УДК 517.51

©2004 р. С.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці

ПОТОЧКОВА ЗАСТОСОВНІСТЬ СКЛАДОВИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ВІДНОСНО УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Досліджені умови поточкової застосовності складових операторів нескінченного порядку відносно операторів узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування.

Conditions of the pointwise adaptability of constituded operators of the infinite order relativery to the generalized differentiation and generalized integration operators are investigated.

У багатьох працях вивчалися умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку до різних просторів аналітичних функцій (див. бібліографію в [1]). В [2] досліджені умови поточкової застосовності складових операторів нескінченного порядку відносно операторів диференціювання та інтегрування. В цій статті розв'язуються подібні задачі стосовно операторів узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування.

Нехай D_α– оператор узагальненого диференціювання, породжений послідовністю ненульових комплексних чисел $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$. Тоді для кожної функції $f \in A_R$ $(D_\alpha f)(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-1}$. Надалі вважатимемо, що оператор D_α лінійно та неперервно діє в просторі A_R, тобто що послідовність $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ задовольняє умови: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}|} \le 1$, якщо $R_2 < \infty$, або $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}|} < \infty$, якщо $R_2 = \infty$.

Наведемо умови поточкової застосовності до простору A_R диференціального оператора нескінченного порядку виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n D_\alpha^n f(z), \tag{1}$$

де (a_n) – фіксована послідовність комплексних чисел.

Аналогічно як і теорема 2 [3] доводиться наступне твердження.

Лема. *Для того, щоб ряд(1) збігався для довільної функції $f \in A_R$ при $z = z_0$ необхідно і досить, щоб виконувалася умова*

$$\exists r < R\ \exists C > 0\ \forall n \ge 0 \forall k \ge n :$$
$$|a_n|\frac{|\alpha_{k-n}|}{|\alpha_k|}|z_0| \le Cz^k. \tag{2}$$

Вивчимо далі умови поточкової застосовності до простору A_R складових операторів нескінченного порядку відносно узагальненого диференціювання виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m} a_n^{(i)}(D_\alpha^n f)(z), \tag{3}$$

де $(a_n^{(i)}), i = \overline{1,m}$ – послідовності комплексних чисел.

Теорема 1. *Нехай оператор узагальненого диференціювання D_α побудований за послідовністю $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, для якої послідовність $(|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|)_{n=0}^{\infty}$ є монотонно спадною, z_i, $i = \overline{1,m}$ – різні точки з круга $|z| < R$. Тоді для послідовностей $(a_n^{(i)})_{n=0}^{\infty}$, $i = \overline{1,m}$, наступні умови рівносильні:*

а) ряд (3) збігається для довільної функції $f \in A_R$;

б) $\exists r < R\ \exists C > 0\ \forall n \ge 0 \forall k \ge n \forall i = \overline{1,m}$

$$|a_n^{(i)}|\frac{|\alpha_{k-n}|}{|\alpha_k|}|z_i|^{k-n} \le Cz^k;$$

в) ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} D_\alpha^n f(z_i)$, $i = \overline{1,m}$, збігаються для довільної функції $f \in A_R$.

Доведення. Умова а) випливає з в). За лемою одержуємо, що з умови б) випливає в). доведемо тепер, що з а) випливає б). Нехай ряд (3) збігається для довільної функції $f \in A_R$. Тоді для довільної функції $f \in A_R$ числова послідовність $(\sum\limits_{i=1}^{m} a_n^{(i)} D_\alpha^n f(z_i))_{n=0}^\infty$ є обмеженою.

Розглянемо послідовність лінійних неперервних функціоналів $(L_n)_{n=0}^\infty$ на просторі A_R:

$$L_n f = \sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} D_\alpha^n f(z_i).$$

За припущенням послідовність $(L_n)_{n=0}^\infty$ поточково обмежена на просторі A_R. Тому за теоремою Банаха-Штейнгауза вона є одностайно неперервною, тобто виконується умова

$$\exists r < R \; \exists C > 0 \; \forall n \geq 0 \; \forall f \in A_R$$
$$|L_n(f)| \leq C \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

Покладаючи тут $f(z) = z^k$, $\forall k \geq n$ одержуємо, що

$$\exists r < R \; \exists C > 0 \; \forall n \geq 0 \; \forall k \geq n$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} z_i^{k-n} \leq C \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-n}|} r^k. \tag{4}$$

Нехай $r < R$ і $C > 0$ знайдені згідно умови (4). Зафіксуємо довільні натуральні числа n і $k \geq n$. Замінивши в останній нерівності k на $k + j$, де $j = \overline{0, m-1}$, одержимо

$$\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} z_i^{k+j-n} \leq C \frac{|\alpha_{k+j}|}{|\alpha_{k+j-n}|} r^{k+j}, j = \overline{0, m-1}$$

Оскільки послідовність $(\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|})_{n=0}^\infty$ є монотонно спадною, то для кожного $j = \overline{0, m-1}$ виконується нерівність $\frac{|\alpha_{k+j}|}{|\alpha_{k-n+j}|} \leq \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-n}|}$. Тому

$$\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} z_i^{k+j-n} \leq C \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-n}|} r^{k+j}, \; j = \overline{0, m-1}. \tag{5}$$

Позначимо

$$\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)} z_i^{k+j-n} = A_j, \; j = \overline{0, m-1}. \tag{6}$$

Тоді $|A_j| \leq C \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-n}|} r^{k+j}, j = \overline{0, m-1}$. Система (6)– це система m лінійних рівнянь відносно невідомих $a_n^{(i)} z_i^{k-n}, j = \overline{0, m-1}$. Визначник цієї системи $d \neq 0$ як визначник Вандермонда $d = det||z_{i+1}^j||_{i,j=0}^{v-1}$, для якого $z_i \neq z_k$ при $i \neq k$. Ров'язавши (6), одержимо, що $a_n^{(i)} z_i^{k-n} = \frac{1}{d} \sum\limits_{j=0}^{m-1} A_j d_{ij}, j = \overline{1, m}$, де $d_{i,j}$ – деякі сталі (алгебраїчні доповнення до елементів визначника Вандермонда). Використовуючи (5), звідси одержуємо, що

$$|a_n^{(i)}||z_i|^{k-n} \leq \frac{C}{|d|} \sum_{j=0}^{m-1} |d_{ij}| r^j \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k-n}|} r^k$$

при $i = \overline{0, m-1}$. Таким чином, умова (2) виконується із заміною C на $\frac{C}{|d|} \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=0}^{m-1} |d_{ij}| r^j$. Теорема 1 доведена.

З цієї теореми одержуємо умови застосовності складових операторів нескінченного порядку до простору A_R відносно звичайного диференціювання ($\alpha_n = \frac{1}{n!}$) та оператора Помм'є ($\alpha_n = 1$).

Нехай I_α – оператор узагальненого інтегрування, що породжений послідовністю відмінних від нуля комплексних чисел (α_n), який діє в A_R за правилом $(I_\alpha f)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n+1}$. Надалі вважатимемо, що I_α лінійно та неперервно діє в A_R і крім того послідовність (α_n) додатніх чисел задовольняє умови

а) $\forall n \geq 0 \; \forall k \geq 2 : \frac{\alpha_{n+k+2}}{\alpha_k \alpha_{n+2}} \leq d_n$, причому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ збігається;

б) $(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n})$ – монотонно спадна числова послідовність.

При виконанні цих умов є правильним наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ – послідовність додатніх чисел, яка задавольняє умови а) та б); $z_i, i = \overline{1, m}$ – різні точки з круга $|z| < R$, які відмінні від нуля, $(\alpha_n^{(i)})_{n=0}^\infty, i = \overline{1, m}$ – послідовності комплексних чисел.*

Для того, щоб ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}(I_\alpha^n f)(z_i)$$

збігався для будь-якої функції f *з простору* A_R *необхідно і досить, щоб збігалися числові ряди*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} a_n^{(i)}\alpha_{n+j}z_i^{n+j}, j=\overline{0,m-1}.$$

Ця теорема доводиться за тією ж схемою, що і теорема 1 [3].

З доведеної теореми одержуємо умови застосовності складових операторів нескінченного порядку відносно узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983. – 155 с.

2. *Лінчук С.С.* Поточкова застосовність деяких класів операторов нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2004. – Випуск 191-192. Математика. – С. 79-81.

3. *Линчук С.С.* О применимости дифференциальных и интегральных операторов бесконечного порядка. – Деп. в ВИНИТИ, 1982. – №1799-82. – 25 с.

Надійшла до редколегії 20.09.2004