k_0k} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\sigma|^{|k|} \left| \frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} \right| \times$$

$$\times t^{m-k_0-1} e^{-\delta_1|\sigma|^{2b}t} d\sigma.$$

Звідси отримуємо нерівність

$$|D_t^{k_0}D_x^kG_i^{(1)}(t,x-\xi)| \le$$

$$\le c_{k_0k} t^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}} I_i(t,\delta_1,\mu). \quad (18)$$

Аналогічно отримуємо згідно з (12) та (13) оцінки для похідних функції $G_i^{(2)}$:

$$|D_t^{k_0}D_x^kG_i^{(2)}(t,\tau,x-\xi)| \le$$

$$\le \tilde{c}_{k_0k}(T+t-\tau)^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}} \times$$

$$\times I_i(T+t-\tau,\delta,\mu), \quad \delta=\min(\delta_1,\delta_2). \quad (19)$$

Запишемо розв'язок (9) та систему (10) у матричному вигляді

$$v(t,\sigma) = \tilde{K}C + K * \tilde{f},$$

$$(E-\mu A)C = \tilde{\varphi} + \tilde{F},$$

де E — одинична матриця,

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_m \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ ... \\ \varphi_m \end{pmatrix},$$

$$A = (K_i^{(j-1)}(T,\sigma))_{i,j=1}^m,$$

$$\tilde{F} = \left(\mu \int\limits_0^T \left. \frac{d^{j-1}K(t-\tau,\sigma)}{dt^{j-1}} \right|_{t=T} \tilde{f}(\tau,\sigma)d\tau \right)_{j=1}^m.$$

Припустимо, що існує обернена матриця $(E-\mu A)^{-1}$, тоді знаходимо

$$C = (E-\mu A)^{-1}\tilde{\varphi} + (E-\mu A)^{-1}\tilde{F}.$$

Тоді розв'язок задачі (4), (5) набуває вигляду

$$v(t,\sigma) = \tilde{K}(E-\mu A)^{-1}\tilde{\varphi} + \tilde{K}(E-\mu A)^{-1}\tilde{F} + K * \tilde{f}.$$

Якщо для норми матриці (μA) виконується нерівність

$$\|\mu A\| \le \mu_0 < 1, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad (B)$$

тоді допустиме розвинення в ряд

$$(E-\mu A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A^k.$$

Тоді для функції

$$\psi(t,T,\sigma) = \tilde{K} \cdot (E-\mu A)^{-1}$$

на основі оцінок (12) при комплексних аргументах σ справедлива нерівність

$$|\psi(t,T,\sigma)| \le c \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \exp\{-\delta|\sigma|^{2b}(t+kT) +$$

$$+F|\gamma|^{2b}(t+kT)\}. \quad (20)$$

Згідно з лемою 1.1 [2, с.36], уточнюються оцінки (18) та (19) функцій $G_i^{(1)}$ та $G_i^{(2)}$

$$|D_t^{k_0}D_x^sG_i^{(1)}(t,x-\xi)| \le$$

$$\le c \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (t+kT)^{m-k_0-1-\frac{|s|+n}{2b}} \times$$

$$\times \exp\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t+kT)^{-\frac{1}{2b-1}}\}, \quad (21)$$

$$|D_t^{k_0}D_x^sG_i^{(2)}(t,\tau,x-\xi)| \le$$

$$\le c \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (t+kT+T-\tau)^{m-k_0-1-\frac{|s|+n}{2b}} \times$$

$$\times \exp\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t+kT+T-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\}, \tag{22}$$

$$i=0,1,...,m, \quad G_0^{(2)} \equiv G_0.$$

Позначимо через $H^{(1,\alpha)}$ клас функцій $u \in C_x^{(\alpha)}(\Pi) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ з нормою [4, с.147]:

$$|u|_1^{(\alpha)} = |u|_\alpha + \sup_{0\le t\le T} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|dx \equiv$$

$$\equiv |u|_\alpha + |u|_1, \tag{23}$$

а $H^{(1,0)} \equiv C(\Pi) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$ з нормою

$$|u|_1^0 = |u|_0 + |u|_1.$$

Теорема 1. *Якщо рівняння (1) параболічне, $A_{k_0k} \in C[0,T]$ і виконується умова (A), то для довільних функцій $f \in H^{(1,\alpha)}$, $\varphi \in H^{(1,0)}$ розв'язок задачі (1), (2) визначається формулою (14) і для його похідних виконуються нерівності*

$$|D_t^{k_0}D_x^k u(t,x)| \le c_{k_0k}t^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}}\times$$

$$\times(|\varphi|_1+|f|_1)\sup_i I_i(t,\delta,\mu)+c|f|_\alpha,$$

$$2bk_0+k\le 2bm, \quad |D_t^{k_0}D_x^k G_0(t,x,x-\xi)| \le$$

$$\le c_{k_0k}(t-\tau)^{m-k_0-1+\frac{|k|+n}{2b}}\times$$

$$\times \sup_i I_i(t,\delta,\mu), \tag{24}$$

а для $G_i^{(1)}$, $G_i^{(2)}$ виконуються нерівності (18), (19). Якщо виконується умова (B), тоді для $G_i^{(1)}$, $G_i^{(2)}$, G_0 справедливі оцінки (21) та (22), а для розв'язку задачі нерівність

$$|D_t^{k_0}D_x^k u(t,x)| \le c_{k_0k}t^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}}\times$$

$$\times(|\varphi|_{H^{(1,0)}}+|f|_{H^{(1,\alpha)}}), \quad 2bk_0+|k|\le 2bm.$$

Доведення. Відзначимо, що функції $G_0(t,\tau,x)$, $G_i^{(1)}(t,x)$, $G_i^{(2)}(t,\tau,x)$, при $t>\tau\ge 0$ є розв'язками відповідного однорідного рівняння (1). Оцінки (18), (19) та (21), (22) дозволяють розширити область визначення оберненого оператора задачі (1), (2), який діє на сумовні функції $(\varphi_i, f)_{i=1}^m$ за формулою (14). Позначимо перший доданок (14) через

$$u_1(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^m \varphi_i(\xi)G_i^{(1)}(t,x-\xi)d\xi, \tag{25}$$

та вивчимо властивості похідних функцій $u_1(t,x)$. Нехай

$$z = \frac{|x-\xi|}{t^{\frac{1}{2}b}}. \tag{*}$$

Використовуючи оцінку (18), для похідних $u_1(t,x)$ отримаємо

$$|D_t^{k_0}D_x^k u_1(t,x)| \le$$

$$\le c_{k_0k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^m|\varphi_i(\xi)|t^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}}\times$$

$$\times \sup_i I_i(t,\delta_1,\mu)d\xi, \quad 2bk_0+|k|\le 2bm.$$

Якщо $\varphi_i(\xi)\in C(\Pi_T)\cap L_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$|D_t^{k_0}D_x^s u_1(t,x)| \le c_{k_0k}t^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}}\times$$

$$\times \sup_i I_i(t,\delta_1,\mu)|\varphi|_1. \tag{26}$$

Використовуючи оцінку (21), отримаємо

$$|D_t^{k_0}D_x^s u_1(t,x)| \le c_{k_0k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^m|\varphi_i(\xi)|\times$$

$$\times\sum_{k=0}^\infty \mu^k(t+kT)^{m-k_0-1-\frac{|s|+n}{2b}}\times$$

$$\times\exp\{-c_1|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t+kT)^{-\frac{1}{2b-1}}\}d\xi \le$$

$$\le c_{k_0k}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^m|\varphi_i(\xi)|d\xi\times$$

$$\times\sum_{k=1}^\infty \mu^k(t+kT)^{m-k_0-1-\frac{|s|+n}{2b}}.$$

Треба зауважити, що в останній нерівності ряд збіжний при $|\mu|<1$ і $n\ge 1$ або $|\mu|=1$ і $n>2bm-2bk_0-|s|$.

Таким чином,

$$|D_t^{k_0}D_x^s u_1(t,x)| \le ct^{m-k_0-1-\frac{|s|+n}{2b}}|\varphi|_1. \tag{27}$$

Із (26), (27) випливає, що для похідних $2bk_0 + |k| \le 2b(m-1)$ функція $u_1(t,x)$ неперервна аж до гіперплощини $t=0$, а при $2bk_0 + |k| > 2b(m-1)$ розривна при $t=0$. Використовуючи попередні міркування, для другого доданку (14) можна отримати аналогічні оцінки.

Розглянемо третій доданок формули (14)

$$u_2(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t,\tau,x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi. \tag{28}$$

Використовуючи оцінку (13) для $G_0(t,\tau,x-\xi)$ і її похідних можна отримати оцінку

$$|D_t^{k_0} D_x^k G_0(t,\tau,x-\xi)| \le$$
$$\le c_{k_0 k}(t-\tau)^{m-k_0-1-\frac{n+|k|}{2b}}|\times$$
$$\times \exp\{-c|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\}. \tag{29}$$

Тоді для $u_2(t,x)$ отримаємо

$$|D_t^{k_0} D_x^k u_2(t,x)| \le$$
$$\le c \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{m-k_0-1-\frac{n+|k|}{2b}} \times$$
$$\times \exp\{-c|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\} f(\tau,\xi) d\xi.$$

Будемо припускати, що $f(t,x) \in C(\Pi_T)$ та в останній нерівності зробимо заміну (*), тоді отримаємо

$$|D_t^{k_0} D_x^k u_2(t,x)| \le c|f|_0 \int_0^t (t-\tau)^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}} d\tau \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} e^{-cz^{\frac{2b}{2b-1}}} dz.$$

З останньої рівності можна побачити, що інтеграл по τ збіжний тільки при $2bk_0 + |k| < 2bm$, а це означає, що похідна по t та x до порядку $2bm-1$ отримуються формальним диференціюванням. Покажемо, що при підвищенні гладкості до умови Гельдера на функцію $f(t,x)$, існують старші похідні до порядку $2bm$, які будуть обчислюватися за допомогою спеціальної формули, тобто проведемо регуляризацію розбіжного інтеграла. Припустимо, що $f(t,x)$ задовольняє умову Гельдера по змінній x, тоді старші похідні будуть обчислюватися за формулою

$$D_t^{k_0} D_x^k u_2(t,x) =$$
$$= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} [f(\tau,\xi) - f(\tau,x)] \times$$
$$\times D_t^{k_0} D_x^k G_0(t,\tau,x-\xi) d\xi +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{k_0} D_x^k G_0(t,\tau,x-\xi) f(\tau,x) d\xi \equiv$$
$$\equiv J_1 + J_2, \tag{30}$$
$$2bk_0 + |k| = 2bm.$$

Оцінимо J_1 та J_2:

$$|J_1| \le c|f|_\alpha^0 \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{m-k_0-1-\frac{n+|k|}{2b}} \times$$
$$\times \exp\{-c|x-\xi|^{\frac{2b}{2b-1}}(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\}|x-\xi|^\alpha d\xi,$$

зробимо заміну (*), отримуємо

$$|J_1| \le c|f|_\alpha^0 \int_0^t (t-\tau)^{m-k_0-1-\frac{|k|}{2b}+\frac{\alpha}{2b}} d\tau \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} |z|^\alpha e^{-c|z|^{\frac{2b}{2b-1}}} dz.$$

Із останньої нерівності отримуємо, що інтеграл по τ збіжний. Покажемо, що J_2 дорівнює нулеві. Скористаємося тим, що функція $G_0(t,\tau,x-\xi)$ по третьому аргументу залежить від різниці, тому похідна по x з точністю до знаку дорівнює похідній по ξ:

$$J_2 = \int_0^t f(\tau,x) d\tau \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} D_t^{k_0} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (D_x^{k-1} G_0(t,\tau,x-\xi)) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^t f(\tau,x)d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} D_t^{k_0} \frac{\partial}{\partial \xi_i}(D_x^{k-1} G_0(t,\tau,x-\xi))d\xi_i =$$

$$= -\int\limits_0^t f(\tau,x)d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \times$$

$$\times D_t^{k_0} D_x^{k-1} G_0(t,\tau,x-\xi)\Bigg|_{\xi_i=-\infty}^{\xi_i=+\infty} = 0,$$

функція G_0 та її похідні на безмежності перетворюється в нуль за оцінкою (29). Теорема доведена.

2. Проілюструємо на прикладі, при якій умові на параметр μ буде виконуватися умова (A). Розглянемо задачу

$$D_t^2 u - 2D_t D_x^2 u + 2D_x^4 u = f(t,x), \tag{31}$$

$$u|_{t=0} - \mu u|_{t=T} = \varphi_1(x),$$
$$D_t u|_{t=0} - \mu D_t u|_{t=T} = \varphi_2(x), \tag{32}$$

$x \in \mathbb{R}$, $t \in (0,T)$.

Застосуємо до (31), (32) перетворення Фур'є

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\sigma^2 \frac{dv}{dt} + 2\sigma^4 v = \tilde{f}(t,\sigma), \tag{33}$$

$$v|_{t=0} - \mu v|_{t=T} = \tilde{\varphi}_1(\sigma),$$
$$\frac{dv}{dt}\bigg|_{t=0} - \mu \frac{dv}{dt}\bigg|_{t=T} = \tilde{\varphi}_2(\sigma). \tag{34}$$

Розв'язок задачі (33), (34) подається у вигляді

$$v(t,\sigma) = \tilde{\varphi}_1(\sigma)\frac{\Delta_1(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} + \tilde{\varphi}_2(\sigma)\frac{\Delta_2(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} +$$

$$+\mu \int\limits_0^T \tilde{f}(\tau,\sigma)\left[\frac{\Delta_1(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} K(T-\tau,\sigma) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_2(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} K'(T-\tau,\sigma)\right] d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \tilde{f}(\tau,\sigma) K(t-\tau,\sigma)d\tau, \tag{35}$$

де

$$K_1(t,\sigma) = e^{-\sigma^2 t}(\cos\sigma^2 t + \sin\sigma^2 t), \tag{36}$$

$$K_2(t,\sigma) = e^{-\sigma^2 t}\frac{\sin\sigma^2 t}{\sigma^2}, \tag{37}$$

$$K(t-\tau,\sigma) = e^{-\sigma^2(t-\tau)}\frac{\sin\sigma^2(t-\tau)}{\sigma^2}, \tag{38}$$

$$\Delta_1(\sigma,\mu) = \begin{vmatrix} K_1(t,\sigma) & K_2(t,\sigma) \\ -\mu K_1'(T,\sigma) & 1-\mu K_2'(T,\sigma) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(\sigma,\mu) = \begin{vmatrix} 1-\mu K_1(T,\sigma) & -\mu K_2(t,\sigma) \\ K_1(T,\sigma) & K_2(T,\sigma) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(\sigma,\mu) = \begin{vmatrix} 1-\mu K_1(T,\sigma) & -\mu K_2(T,\sigma) \\ -\mu K_1'(T,\sigma) & 1-\mu K_2'(T,\sigma) \end{vmatrix}.$$

Тоді розв'язок задачі (31), (32) формально можна подати у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_1(\xi) G_1^{(1)}(t,x-\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_2(\xi) G_2^{(1)}(t,x-\xi)d\xi +$$

$$+\mu \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau,\xi) G_0(t,\tau,x-\xi)d\xi, \tag{39}$$

де

$$G_0(t,\tau,x-\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i_0\sigma(x-\xi)} K(t-\tau,\sigma)d\sigma$$

— функція Гріна задачі Коші,

$$G_i^{(1)}(t,x-\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i_0\sigma(x-\xi)}\frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)}d\sigma, \tag{40}$$

$$G_i^{(2)}(t,\tau,x-\xi) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i_0\sigma(x-\xi)}\frac{\Delta_i(\sigma,\mu)}{\Delta(\sigma,\mu)} K^{(i-1)}(T-\tau,\sigma)d\sigma, \tag{41}$$

$$i = 1,2.$$

Використовуючи (36), (37), функції $G_i^{(1)}$ можна подати у вигляді

$$G_1^{(1)}(t,x-\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigg(e^{i_0\sigma(x-\xi)}[e^{-\sigma^2t}\times$$

$$\times(\cos\sigma^2t+\sin\sigma^2t)+\mu e^{-\sigma^2(T+t)}(\sin\sigma^2(T+t)+$$

$$+\cos\sigma^2(T+t))]\Bigg)\Bigg/\Bigg((1-\mu e^{(-\sigma^2+i\sigma^2)T})\times$$

$$\times(1-\mu e^{(-\sigma^2-i\sigma^2)T})\Bigg)d\sigma, \qquad (42)$$

$$G_2^{(1)}(t,x-\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigg(e^{i\sigma(x-\xi)}[e^{-\sigma^2t}\times$$

$$\times\frac{\sin\sigma^2t}{\sigma^2}+\mu e^{-\sigma^2(T+t)}\frac{\sin\sigma^2(T+t)}{\sigma^2}]\Bigg)\Bigg/\Bigg((1-\mu\times$$

$$\times e^{(-\sigma^2+i\sigma^2)T})(1-\mu e^{(-\sigma^2-i\sigma^2)T})\Bigg)d\sigma. \qquad (43)$$

Покажемо, при якій умові на параметр μ будуть збіжними інтеграли у формулах (42) та (43).

Теорема. *Для інтеграла*

$$I(t,x,\mu)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\sigma x-\sigma^2t\frac{\sin\sigma^2t}{\sigma^2}}}{(1-\mu e^{(-\sigma^2+i\sigma^2)T})(1-\mu e^{(-\sigma^2+i\sigma^2)T})}d\sigma, \qquad (44)$$

$$t\in(0,T), \quad x\in\mathbb{R},$$

при $|\mu|<1$ *справедлива оцінка*

$$|I(t,x+i_0y,\mu)|\le c\sum_{k,j=0}^{\infty}\mu^{k+j}(t+T(k+j))^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-c_1\frac{|x|^2}{t+T(k+j)}+F_1\frac{|y|^2}{t+T(k+j)}\right\}, \qquad (45)$$

$c_1,F_1>0$.

Доведення. Подамо інтеграл (44) у такому вигляді

$$I(t,x,\mu)=\sum_{k,j=0}^{\infty}\mu^{k+j}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i_0\sigma x}F_{k,j}(t,\sigma)d\sigma, \qquad (46)$$

де

$$F_{k,j}(t,\sigma)=$$

$$=\frac{\sin\sigma^2t}{\sigma^2}\exp\{-\sigma^2(t+T(k+j))+i\sigma^2T(j-k)\}.$$

Розглянемо функцію $F_{k,j}(t,\sigma)$ при $|\sigma|>\varepsilon_0$ та зробимо в ній заміну

$$\sigma=\frac{\alpha}{\sqrt{t+T(k+j)}}, \qquad (47)$$

таким чином отримаємо

$$F_{k,j}(t,\alpha)=\frac{\sin\frac{\alpha^2t}{t+T(k+j)}}{\frac{\alpha^2}{t+T(k+j)}}e^{-\alpha^2+i_0\alpha^2\frac{T(j-k)}{t+T(k+j)}}. \qquad (48)$$

Розглянемо (48), як функцію комплексного аргумента $\alpha+i_0\beta$, та скористаємося тим, що $|\sin(\alpha+i_0\beta)|$ при великих значеннях аргумента наближається до $\frac{1}{2}e^{\beta}$ [3, с.36].

$$|F_{k,j}(t,\alpha+i_0\beta)|\le c\frac{t+T(k+j)}{\alpha^2+\beta^2}\times$$

$$\times\exp\left\{-(\alpha^2-\beta^2)-2\alpha\beta\frac{t+T(j-k)}{t+T(k+j)}\right\}.$$

Для подальших міркувань скористаємося очевидними нерівностями

$$\alpha\beta\le\varepsilon^2\alpha^2+(2\varepsilon)^{-2}\beta^2, \quad (0<\varepsilon<1), \qquad (49)$$

$$-1\le\frac{t+T(j-k)}{t+T(k+j)}\le 1. \qquad (50)$$

Продовжуючи оцінювати функцію $F_{k,j}(t,\alpha+i_0\beta)$ та використовуючи оцінки (49), (50), отримаємо

$$|F_{k,j}(t,\alpha+i_0\beta)|\le$$

$$\le c\frac{t+T(k+j)}{\alpha^2+\beta^2}\exp\{-(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta\}\le$$

$$\le c\frac{t+T(k+j)}{\alpha^2+\beta^2}\exp\{\alpha^2(-1+2\varepsilon^2)+$$

$$+\beta^2(1+2(2\varepsilon)^{-2})\},$$

вибираючи досить мале ε і позначаючи $-1+2\varepsilon^2=-\delta_1$, $\delta_1>0$, $1+2\cdot(2\varepsilon)^{-2}=F$, отримаємо

$$|F_{k,j}(t,\alpha+i\beta)|\le$$

$$\le c\frac{t+T(k+j)}{\alpha^2+\beta^2}\exp\{-\delta_1\alpha^2+F\beta^2\}. \quad (51)$$

Позначимо через $I_{k,j}(t,x)$ вираз

$$I_{k,j}(t,x)=\int_{\mathbb{R}} e^{i_0\sigma x}F_{k,j}(t,\sigma)d\sigma. \quad (52)$$

В інтегралі (52) зробимо заміну (47), після чого отримаємо

$$I_{k,j}(t,x)=\frac{1}{\sqrt{t+T(k+j)}}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i_0\alpha x}{\sqrt{t+T(k+j)}}}F_{k,j}(t,\alpha)d\alpha. \quad (53)$$

Розглянемо $I_{k,j}(t,x)$ для x_0+i_0y. Використаємо теорему [3, с.162]. Якщо G є внутрішність замкненої жорданової спрямної кривої L і $f(z)$ неперервна у замкненій області $\bar{G}$ та аналітична в області G, то інтеграл від $f(z)$ по L дорівнює нулеві.

У нашому випадку

$$\int_L \exp\left\{\frac{i_0(x+i_0y)}{\sqrt{t+T(k+j)}}z\right\}F_{k,j}(t,z)dz=0,$$

$$z=\alpha+i_0\beta. \quad (54)$$

Контур L виберемо як показано на Рис. 1.

Розглянемо підінтегральну функцію (54) на проміжках $(R;A)$ та $(B;-R)$.

$$\left|\exp\left\{\frac{i_0(x+i_0y)}{\sqrt{t+T(k+j)}}(R+i_0\beta)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times F_{k,j}(t,R+i_0\beta)\right|\le$$

$$\le c\exp\left\{\frac{-Ry+x\beta}{\sqrt{t+T(k+j)}}\right\}\frac{1}{R^2+\beta^2}e^{-\delta_1R^2+F\beta^2}.$$

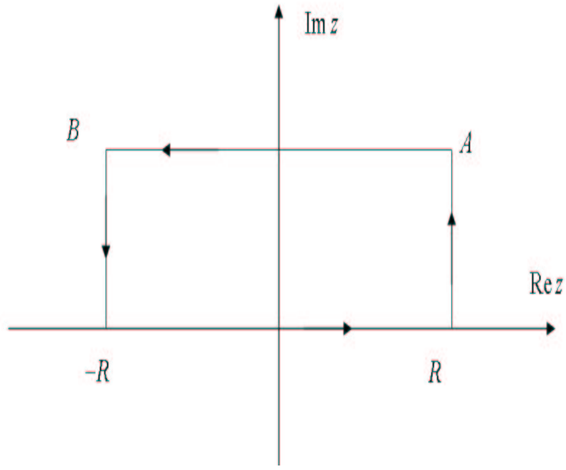

Рис. 1

Звідси видно, що підінтегральна функція при $R\to\pm\infty$ прямує рівномірно до нуля для будь-яких β. Тоді отримаємо

$$\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{i_0(x+i_0y)}{\sqrt{t+T(k+j)}}\alpha\right\}\frac{\sin\frac{\alpha^2t}{t+T(k+j)}}{\alpha^2}\times$$

$$\times e^{-\alpha^2+i_0\alpha^2\frac{T(j-k)}{t+T(k+j)}}d\alpha=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{\frac{i_0(x+i_0y)}{\sqrt{t+T(k+j)}}(\alpha+i_0\beta)\right\}\times$$

$$\times\frac{\sin\frac{(\alpha+i_0\beta)^2t}{t+T(k+j)}}{(\alpha+i_0\beta)^2}\times$$

$$\times e^{-(\alpha+i_0\beta)^2+i_0(\alpha+i_0\beta)^2\frac{T(j-k)}{t+T(k+j)}}d\alpha.$$

Використовуючи оцінку (51), отримаємо $|I_{k,j}(t,x+i_0y)|\le(t+T(k+j))^{\frac12}\exp\left\{-\frac{x\beta}{\sqrt{t+T(k+j)}}+F\beta^2\right\}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$ $\exp\left\{-\delta_1\alpha^2-\frac{y\alpha}{\sqrt{t+T(k+j)}}\right\}d\alpha$. Виберемо $\beta=\frac{x}{\sqrt{t+T(k+j)}}\beta_0$, $\beta_0=\mathrm{const}$, та використовуючи (49), отримаємо $|I_{k,j}(t,x+i_0y)|\le(t+T(k+j))^{\frac12}\exp\left\{-c_1\frac{|x|^2}{t+T(k+j)}+F_1\frac{|y|^2}{t+T(k+j)}\right\}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\alpha^2+\frac{x^2}{t+T(k+j)}}\exp\{-\delta_1\alpha^2\}d\alpha\le$

$c(t+T(k+j))^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-c_1\frac{|x|^2}{t+T(k+j)}+F_1\frac{|y|^2}{t+T(k+j)}\right\},$ $c_1>0$.

При $|\sigma|<\varepsilon_0$ отримаємо $|I(t,x,\mu)|\le \frac{ct}{(1-\mu)^2\sqrt{t}}e^{-\frac{|x|^2}{t}}=\frac{ct^{\frac{1}{2}}}{(1-\mu)^2}e^{-\frac{|x|^2}{t}}$. Теорема доведена.

У подальших роботах планується розглянути задачу про знаходження періодичного розв'язку параболічного рівняння (1).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.

2. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 443 с.

3. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 703 с.

4. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — К.: Інститут математики НАН України, 1999. — 176 с.

5. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секция А. — 1938. — 1, Вып. 7.

Надійшла до редколегії 4.06.2004