УДК 517.988.6

©2013 р. В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

КРИТЕРІЙ ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ, ЩО НЕ ВИКОРИСТОВУЄ $\mathcal{H}$-КЛАСИ ЦИХ РІВНЯНЬ

Отримано умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних майже періодичних рівнянь у банаховому просторі, що не використовують $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь.

We obtain conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear almost periodic equations in a Banach space that do not use $\mathcal{H}$-classes of these equations.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел, E – довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$, $L(E,E)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A : E \to E$ з нормою

$$\|A\|_{L(E,E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E$$

і C^0 – банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_E.$$

Визначимо оператор зсуву $S_h : C^0 \to C^0$, $h \in \mathbb{R}$, за допомогою співвідношення

$$(S_h x)(t) = x(t+h),\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Елемент $y \in C^0$ називається *майже періодичним* (див., наприклад, [1,2]), якщо замикання множини $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ у просторі C^0 є компактною підмножиною цього простору.

Позначимо через B^0 банаховий простір майже періодичних елементів простору C^0 з нормою

$$\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}.$$

Нехай Ω — область простору E, тобто відкрита зв'язна множина простору E, і $\mathcal{K}$ — множина всіх не порожніх зв'язних компактних підмножин $K \subset \Omega$.

Розглянемо неперервне відображення $F : \mathbb{R} \times \Omega \to E$, що задовольняє умови:

1) $F(t,x)$ рівномірно неперервне по x на кожній множині $\mathbb{R} \times K$, де $K \in \mathcal{K}$;

2) $F(t,x)$ майже періодичне по t рівномірно по x на кожній множині $K \in \mathcal{K}$.

Неважко показати, що, як і в [2, с. 428–429], для кожної множини $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}, x\in K} \|F(t,x)\|_E < +\infty$$

і для довільної послідовності $(h_k)_{k\geqslant 1}$ дійсних чисел існує підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geqslant 1}$, для якої послідовність $\left(F(t+h_{k_l},x)\right)_{l\geqslant 1}$ збігається рівномірно на множині $\mathbb{R} \times K$.

Вважатимемо, що $(F(t+h_{k_l},x))_{l\geqslant 1}$ збігається рівномірно на кожній множині $\mathbb{R} \times K$, $K \in \mathcal{K}$, і граничне відображення $G : \mathbb{R} \times \Omega \to E$, що визначається співвідношенням

$$G(t,x) = \lim_{l\to\infty} F(t+h_{k_l},x), \tag{2}$$

задовольняє умови 1 і 2. Наведена вимога виконується, якщо, наприклад, простір E скінченновимірний, що показано в [2, с. 429]. Зазначимо, що у статті ця вимога виконуватиме допоміжну роль і не буде використовуватися при отриманні основного результату.

Розглянемо рівняння

$$F(t,x(t)) = 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

$\mathcal{H}$-класом цього рівняння називається множина всіх рівнянь

$$G(t,y(t)) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

де G визначається за допомогою (2).

Метою статті є встановлення умов майже періодичності обмежених неперервних розв'язків рівняння (3) без використання елементів $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Зазначимо, що не кожний обмежений розв'язок рівняння (3) є майже періодичним. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад. Нехай $E = \mathbb{R}$. Визначимо неперервне відображення $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рівністю

$$H(t,x) =$$
$$= \sin(\pi t + \sin t) \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-1,1], \\ |x| - 1, & \text{якщо } |x| > 1, \end{cases}$$

що, як і відображення F, задовольняє умови 1 і 2. Очевидно, що кожна неперервна на $\mathbb{R}$ функція зі значеннями в $[-1,1]$ є розв'язком рівняння

$$H(t, x(t)) = 0.$$

При дослідженні рівняння (3) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині обмежених розв'язків цього рівняння, замикання множин значень яких є елементами з $\mathcal{K}$.

2. Функціонал Δ. Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$ і позначимо через $\mathcal{N}(F,K)$ множину всіх обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ розв'язків $x = x(t)$ рівняння (3), для кожного з яких замикання $\overline{R(x)}$ множини

$$R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

у просторі E є підмножиною множини K.

Також зафіксуємо функцію $x^* \in \mathcal{N}(F,K)$ і число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K, F)]$, де

$$r(x^*, K, F) =$$
$$= \sup \left\{ \|x - y\|_E : x \in \overline{R(x^*)},\ y \in K \right\}.$$

Вважаємо, що $r(x^*, K, F) > 0$. Позначимо через $\Omega(x^*, K, F, \varepsilon)$ множину всіх функцій $y \in C^0$, для кожної з яких

$$x^*(t) + y(t) \in K, \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} \left| \|y(t)\|_E - \varepsilon \right| = 0.$$

Розглянемо функціонал

$$\Delta(x^*, K, F, \varepsilon) =$$
$$= \inf_{y\in\Omega(x^*,K,F,\varepsilon)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t, x^*(t) + y(t))\|_E . \quad (4)$$

Застосування функціонала Δ до дослідження майже періодичних нелінійного рівняння (3) та аналогічного лінійного рівняння наведемо в наступних пунктах.

3. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (3), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь [2,3] не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (3).

Теорема 1. *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $z \in \mathcal{N}(F,K)$ рівняння* (3) *і деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, F, \varepsilon) > 0 \quad (5)$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $z \in \mathcal{N}(F,K)$ рівняння (3) не є елементом простору B^0. Завдяки компактності множини K існує послідовність $(z(t + h_p))_{p\geqslant 1}$, що збігається в точці $t = 0$, причому будь-яка її підпослідовність $(z(t + k_p))_{p\geqslant 1}$ не збігається рівномірно на $\mathbb{R}$. Отже,

$$\lim_{p,q\to\infty} \|z(h_p) - z(h_q)\|_E = 0 \quad (6)$$

і для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geqslant 1}$, $(q_r)_{r\geqslant 1}$ і числа $\gamma \in (0, \delta)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r})\|_E > \gamma, \quad r \geqslant 1. \quad (7)$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що послідовність $(F(t + k_p, x))_{p\geqslant 1}$ збігається рівномірно на $\mathbb{R} \times K$. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R},\ x\in K} \|F(t + k_p, x) - F(t + k_q, x)\|_E = 0. \quad (8)$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon_0 \in (0, \gamma]$. На підставі (6) і (7) для функцій

$$y_r(t) = z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r}), \quad r \geqslant 1,$$

виконується співвідношення

$$S_{-k_{q_r}} y_r \in \Omega(z, K, F, \varepsilon_0), \quad r \geqslant 1, \quad (9)$$

де S_h – оператор зсуву, визначений співвідношенням (1).

Покажемо, що

$$\Delta(z, K, F, \varepsilon_0) = 0. \tag{10}$$

Завдяки (4), (9) та тому, що

$$F(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})) \equiv 0, \quad r \geqslant 1, \tag{11}$$

виконуються співвідношення

$$\begin{gathered}\Delta(z, K, F, \varepsilon_0) = \\ = \inf_{y \in \Omega(z,K,F,\varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t, z(t) + y(t))\|_E \leqslant \\ \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r}) + y_r(t))\|_E = \\ = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r}))\|_E \leqslant \\ \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r}))\|_E + \\ + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|F(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})) - \\ - F(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r}))\|_E, \quad r \geqslant 1,\end{gathered}$$

з яких на підставі (8) і (11) випливає співвідношення (10), що суперечить (5).

Отже, припущення, що розв'язок z рівняння (3) не є майже періодичним, хибне.

Теорему 1 доведено.

4. Випадок лінійного рівняння (3). Застосуємо теорему 1 до дослідження лінійних майже періодичних рівнянь.

Розглянемо відображення $S : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що визначається рівністю

$$S(t, x) = A(t)x + h(t),$$

де $A(t)$ – неперервна і майже періодична на $\mathbb{R}$ функція зі значеннями в $L(E, E)$ і $h \in B^0$, а також відповідне лінійне рівняння

$$A(t)x(t) + h(t) = 0. \tag{12}$$

Очевидно, що рівняння (12) – окремий випадок рівняння (3).

Завдяки теоремі 1 справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай K належить множині $\mathcal{K}$. Якщо лінійне рівняння* (12) *має обмежений розв'язок $z \in \mathcal{N}(S, K)$ і для деякого числа $\delta > 0$ виконується співвідношення*

$$\Delta(z, K, S, \varepsilon) > 0$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \delta)$, то цей розв'язок є майже періодичним.

На завершення зазначимо, що функціонал, аналогічний функціоналу Δ, використовувався автором в [4,5] для дослідження нелінійних майже періодичних різницевих та диференціальних рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**. – P. 97–119.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання – 2013. – **16**, № 1. – С. 118–124.
5. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 307–312.