УДК 517.51

©2004 р. Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці

КОМУТАНТ ОПЕРАТОРА КОМПОЗИЦІЇ, ПОРОДЖЕНОГО ЕЛІПТИЧНИМ ДРОБОВО-ЛІНІЙНИМ ПЕРЕТВОРЕННЯМ, ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Описано комутант оператора композиції, породженого еліптичним дробово-лінійним перетворенням, в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі аналітичних в одиничному крузі функцій. Одержано критерій еквівалентності двох різних операторів композиції, породжених еліптичними дробово-лінійними відображеннями.

It is described a commutant of the composition operator which generated by elliptic fractionally-linear transformation in the class of linear continuous operators which act in the space of analytic in the unit circle functions. The criterion of equivalence of two different composition operators which generated by elliptic fractionally-linear mapping is obtained.

Через A_R, $0 < R \leq \infty$, позначимо простір усіх аналітичних у крузі $|z| < R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Нехай h та a – фіксовані комплексні числа. Оператори зсуву E_h та гомотетії L_a лінійно та неперервно діють у просторі цілих функцій A_∞ відповідно за правилами: $(E_h f)(z) = f(z+h)$ та $(L_a f)(z) = f(az)$. В роботі [1] одержано зображення всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі A_∞ і комутують з одним з операторів E_h або L_a. Використовуючи цей результат легко описати комутант оператора $S_{a,b}$, який діє в A_∞ за правилом: $(S_{a,b}f)(z) = f(az+b)$, $a, b \in \mathbb{C}$. Але формулою $w = az+b$, $a \neq 0$, визначається загальний вигляд конформного відображення комплексної площини на себе. Загальний вигляд конформного відображення одиничного круга $|z| < 1$ на себе дається формулою: $\varphi(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, де $|z_0| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тому природно виникає задача про опис комутанта оператора композиції K_φ, який лінійно та неперервно діє в просторі A_1 за правилом:

$$(K_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)). \tag{1}$$

Розв'язанню цієї задачі для випадку еліптичного дробово-лінійного перетворення одиничного одиничного круга на себе присвячена перша частина даної статті. В другій частині досліджуються умови еквівалентності двох різних операторів композиції, що породжені еліптичними дробово-лінійними перетвореннями. Нагадаємо, що дробово-лінійне перетворення $\varphi(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ одиничного круга на себе є еліптичним тоді і лише тоді, коли $|z_0| < |sin\frac{\alpha}{2}|$ ([2]).

Надалі буде використовуватися наступне допоміжне твердження, правильність якого встановлюється безпосередньо.

Лема 1. Нехай лінійні неперервні оператори A та B еквівалентні в просторі A_R, тобто існує ізоморфізм T простору A_R для якого $TA = BT$. Для того, щоб лінійний неперервний оператор $T_2 : A_R \to A_R$ був переставним з оператором B необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді $T_2 = TT_1T^{-1}$, де T_1 – деякий лінійний неперервний оператор, що діє в просторі A_R і комутує з оператором A.

Враховуючи це твердження одержуємо, що для опису комутанта деякого оператора A (тобто множини всіх лінійних неперервних операторів, що переставні з оператором A) досить описати комутант оператора B, який еквівалентний до оператора A.

Розглянемо довільне еліптичне дробово-лінійне перетворення одиничного круга на себе $\varphi(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$, де $\alpha \in (0, 2\pi)$ і $0 < |z_0| < sin\frac{\alpha}{2}$. Тоді це перетворення можна подати у канонічному вигляді

$$\frac{w-z_1}{w-z_2}=e^{i\alpha_1}\frac{z-z_1}{z-z_2}, \qquad (2)$$

де $z_0 = |z_0|e^{i\gamma}$, $|z_0| = sin\frac{\alpha}{2}sin\beta$, $z_1 = e^{i(\gamma+\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2})}tg\frac{\beta}{2}$, $z_2 = e^{i(\gamma+\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2})}ctg\frac{\beta}{2}$, $tg\frac{\alpha_1}{2} = tg\frac{\alpha}{2}cos\beta$ (див [3] або [4], задача 247). З цих співвідношень знаходимо, що $\alpha_1 = 2arctg\frac{\sqrt{sin^2\frac{\alpha}{2}-|z_0|^2}}{cos\frac{\alpha}{2}}+2\pi l$, якщо $\alpha\neq\pi$ і $\alpha_1 = \alpha+2\pi l$, якщо $\alpha=\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.

Надалі в статті ми будемо користуватися цими позначеннями.

Лема 2. Нехай $\varphi(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}$, причому $\alpha\in(0,2\pi)$ і $0<|z_0|<sin\frac{\alpha}{2}$. Тоді оператор K_φ в просторі A_1 еквівалентний до оператора K_{φ_1}, де $\varphi_1(z) = e^{i\alpha_1}z$, а $\alpha_1 = 2arctg\frac{\sqrt{sin^2\frac{\alpha}{2}-|z_0|^2}}{cos\frac{\alpha}{2}}$, при цьому для функції $\psi(z) = \frac{z-z_1}{1-\overline{z}_1z}$ виконується рівність $K_\varphi K_\psi = K_\psi K_{\varphi_1}$.

Доведення. Співвідношення (2) можна записати у вигляді

$$\frac{w-z_1}{1-\overline{z}_1w}=e^{i\alpha_1}\frac{z-z_1}{1-\overline{z}_1z},$$

тобто $\psi\circ\varphi=\varphi_1\circ\psi$. Отже, $K_\varphi K_\psi = K_\psi K_{\varphi_1}$, і, оскільки оператор K_ψ є ізоморфізмом простору A_1, то оператор K_φ еквівалентний до оператора K_{φ_1}.

Легко переконатися в тому, що правильною є також

Лема 3. Для того щоб лінійний неперервний оператор $T: A_1\to A_1$ був переставним з оператором K_{φ_1}, де $\varphi_1(z)=e^{i\alpha_1}z$, $\alpha_1\in\mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб $(Tf)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\psi_n(z)$, де $(\psi_n(z))$ – послідовність функцій з простору A_1, для яких виконуються умови:

1) $\forall r<1$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\max\limits_{|z|\leq r}|\psi_n(z)|}<1$;

2) $\psi_n(e^{i\alpha_1}z) = e^{in\alpha_1}\psi_n(z)$, $|z|<1$, $n = 0,1,\ldots$.

Зауваження 1. Використовуючи зв'язок між лінійними неперервними операторами $T: A_1\to A_1$ і їхніми характеристичними функціями $t(\lambda,z) = T\left[\frac{1}{\lambda-z}\right]$ [5], легко переконатися в тому, що лінійний неперервний оператор T буде задовольняти умови леми 3 тоді і лише тоді, коли його можна подати у вигляді $(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_z}t(\lambda,z)f(\lambda)d\lambda$, де функція $t(\lambda,z)$ – локально-аналітична на множині $\complement S\times S$, $S=\{z:|z|<1\}$, причому

$$t\left(\lambda,e^{i\alpha_1}z\right) = e^{-i\alpha_1}t\left(\lambda e^{-i\alpha_1},z\right), \qquad (3)$$

а контур γ_z вибирається згідно означення локально-аналітичної функції $t(\lambda,z)$.

Зауваження 2. У випадку, коли $\frac{\alpha_1}{2\pi}$ є ірраціональним числом, то з умови 2) леми 3 випливає, що $\psi_n = const$ при $n = 0,1,\ldots$. Якщо ж $\frac{\alpha_1}{2\pi}\in\mathbb{Q}$, то в [6] наведене в іншому вигляді зображення операторів, переставних з оператором K_{φ_1}.

З лем 1-3 випливає правильність твердження наступної теореми.

Теорема 1. Нехай $\varphi(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0z}$, причому $0<|z_0|<sin\frac{\alpha}{2}$ і $\alpha\in(0,2\pi)$. Для того щоб лінійний неперервний оператор $T: A_1\to A_1$ був переставним з оператором K_φ необхідно і досить, щоб він подавався у вигляді $T = K_\psi T_1K_\psi^{-1}$, де T_1 – лінійний неперервний оператор, що діє у просторі A_1 і є переставним з оператором K_{φ_1}.

Зауваження 3. Використовуючи зауваження 1 і теорему 1 одержуємо, що комутант оператора K_φ в просторі A_1 складається з тих і лише тих операторів, які подаються у вигляді

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_z}t(\lambda,\psi(z))f(\psi^{-1}(\lambda))d\lambda,$$

де $t(\lambda,z)$ – локально-аналітична на множині $\complement S\times S$ функція, що задовольняє умову (3).

Вивчимо далі умови еквівалентності двох операторів композиції, що породжені еліптичними дробово-лінійними перетвореннями одиничного круга на себе.

Лема 4. Нехай $(K_{\varphi_j}f)(z) = f(\varphi_j(z))$ де $\varphi_j(z) = e^{i\alpha_j}z$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j=1,2$. Для того, щоб оператори K_{φ_1} і K_{φ_2} були еквівалентними у просторі A_1 необхідно і достатньо, щоб виконувалася одна з умов

1°) $\alpha_1 = \alpha_2+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$;

2°) $\alpha_1 = \frac{p_1}{q}2\pi$, $\alpha_2 = \frac{p_2}{q}2\pi$, де $q \in \mathbb{N}$, а p_1, p_2 – цілі, відмінні від 0 і взаємно прості з q числа.

Доведення. Необхідність. Нехай оператори K_{φ_1} і K_{φ_2} еквівалентні в просторі A_1. Тоді множини власних значень цих операторів збігаються, тобто $\{e^{ni\alpha_1} : n = 0, 1, \ldots\} = \{e^{ni\alpha_2} : n = 0, 1, \ldots\}$. Тому існують цілі невід'ємні числа n_1, n_2 такі, що $e^{i\alpha_1} = e^{n_2 i\alpha_2}$, $e^{i\alpha_2} = e^{n_1 i\alpha_1}$. Значить існують цілі числа k_1 і k_2 такі, що

$$\alpha_1 = n_2\alpha_2 + 2k_2\pi \;,\; \alpha_2 = n_1\alpha_1 + 2k_1\pi. \qquad (4)$$

Тому $\alpha_1(1 - n_1 n_2) = 2k_1 n_2\pi + 2k_2\pi$. З останньої рівності випливає, що можливі два випадки.

1) $n_1 n_2 = 1$. Тоді $n_1 = n_2 = 1$ і 1°) виконується.

2) $n_1 n_2 \neq 1$. Тоді $\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1}2\pi$, $\alpha_2 = \frac{p_2}{q_2}2\pi$, причому q_1, q_2 – натуральні, p_1 і p_2 – цілі і відмінні від 0, а дроби $\frac{p_1}{q_1}$ і $\frac{p_2}{q_2}$ – нескоротні. Тому співвідношення (4) запишуться у вигляді $\frac{p_1}{q_1} = n_2\frac{p_2}{q_2} + k_2$, $\frac{p_2}{q_2} = n_1\frac{p_1}{q_1} + k_1$. З цих рівностей випливає, що $q_2 \vdots q_1$ і $q_1 \vdots q_2$. Тому $q_1 = q_2 = q$ і 2°) виконується.

Достатність. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то $K_{\varphi_1} = K_{\varphi_2}$. Нехай тепер $\alpha_1 = \frac{p_1}{q}2\pi$, $\alpha_2 = \frac{p_2}{q}2\pi$, p_1, $p_2 \in \mathbb{Z}$,а $q \in \mathbb{N}$, причому дроби $\frac{p_1}{q}$ та $\frac{p_2}{q}$ – нескоротні.

Оскільки числа p_2 і q є взаємно простими, то числа $0p_2$,$1p_2$,$2p_2$, $\ldots$, $(q-1)p_2$ при діленні на q дають різні остачі. Тому для кожного $l = \overline{0, q-1}$ існує єдине число $s(l)$, $s(l) = \overline{0, q-1}$ таке, що $(p_1 l - p_2 s(l)) \vdots q$. Нехай $n = mq + l$, де $m \in \mathbb{Z}$, а $l = \overline{0, q-1}$. Визначимо оператор T на степенях z формулою

$$Tz^n = Tz^{mq+l} = z^{mq+s(l)}.$$

Зрозуміло, що T продовжується до лінійного неперервного оператора $T : A_1 \to A_1$, причому T є ізоморфізмом простору A_1. Легко показати, що T є оператором перетворення K_{φ_1} в K_{φ_2}, тобто

$$TK_{\varphi_1} = K_{\varphi_2}T. \qquad (5)$$

Дійсно, для $f(z) = z^n = z^{mq+l}$, $m, l \in \mathbb{Z}$, $l = \overline{0, q-1}$, маємо

$$(TK_{\varphi_1}f)(z) = e^{i\alpha_1 l}z^{mq+s(l)};$$

$$(K_{\varphi_2}Tf)(z) = e^{i\alpha_2 s(l)}z^{mq+s(l)}.$$

Оскільки $i\alpha_1 l - i\alpha_2 s(l) = i\frac{p_1}{q}l2\pi - i\frac{p_2}{q}s(l)2\pi = 2\pi i\frac{p_1 l - p_2 s(l)}{q} = 2\pi i r$, $r \in \mathbb{Z}$, то $e^{i\alpha_1 l} = e^{i\alpha_2 s(l)}$ і, значить, рівність (5) виконується на степенях z. Тому з неперервності лінійних операторів T, K_{φ_1}, K_{φ_2}, випливає (5). Лему 4 доведено.

Використовуючи леми 2 і 4, одержуємо, що правильним є наступне твердження

Теорема 2. Нехай $\varphi_k(z) = e^{i\alpha_k}\frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}$, причому $|z_k| < sin\frac{\alpha_k}{2}$, $\alpha_k \in (0, 2\pi)$, $k = 1, 2$. Для того, щоб оператори K_{φ_1} і K_{φ_2} були еквівалентними в просторі A_1 необхідно і досить, щоб виконувалася одна з умов:
1°) $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$;
2°) $\frac{\sqrt{sin^2\frac{\alpha_1}{2} - |z_1|^2}}{cos\frac{\alpha_1}{2}} = \frac{\sqrt{sin^2\frac{\alpha_2}{2} - |z_2|^2}}{cos\frac{\alpha_2}{2}}$;
3°) $arctg\frac{\sqrt{sin^2\frac{\alpha_j}{2} - |z_j|^2}}{cos\frac{\alpha_j}{2}} = \frac{p_j}{q}\pi$, $j = 1, 2$, де $q \in \mathbb{N}$, а p_1, p_2 – цілі і взаємно прості з q числа.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Подпорин В.П.* К вопросу о представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн. – 1977. – 18, №6. – С.1422-1425.

2. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: "Наука", 1967. – 444 с.

3. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции. – М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 340 с.

4. *Волковыский Л.И. и др.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: "Наука", 1975. – 319 с.

5. *Kothe G.* Dualitat in der Funktionentheorie. – J. reine und angew. Math., 1953. – Bd. 191, №1-2.– S.30-49.

6. *Нагнибида Н.И.* О корнях из одного оператора в пространстве аналитических в круге функций. – Деп. в ВИНИТИ, 1981. – № 3323-81. – 12 с.

Надійшла до редколегії 20.09.2004