УДК 517.51

©2004 р.   Н.Є. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м.Чернівці

ПРО ОДИН КЛАС ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ, ЩО МІСТЯТЬ ОПЕРАТОРИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

В класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі аналітичних в крузі функцій, описані розв'язки операторних рівнянь, що пов'язані з операторами узагальненого диференціювання.

The solutions of one class of operator equations which are connected with operators of generalized integration in the set of linear continuous operators which act in the space of analytic in the circle functions are described.

При вивченні різних класів лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій, важливе значення має задача знаходження всіх лінійних неперервних операторів T, що задовольняють рівняння $TA = BT$, де A, B – фіксовані лінійні неперервні оператори, що діють у вказаних просторах. Найважливішими є операторні рівняння вказаного виду, що пов'язані з операторами узагальненого диференціювання. Для розв'язування таких рівнянь використовувалися різні методи: матричний метод [1], інтегральне зображення лінійних неперервних операторів [2], перехід до спряжених операторів [3], характеристичні функції лінійних неперервних операторів [4], зображення лінійних неперервних операторів у вигляді диференціальним операторів нескінченного порядку [5] тощо. В цій статті наведено ще один спосіб розв'язування таких рівнянь.

Через A_R $(0 < R \leq \infty)$ позначимо простір усіх аналітичних у крузі $|z| < R$ функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через A_R^* – спряжений простір до A_R. Символом $L(A_{R_1}, A_{R_2})$ позначатимемо клас усіх лінійних неперервних операторів, що діють з простору A_{R_1} в A_{R_2}.

Для подальшого нам буде потрібне наступне твердження.

Лема. *Загальний вигляд операторів $T \in L(A_{R_1}, A_{R_2})$ дається формулою*

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) z^n, \tag{1}$$

де $f \in A_{R_1}$, а $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність лінійних неперервних функціоналов на просторі A_{R_1}, що задовольняє умову:

$$\forall f \in A_{R_1} \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|L_n(f)|} \leq \frac{1}{R_2}. \tag{2}$$

Доведення. Нехай $T \in L(A_{R_1}, A_{R_2})$. Тоді його можна подати у матричному вигляді

$$(Tf)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} t_{kn} f_n) z^k, \tag{3}$$

де $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_{R_1}$, а елементи матриці $[t_{kn}]_{k,n=0}^{\infty}$ задовольняють умову

$$\forall r_2 < R_2 \ \exists r_1 < R_1 \ \exists C > 0 \ \forall k, n \geq 0 :$$

$$|t_{kn}| \leq C \frac{r_1^n}{r_2^k}. \tag{4}$$

Позначимо $L_k(f) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t_{kn} f_n$. З (4) випливає, що $L_n \in A_{R_1}^*$, $n = 0, 1, \ldots$. Покажемо, що для послідовності (L_n) виконується умова (2). Зафіксуємо довільне $r_2 < R_2$ і знайдені для нього $r_1 < R_1$ і $C > 0$ згідно умови (4). Тоді для довільної функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n \in A_{R_1}$

і для довільного $k=0,1,\dots$ $|L_k(f)|\le \frac{CC_1}{r^k}$, де $C_1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f_n|r_1^n$. Добуваючи з обох частин останньої нерівності корінь k-го степеня і перейшовши до верхньої границі при $k\to\infty$, матимемо: $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|L_k(f)|}\le\frac{1}{r_2}$. Спрямувавши $r_2\to R_2$, одержимо (2). Таким чином, оператор T подається у вигляді (1) і виконується умова (2).

Навпаки, нехай послідовність лінійних неперервних функціоналів (L_n) з простору $A^*_{R_1}$ задовольняє умову (2). Покажемо, що формулою (1) визначається оператор $T\in L(A_{R_1},A_{R_2})$. Зрозуміло, що оператор T діє з простору A_{R_1} в простір A_{R_2}. Цей оператор є поточковою границею послідовності операторів $(T_n)_{n=0}^{\infty}$, $(T_nf)(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}L_k(f)z^k$,. Зрозуміло, що $T_n\in L(A_{R_1},A_{R_2})$, $n=0,1,\dots$. Тому за принципом рівномірної обмеженості оператор $T\in L(A_{R_1},A_{R_2})$, чим і завершується доведення леми.

Нехай D_α– оператор узагальненого диференціювання, що породжений послідовністю відмінних від нуля комплексних чисел (α_n), який лінійно та неперервно діє в просторі A_{R_2}, тобто $(D_\alpha f)(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-1}$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}|}\le 1$,якщо R_2– скінчене, або $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}|}<\infty$, якщо $R_2=\infty$.

Знайдемо загальний розв'язок в класі операторів $T\in L(A_{R_1},A_{R_2})$ операторного рівняння виду

$$D_\alpha^m T=TA \tag{5}$$

де m – фіксоване натуральне число і A – фіксований оператор, що належить класу $L(A_{R_1},A_R)$. Нехай оператор $T\in L(A_{R_1},A_{R_2})$ задовольняє (5). Тоді за лемою він подається у вигляді (1), де (L_n)– послідовність функціоналів з простору $A^*_{R_1}$, що задовольняє умову (2). Оскільки для довільної функції $f\in A_{R_1}$

$$(D_\alpha^m T)f=\sum_{n=0}^{\infty}L_{n+m}(f)\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}z^n,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_{n+m}(f)\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(Af)z^n.$$

Тому

$$L_{n+m}(f)=\frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_n}L_n(Af),\ n=0,1,\dots . \tag{6}$$

З (6) випливає, що $\forall q=0,1,\dots,\forall r=\overline{0,m-1}$ виконується рівність:

$$L_{qm+r}(f)=\frac{\alpha_{qm+r}}{\alpha_r}L_r(A^qf). \tag{7}$$

Таким чином,

$$(Tf)(z)=\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\alpha_{qm+r}}{\alpha_r}L_r(A^qf)z^{qm+r}. \tag{8}$$

З врахуванням (7) умова (2) рівносильна наступній

$$\forall r=\overline{0,m-1}\ \forall f\in A_{R_1}$$

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\sqrt[qm+r]{|\alpha_{qm+r}||L_r(A^qf)|}\le\frac{1}{R_2}. \tag{9}$$

Таким чином доведена необхідність умов наступного твердження.

Теорема. *Нехай D_α– лінійний неперервний оператор узагальненого диференціювання, що породжений послідовністю (α_n) і діє в просторі A_{R_2}, A – фіксований оператор з класу $L(A_{R_1},A_{R_1})$, а m – фіксоване натуральне число. Для того щоб оператор $T\in L(A_{R_1},A_{R_2})$ був розв'язком рівняння (5) необхідно і досить, щоб існували функціонали $L_0,L_1,\dots,L_{m-1}$ з $A^*_{R_1}$ такі, що T зображається у вигляді (8) і виконується умова (9).*

Доведення. Достатність. При виконанні умови (9) формулою (8) визначається оператор $T\in L(A_{R_1},A_{R_2})$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що оператор T задовольняє рівняння (5).

З доведеної теореми при $m=1$ одержуємо

Наслідок. Нехай $D_\alpha\in L(A_{R_2},A_{R_2})$ і $A\in L(A_{R_1},A_{R_1})$. Для того щоб оператор

$T \in L(A_{R_1}, A_{R_2})$ був розв'язком операторного рівняння $D_\alpha T = TA$ необхідно і досить, щоб він подавався у вигляді

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_0} L_0(A^n f) z^n, \qquad (10)$$

де $L_0 \in A^*_{R_1}$ і виконується умова

$$\forall f \in A_{R_1} \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n||L_0(A^n f)|} \le \frac{1}{R_2}. \qquad (11)$$

З доведеної теореми можна одержати опис комутантів операторів узагальненого диференціювання та їхніх степенів.

Розглянемо деякі приклади застосування теореми до конкретних операторних рівнянь. Для простоти обмежимось випадком $n = 1$.

1. Нехай $A = I$ – вольтерівський оператор інтегрування, тобто $(If)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$. Вважатимемо додатково, що послідовність комплексних чисел (α_n) така, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|\alpha_n|}}{n} = 0$. В цьому випадку відповідна умова (11) виконується для довільного функціонала $L_0 \in A^*_{R_1}$. Тому загальний розв'язок рівняння

$$D_\alpha T = TA$$

в класі операторів $T \in L(A_{R_1}, A_{R_2})$ дається формулою

$$(Tf)(z) = L_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_0} L_0(\int\limits_0^z \frac{(z-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt) z^n,$$

де L_0 – довільний лінійний функціонал на просторі A_{R_1}.

2. Нехай D_α– це оператор Помм'є Δ, тобто оператор узагальненого диференціювання, що породжений послідовністю $\alpha_n = 1$, $n = 0, 1, ...$ і $A = D$ – оператор диференціювання. Тоді відповідну умову (11) задовольняє лише нульовий функціонал. Тому для довільних R_1, R_2 операторне рівняння $\Delta T = TD$ в класі лінійних неперервних операторів $T \in L(A_{R_1}, A_{R_2})$ має лише тривіальний розв'язок.

3. Нехай $D_\alpha = \Delta$ і $A = U$ – оператор множення на незалежну змінну. Тоді загальний розв'язок операторного рівняння $D_\alpha T = TU$ дається формулою

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_0(U^n f) z^n,$$

де L_0 – довільний лінійний неперервний функціонал з простору $A^*_{R_1}$ у випадку $R_1 R_2 \le 1$. Якщо ж $R_1 R_2 > 1$, то характеристична послідовність $l_n = L_0(z^n)$, $n = 0, 1, \ldots$, функціонала L_0 крім того задовольняє умову $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|l_n|} \le \frac{1}{R_2}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фаге М.К., Нагнибида Н.И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. – Новосибирск: "Наука", 1987. – 280 с.

2. *Коробейник Ю.Ф.* Об одном классе линейных операторов // Годишник на ВТУЗ. Математика. – 1973. – Т. IX. Книга 3. – С. 23-30.

3. *Царьков Ю.М.* Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора дифференцирования // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. – 1970. – Вып. 2. – С. 86-92.

4. *Подпорин В.П.* О решениях операторного уравнения $p_1(D)A = Ap_2(D)$ в некоторых классах линейных операторов // Докл. АН СССР. – 1978. – Т.240, N 1.– С.28–31.

5. *Подпорин В.П.* О представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. матем. ж. – 1976. – Т.17, N 1.– С.148–159.

Надійшла до редколегії 20.09.2004