УДК 517.927

©2004 р. І.І. Король

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

ПРО НОВИЙ ПІДХІД ДО ІНТЕГРУВАННЯ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Запропоновано новий чисельно-аналітичний метод послідовних наближень, який дозволяє вивчати питання існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь $dx/dt = A(t)x + f(t,x)$ при крайових умовах $A_1x(0) - A_2x(T) = 0$ у критичному випадку. При цьому матриці A_1, A_2 можуть бути виродженими.

A new numerical-analytic method of successive approximations is suggested. It allows, for system of nonlinear ordinary differential equations $dx/dt = A(t)x + f(t,x)$ considered with boundary conditions $A_1x(0) - A_2x(T) = 0$ in a critical case, to study the problems of existence and approximate construction of the solutions. The matrices A_1, A_2 can be singular.

Вступ

Дослідження, проведені за останні півтора десятка років, показують, що чисельно-аналітичний метод послідовних наближень А.М.Самойленка є потужним інструментом дослідження крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Різноманітні його модифікації були запропоновані в роботах [1-4] та багатьох інших. При цьому вигляд послідовних наближень суттєво залежить від вигляду диференціальної системи і крайових умов.

У даній роботі розглядається крайова задача

$$x' = A(t)x + f(t,x), \quad A_1x(0) - A_2x(T) = 0,$$

у випадку коли відповідна лінійна однорідна задача має нетривіальні розв'язки. Особливістю розробленого в даній роботі підходу є те, що обмеження на умову Ліпшиця стосуються не всієї правої частини, а тільки нелінійності $f(t,x)$, і, крім того, матриці в крайових умовах можуть бути виродженими.

1. Лінійна крайова задача

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + h(t)\,, \tag{1}$$

підпорядковану лінійним однорідним двоточковим крайовим умовам

$$A_1x(0) - A_2x(T) = 0, \tag{2}$$

де $x, h \in \mathbb{R}^n$, вектор-функція $h(t)$ і матриця-функція $A(t)$ неперервні при $t \in [0,T]$, A_1, A_2 – сталі $n \times n$- матриці такі, що $rang(A_1, A_2) = n$, де (A_1, A_2) є $n \times 2n$- матрицею.

Якщо Ω_0^t – матрицант відповідної (1) однорідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{3}$$

то розв'язок $x(t,x_0)$, $x(0,x_0) = x_0$ системи (1) має вигляд

$$x(t,x_0) = \Omega_0^t x_0 + \int_0^t \Omega_s^t h(s)ds.$$

Якщо $x(t,x_0)$ задовольняє крайові умови (2), то x_0 є розв'язком алгебраїчної системи

$$Gx_0 = \int_0^T \Omega_s^T h(s)ds, \quad G = (A_1 - \Omega_0^T A_2). \tag{4}$$

Якщо однорідна крайова задача (2), (3) не має нетривіальних розв'язків, то система (4), а отже, і крайова задача (1), (2) мають єдиний розв'язок

$$x(t,x_0)=\Omega_0^t G^{-1}A_2\int\limits_0^T \Omega_s^T h(s)ds+\int\limits_0^t \Omega_s^t h(s)ds.$$

Дослідимо критичний випадок – коли однорідна крайова задача (2), (3) має нетривіальні розв'язки. З цією метою розглянемо спряжені по відношенню до (1) і (3) системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt}=-A^*(t)y+g(t),$$

$$\frac{dy}{dt}=-A^*(t)y, \qquad (5)$$

де $A^*(t)$ – транспонована щодо $A(t)$ матриця. Крім того, розглянемо також спряжені щодо (2) крайові умови

$$B_1y(0)-B_2y(T)=0, \qquad (6)$$

тобто такі умови, коли B_1, B_2 – сталі $n\times n$-матриці, $rang(B_1,B_2)=n$, $A_1B_1^*-A_2B_2^*=0$ і при цьому $x(0)y(0)-x(T)y(T)=0$. В [5] доведено, що такі матриці B_1, B_2 завжди існують і вказано спосіб їх відшукання. При цьому крайову задачу (5), (6) будемо називати спряженою до (2), (3). Має місце наступне твердження щодо розв'язків спряжених крайових задач у критичному випадку.

Теорема 1.[5]. *Нехай $A(t)$ – неперервна $n\times n$- матриця, A_1, A_2 – сталі $n\times n$- матриці, $rang(A_1,A_2)=n$, а крайові умови (6) є спряженими по відношенню до (2). Тоді крайові задачі (2), (3) і (5), (6) мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків. Крім того, нехай $h(t)\in C[0,T]$. Крайова задача (1), (2) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли*

$$\int\limits_0^T \psi_j^*(s)h(s)ds=0, \qquad j=\overline{1,k},$$

де $\psi_1(t),\psi_2(t),\dots,\psi_k(t)$ – лінійно незалежні розв'язки спряженої задачі (5), (6). При цьому розв'язок крайової задачі (1), (2) є k-параметричним і має вигляд

$$x(t)=\varphi_0(t)+\sum_{i=1}^k \varphi_i(t)c_i,$$

де $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\dots,\varphi_k(t)$ – лінійно незалежні розв'язки задачі (2), (3), $c_1,c_2,\dots,c_k$ – довільні сталі.

Теорема 2. *Якщо крайова задача (2), (3) має k лінійно незалежних розв'язків, то для будь-якої функції $h(t)$ можна вказати функцію $H(t)$ таку, що система*

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+h(t)-H(t), \qquad (7)$$

має k- параметричну сім'ю розв'язків, які задовольняють крайові умови (2).

Доведення. За теоремою 1, крайова задача (2), (7) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_0^T \psi_j^*(s)\big(h(s)-H(s)\big)ds=0, \quad j=\overline{1,k}. \qquad (8)$$

Якщо позначити через $\Psi(t)$ $n\times n$- матрицю, стовпцями якої є лінійно незалежні розв'язки $\psi_1(t),\psi_2(t),\dots,\psi_k(t)$ крайової задачі (5), (6), то умова (8) запишеться у вигляді

$$\int\limits_0^T \Psi^*(s)\big(h(s)-H(s)\big)ds=0. \qquad (9)$$

Нехай $H(t)=\Psi(t)\alpha$, де вектор $\alpha\in\mathbb{R}^k$ є розв'язком системи

$$P_1\alpha=\int\limits_0^T \Psi^*(s)h(s)ds, \quad P_1=\int\limits_0^T \Psi^*(s)\Psi(s)ds.$$

Функції $\psi_j(t)$, $j=\overline{1,k}$ є лінійно незалежними, а тому $detP_1\neq 0$ і функція $H(t)$ матиме вигляд

$$H(t)=\Psi(t)P_1^{-1}\int\limits_0^T \Psi^*(s)h(s)ds.$$

Зрозуміло, що при цьому умова (9) виконується, тобто крайова задача (2), (7) має розв'язки і вони утворюють k- параметричну сім'ю. Теорема доведена.

Зауважимо, що розв'язки системи (7) мають вигляд

$$x(t,x_0)=\Omega_0^t x_0+\int\limits_0^t \Omega_s^t h(s)ds-$$
$$-\int\limits_0^t \Omega_s^t \Psi(s)P_1^{-1}ds\cdot\int\limits_0^T \Psi^*(\sigma)h(\sigma)d\sigma, \tag{10}$$

і вони задовольняють крайові умови (2), якщо їх початкове значення x_0 задовольняє алгебраїчній системі

$$Gx_0=A_2\Bigg(\int\limits_0^T \Omega_s^T h(s)ds-$$
$$-\int\limits_0^T \Omega_s^T \Psi(s)dsP_1^{-1}\int\limits_0^T \Psi^*(\sigma)h(\sigma)d\sigma\Bigg). \tag{11}$$

Відомо [5], що коли через $Y(t)$ позначити фундаментальну матрицю системи (5), а вектор y_0 такий, що функція $\psi(t)=Y(t)Y^{-1}(0)y_0$, $\psi(0)=y_0$ є розв'язком спряженої крайової задачі (5),(6), то

$$y_0=A_1^*\eta=Y(0)Y^{-1}(T)A_2^*\eta, \tag{12}$$

де вектор η належить ядру матриці G^*. З алгебри відомо, що система (11) має розв'язки (і вони при цьому утворюють k- параметричну сім'ю) тоді і тільки тоді, коли її права частина ортогональна до всіх розв'язків η системи $G^*\eta=0$, тобто коли

$$\eta^*A_2\Bigg\{\int\limits_0^T \Omega_s^T h(s)ds-$$
$$-\int\limits_0^T \Omega_s^T \Psi(s)dsP_1^{-1}\int\limits_0^T \Psi^*(\sigma)h(\sigma)d\sigma\Bigg\}=0. \tag{13}$$

Транспонуючи ліву частину цієї рівності і, враховуючи (12), одержуємо, що для всіх розв'язків $\psi(t)=Y(t)Y^{-1}(0)y_0$ крайової задачі (5), (6)

$$\int\limits_0^T h^*(s)\left(\Omega_s^T\right)^* dsA_2^*\eta-$$
$$-\int\limits_0^T h^*(s)\Psi(s)dsP_1^{*-1}\int\limits_0^T \Psi^*(s)\left(\Omega_s^T\right)^* dsA_2^*\eta=$$
$$=\int\limits_0^T h^*(s)Y(s)Y^{-1}(0)y_0ds-$$
$$-\int\limits_0^T h^*(s)\Psi(s)dsP_1^{*-1}\int\limits_0^T \Psi^*(s)Y(s)Y^{-1}(0)y_0ds=$$
$$=\int\limits_0^T h^*(s)\psi(s)ds-$$
$$-\int\limits_0^T h^*(s)\Psi(s)dsP_1^{*-1}\int\limits_0^T \Psi^*(s)\psi(s)ds.$$

Оскільки $\psi(t)=\Psi(t)c$, де $c\in\mathbb{R}^k$ – деякий сталий вектор, то зрозуміло, що рівність (13) виконується.

Отже $rang\,G=n-k$, система (11) завжди є сумісною, її розв'язок є k- параметричним і має вигляд

$$\widetilde{x_0}=F\xi+G^{(-)}A_2\Bigg\{\int\limits_0^T \Omega_s^T h(s)ds-$$
$$-\int\limits_0^T \Omega_s^T \Psi(s)dsP_1^{-1}\int\limits_0^T \Psi^*(\sigma)h(\sigma)d\sigma\Bigg\},$$

де $G^{(-)}$ – єдина $n\times n$- матриця, псевдообернена по Пенроузу до матриці G, F – єдина фундаментальна $n\times k$- матриця розв'язків однорідної системи $Gx_0=0$, $\xi\in\mathbb{R}^k$ – довільний вектор-стовпець.

Якщо позначити

$$P(t)=\int\limits_0^t Y^*(s)\Psi(s)ds,$$
$$U(t,s)=Y^{*-1}(t)\Big(Y^*(s)-P(t)P_1^{-1}\Psi^*(s)\Big),$$
$$V(t,s)=Y^{*-1}(t)P(t)P_1^{-1}\Psi^*(s),$$

то k- параметричний розв'язок крайової задачі (2), (7) можемо записати у вигляді

$$x(t,\xi)=\Omega_0^t\widetilde{x_0}+\int\limits_0^t U(t,s)h(s)ds-\int\limits_t^T V(t,s)h(s)ds.$$

2. Дослідження розв'язків нелінійних систем

Розглянемо чисельно-аналітичний метод дослідження і побудови розв'язків нелінійних диференціальних систем

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t,x), \tag{14}$$

які задовольняють крайові умови (2). Тут $t\in[0,T]$, $x:[0,T]\to D\subset\mathbb{R}^n$, $f:[0,T]\times D\to\mathbb{R}^n$, де D – деяка замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $A(t)$ і $f(t,x)$ неперервні в своїй області визначення. При цьому будемо досліджувати критичний випадок, тобто коли

A) відповідна лінійна однорідна крайова задача (2), (3) має k лінійно незалежних розв'язків, $1 \le k \le n$.

Також припустимо, що при $(t,x)\in[0,T]\times D$ система (14) задовольняє наступні умови:

B) вектор-функція $f(t,x)$ задовольняє умови обмеженості і Ліпшиця:

$$|f(t,x)|\le m(t),$$
$$|f(t,x')-f(t,x'')|\le K(t)\,|x'-x''|, \quad (15)$$

де $m(t)$ і $K(t)$ – неперервні відповідно вектор-функція і матриця-функція з невід'ємними компонентами;

C) існує не порожня множина точок $\xi\in D_0$, $D_0\subset\mathbb{R}^k$ така, що вектор-функція $x_0(t,\xi)=$ $=\Omega_0^t F\xi$ лежить в області D разом із своїм β- околом, де $\beta=\max\limits_{t\in[0,T]}(Sm)(t)$, S – лінійний оператор:

$$(Sx)(t)=\int\limits_0^T\left|\Omega_0^t G^{(-)}A_2U(T,s)\right|x(s)ds+ +\int\limits_0^t|U(t,s)|\,x(s)ds+\int\limits_t^T|V(t,s)|\,x(s)ds\,;$$

D) $r(Q)<1$, де $r(Q)$ – спектральний радіус оператора $Qx=S(Kx)$, який є композицією оператора S з множенням на матрицю $K(t)$:

$$(Qx)(t)=\int\limits_0^T\left|\Omega_0^t G^{(-)}A_2U(T,s)\right|K(s)x(s)ds+ +\int\limits_0^t|U(t,s)|K(s)x(s)ds+\int\limits_t^T|V(t,s)|K(s)x(s)ds;$$

Під $|x|$ будемо розуміти абсолютну величину вектора $x\in\mathbb{R}^n$, тобто $|x|=(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ і, відповідно, для матриць $|A|=(|A_{ij}|)_{i,j=1}^n$, а всі нерівності розуміємо покомпонентно.

Теорема 3. *Неперервно-диференційовна функція $\varphi(t)$ є розв'язком крайової задачі* (2), (14) *з початковим значенням*

$$\varphi(0)=\varphi_0\equiv F\xi+G^{(-)}A_2\int\limits_0^T\Omega_s^T f(s,\varphi(s))ds, \quad (16)$$

тоді і тільки тоді, коли φ є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t)=\Omega_0^t\varphi_0+\int\limits_0^t U(t,s)f(s,x(s))ds- -\int\limits_t^T V(t,s)f(s,x(s))ds, \quad (17)$$

і виконується умова

$$\int\limits_0^T\Psi^*(s)f(s,\varphi(s))=0. \quad (18)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\varphi\in C^1[0,T]$, $\varphi(0)=\varphi_0$ і $d\varphi(t)/dt\equiv A(t)\varphi(t)+f(t,\varphi(t)$ при всіх $t\in[0,T]$. Тоді

$$\varphi(t)\equiv\Omega_0^t\varphi_0+\int\limits_0^t\Omega_s^t f(s,\varphi(s))ds. \quad (19)$$

Оскільки $\varphi(t)$ задовольняє крайові умови (2), то φ_0 є розв'язком алгебраїчної системи ранга $n-k$:

$$G\varphi_0=A_2\int\limits_0^T\Omega_s^T f(s,\varphi(s))ds. \quad (20)$$

Аналогічно тому, як це було зроблено вище, можемо показати, що система (20) є сумісною і має k- параметричну сім'ю розв'язків вигляду (16) у тому і тільки в тому випадку, коли виконується умова (18). Але, враховуючи (10) бачимо, що при виконанні умови (18) інтегральне рівняння (17) перетворюється на наступне:

$$x(t)=\Omega_0^t\varphi_0+\int\limits_0^t\Omega_s^t f(s,x(s))ds, \quad (21)$$

а тому з (19) випливає, що $\varphi(t)$ при цьому є розв'язком рівняння (17).

Достатність. Нехай $\varphi\in C^1[0,T]$ є розв'язком рівнянь (17) і (18). Але тоді φ задовольняє рівняння (21), тобто виконується тотожність (19). При $t=0$ маємо, що $\varphi(0)=\xi$. Диференціюючи (19) по t бачимо, що $\varphi(t)$

є розв'язком системи (14). Як уже було зазначено, умова (18) рівносильна тому, що система (20) є сумісною (і при цьому вона має k- параметричну сім'ю розв'язків вигляду (16)), що завершує доведення теореми.

Розглянемо рекурентну k- параметричну послідовність функцій

$$\begin{gathered}x_m(t,\xi)=x_0(t,\xi)+\\+\int_0^T\Omega_0^t G^{(-)}A_2U(T,s)f(s,x_{m-1}(s,\xi))ds+\\+\int_0^t U(t,s)f(s,x_{m-1}(s,\xi))ds-\\-\int_t^T V(t,s)f(s,x_{m-1}(s,\xi))ds,\\x_0(t,\xi)=\Omega_0^tF\xi,\quad m\in\mathbb{N},\quad \xi\in\mathbb{R}^k.\end{gathered}\tag{22}$$

Безпосередня перевірка показує, що всі $x_m(t,\xi)$ задовольняють крайові умови (2). Має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай для системи* (14) *справедливі припущення* $\boldsymbol{A}$ – $\boldsymbol{D}$. *Тоді:*

1) *послідовність функцій* $x_m(t,\xi)$ *вигляду* (22) *при* $m\to\infty$ *рівномірно збігається відносно* $(t,\xi)\in[0,T]\times D_0$ *до граничної функції* $x^*(t,\xi)$, *яка задовольняє крайові умови* (2) *і при всіх натуральних* m *справджуються оцінки збіжності*

$$|x^*(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le(E-Q)^{-1}Q^m\beta;\tag{23}$$

2) *функція* $x^*(t)=x^*(t,\xi^*)$ *є розв'язком крайової задачі* (2), (14) *тоді і тільки тоді, коли точка* $\xi=\xi^*$ *є розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(\xi)\equiv\int_0^T\Psi^*(s)f(s,x^*(s,\xi))ds=0,\tag{24}$$

і при цьому приймає початкове значення

$$x^*(0)=F\xi^*+\int_0^T G^{(-)}A_2\Omega_s^T f(s,x^*(s))ds.\tag{25}$$

Доведення. Оцінимо відхилення послідовних наближень (22)

$$\begin{gathered}|x_1(t,\xi)-x_0(t,\xi)|\le\\\le\int_0^T\left|\Omega_0^tG^{(-)}A_2U(T,s)\right||f(s,x_0(s,\xi))|\,ds+\\+\int_0^t|U(t,s)|\,|f(s,x_0(s,\xi)|\,ds+\\+\int_0^t|V(t,s)|\,|f(s,x_0(s,\xi)|\,ds\le(Sm)(t)\le\beta.\end{gathered}$$

Отже, $x_1(t,\xi)\in D$. За допомогою математичної індукції можна показати, що при всіх натуральних m наближення $x_m(t,\xi)$ лежить в області D. Враховуючи умову Ліпшіца (15), для відхилень послідовних наближень маємо оцінки

$$\begin{gathered}|x_{m+1}(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le\\\le\int_0^T\left|\Omega_0^tG^{(-)}A_2U(T,s)\right|\,|f(s,x_m(s,\xi))-f(s,x_{m-1}(s,\xi))|ds+\\+\int_0^t|U(t,s)|\,|f(s,x_m(s,\xi))-f(s,x_{m-1}(s,\xi))|ds+\\+\int_0^t|V(t,s)|\,|f(s,x_m(s,\xi))-f(s,x_{m-1}(s,\xi))|ds\le\\\le\left(Q\left|x_m(\cdot,\xi)-x_{m-1}(\cdot,\xi)\right|\right)(t)\le\\\le\left(Q^2\left|x_{m-1}(\cdot,\xi)-x_{m-2}(\cdot,\xi)\right|\right)(t)\le Q^m\beta,\end{gathered}$$

а тому для всіх $m\in\mathbb{N}$, $j\ge1$ маємо

$$\begin{gathered}|x_{m+j}(t,\xi)-x_m(t,\xi)|\le\\\le\sum_{i=0}^{j-1}|x_{m+i+1}(t,\xi)-x_{m+i}(t,\xi)|\le\\\le\sum_{i=0}^{j-1}(Q^{m+i}|x_1(\cdot,\xi)-x_0(\cdot,\xi)|)(t)\le\sum_{i=0}^{j-1}Q^{m+i}\beta.\end{gathered}\tag{26}$$

З умови **D** випливає, що послідовність (22) рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $t\in[0,T]\times D_0$ до граничної функції $x^*(t,\xi)$. Переходячи в (26) до границі при $m\to\infty$, одержимо оцінку (23). Оскільки всі функції $x_m(t,\xi)$ послідовності (22) задовольняють крайові умови (2), то і $x^*(t,\xi)$ теж задовольняє умову (2). Переходячи в (22) до границі при $m\to\infty$ бачимо, що $x^*(t,\xi)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$\begin{gathered}x(t)=\Omega_0^t\left(F\xi+\int_0^T G^{(-)}A_2U(T,s)f(s,x(s))ds\right)+\\+\int_0^tU(t,s)f(s,x(s))ds-\int_t^TV(t,s)f(s,x(s))ds,\end{gathered}$$

а тому, за теоремою 3, є розв'язком крайової задачі (2), (14) тоді і тільки тоді, коли виконується умова (24). Але тоді $U(T,s) = \Omega_s^T$ і гранична функція приймає значення (25), що завершує доведення теореми.

Зауваження. Якщо $A(t)$, $f(t,x)$ є T- періодичними по t і $A_1 = A_2 = E$, то приходимо до дослідження T- періодичних розв'язків системи (14). При цьому спряженими до (2) є теж періодичні умови, тобто $B_1 = B_2 = E$.

Вкажемо достатні умови існування розв'язку крайової задачі (2), (14), для перевірки яких не потрібно знаходити граничну функцію $x^*(t,\xi)$ послідовності (22).

Теорема 5. *Нехай для системи* (14) *справедливі припущення* $\boldsymbol{A}$ – $\boldsymbol{D}$ *і, крім того:*

1) *існує випукла, замкнена область $D' \subset D_0 \subset \mathbb{R}^k$ така, що при деякому фіксованому натуральному m в області D' міститься єдина особлива точка ξ_{0m} ненульового індекса відображення $\Delta_m(\xi)$: $D_0 \to \mathbb{R}^k$:*

$$\Delta_m(\xi) = \int\limits_0^T \Psi^*(s) f(s, x_m(s,\xi)) ds; \quad (27)$$

2) *на границі $\partial D'$ області D' виконується нерівність*

$$\inf_{\xi \in \partial D'} |\Delta_m(\xi)| > Q_1 (E-Q)^{-1} Q^m \beta, \quad (28)$$

де $Q_1 = \int\limits_0^T |\Psi^*(s)| K(s)\, ds$.

Тоді існує розв'язок $x = x^*(t) = x^*(t,\xi^*)$, $\xi^* \in D'$ крайової задачі (2), (14) *і його початкове значення $x^*(0)$ визначається згідно* (25).

Доведення. Розглянемо векторні поля $\Delta(0,\xi) = \Delta_m(\xi)$ і $\Delta(1,\xi) = \Delta(\xi)$, які з'єднаємо за допомогою сім'ї неперервних на D' векторних полів
$\Delta(\theta,\xi) = \Delta_m(\xi) + \theta(\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)), \quad 0 \le \theta \le 1$.
Припустимо, що існує значення параметра $\theta_0 \in [0,1]$ таке, що $\Delta(\theta_0,\xi) = 0$. Тоді

$$\Delta_m(\xi) = \theta_0 \big(\Delta_m(\xi) - \Delta(\xi)\big). \quad (29)$$

При цьому з (23), (24), (27) і умови Ліпшиця (15) маємо, що

$$|\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \le$$
$$\le \int\limits_0^T |\Psi^*(s)|\, K(s)\, |x^*(s,\xi) - x_m(s,\xi)|\, ds \le$$
$$\le Q_1 (E-Q)^{-1} Q^m \beta.$$

Але при цьому з (29) випливає, що

$$|\Delta_m(\xi)| \le |\Delta(\xi) - \Delta_m(\xi)| \le Q_1 (E-Q)^{-1} Q^m \beta,$$

а це протирічить умові (28). Отже, наше припущення про виродженість сім'ї векторних полів $\Delta(\theta,\xi)$ є хибним, а тому векторні поля $\Delta(\xi)$ і $\Delta_m(\xi)$ гомотопні. Таким чином, в D' існує точка ξ^*, яка є розв'язком рівняння (24). Теорема доведена.

Висновки

У даній роботі обгрунтовано новий чисельно-аналітичний алгоритм інтегрування нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь при двоточкових лінійних однорідних крайових умовах у критичному випадку – коли відповідна лінійна однорідна крайова задача має k нетривіальних розв'язків. Побудовано рівномірно збіжну k- параметричну послідовність функцій, які задовольняють крайові умови, встановлено умови збіжності та оцінки похибки. Досліджено зв'язок граничної функції цієї послідовності з точним розв'язком досліджуваної крайової задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — К.: Наук.думка, 1985. — 224 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наук.думка, 1992. — 279 с.

3. *Трофимчук Е.П., Коваленко А.В.* Численно-аналитический метод А.М.Самойленко без определяющего уравнения// Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, N1. — С.138—140.

4. *Перестюк Н.А., Ронто А.Н.* Об одном методе построения последовательных приближений для исследования многоточечных краевых задач// Укр. мат. журн. — 1995. — **47**, N9. — С.1243—1253.

5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.