УДК 517.925.44

©2004 р. Л.О. Кирилова

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова, м.Одеса

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ БЛИЗЬКІ ДО РІВНЯНЬ ТИПУ ЕМДЕНА-ФАУЛЕРА

Досліджується питання про асимптотику необмежених розв'язків диференціальних рівнянь виду $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y)$, де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – неперервна функція, а $\varphi : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$— двічі неперервно диференційовна функція, у деякому сенсі близька до степеневої.

A differential equation $y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y)$, where $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ is a continuous function, $\varphi : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$ is a twice continuously differentiable function that in a certain sence close to power function, is under consideration. The question on asymptotics of unbounded solutions of the equation is studied.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ -неперервна функція, $\varphi : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$- двічі неперервно диференційовна функція, що задовольняє умови

$$\lim_{y\to+\infty} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } +\infty, \end{cases} \qquad \varphi'(y) \neq 0,$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma \notin \{0, \pm\infty\}. \tag{2}$$

На підставі умов (2)

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \sigma + 1. \tag{3}$$

З (2) і (3) випливає, що функцію $\varphi(y)$ можна подати у вигляді

$$\varphi(y) = y^{\sigma+1} L(y), \tag{4}$$

де $L : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$— двічі неперервно диффеpенційовна функція яка задовольняє умову

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{yL'(y)}{L(y)} = 0. \tag{5}$$

З умови (5) випливає, що функція L повільно змінюється при $y \to +\infty$ (див. монографію [1,розд.I,с.9]), тобто для неї

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{L(\lambda y)}{L(y)} = 1$$

при будь-якому $\lambda > 0$.

Прикладами функцій, що повільно змінюються на $+\infty$, є неперервні додатні функції, які мають додатню границю при $y \to +\infty$, функції $\log^\beta y$, $\log^\beta \log^\gamma y$ $(\beta, \gamma \in \mathbb{R})$ і багато інших.

Важливим частинним випадком рівняння (1) є узагальнене рівняння Емдена-Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t) y^{\sigma+1},$$

яке зустрічається у багатьох галузях природознавства і детально досліджено в [2—7] (див. також монографію [8,розд.V,с.326—401]).

У випадку, коли функція φ відрізняється від степеневої і в деякому сенсі близька до функції, що правильно змінюється на нескінченності (див. [1,розд.I,с.9]) для рівняння (1) отримано в [9] лише окремі результати про асимптотичне поводження необмежених розв'язків.

Розв'язок y рівняння (1), який заданий на проміжку $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, будемо називати $P_\omega(\lambda_0)$- розв'язком, якщо він задовольняє наступні умови:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = +\infty, \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{6}$$

Питання про асимптотику $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків рівняння (1) при $\lambda_0 \notin \{0, 1, \pm\infty\}$ досліджене в [10]. Найбільш важкими для вивчення є $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язки, для яких $\lambda_0 = 0, 1, \pm\infty$. Дана стаття присвячена одному з таких типів розв'язків.

Покладемо при $\omega = +\infty$

$$I(t) = \int_A^t p(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

де

$$A = \begin{cases} a, & \text{якщо } \int_a^{+\infty} p(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = +\infty, \\ +\infty, & \text{якщо } \int_a^{+\infty} p(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Теорема 1. *При $\omega < +\infty$ рівняння (1) не має $P_\omega(\pm\infty)$-розв'язків.*

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $\omega < +\infty$ і рівняння (1) має $P_\omega(\pm\infty)$-розв'язок $y : [t_y, \omega[\to \mathbb{R}$. Тоді згідно до леми (10.4) з [11] для цього розв'язу має місце співвідношення

$$y(t) \sim (t - \omega)y'(t) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Але оскільки $t - \omega < 0$, а на підставі (1) і (6) $y(t) > 0$, $y'(t) > 0$ в деякому лівому околу ω, то ми дістали протиріччя. Теорему (1) доведено.

Теорема 2. *Нехай функція L така, що для будь-якої функції $l : [y_0, +\infty[\to]0, +\infty[$, яка неперервна і повільно змінюється в нескінченності*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{L(t\cdot l(t))}{L(t)} = 1. \tag{8}$$

Тоді для існування у рівняння (1) $P_{+\infty}(\pm\infty)$-розв'язків необхідним і достатнім є виконання умов

$$\alpha_0 \sigma I(t) < 0 \quad \textit{при } t > a, \tag{9}$$

$$\int_a^{+\infty} |\sigma I(t)|^{-1/\sigma}\,dt = +\infty, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{tI'(t)}{I(t)} = 0. \tag{11}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y(t) = t \cdot |\sigma I(t)|^{-1/\sigma}[1 + o(1)], \tag{12}$$

$$y'(t) = |\sigma I(t)|^{-1/\sigma}[1 + o(1)]. \tag{13}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y : [t_y, +\infty[\to \mathbb{R}$ —довільний $P_{+\infty}(\pm\infty)$-розв'язок рівняння (1). Тоді згідно до леми (10.4) з [11]

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{ty'(t)}{y(t)} = 1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{ty''(t)}{y'(t)} = 0. \tag{14}$$

В наслідок першого з цих граничних співвідношень $y(t)$ припускає (див. [1,розд.I,с.9—15]) зображення виду

$$y(t) = t \cdot l(t),$$

де $l : [t_y, +\infty[\to]0, +\infty[$— двічі неперервно диференційовна функція, що повільно змінюється на $+\infty$. Тому згідно (8) маємо

$$L(y(t)) \sim L(t) \qquad \text{при } t \to +\infty. \tag{15}$$

Із (1) враховуючи (15) і першу з умов (14) випливає, що при $t \to +\infty$

$$y''(t) \sim \alpha_0 p(t)[ty'(t)]^{\sigma+1} L(t). \tag{16}$$

Звідси, використовуючи (4), одержимо

$$\frac{y''(t)}{[y'(t)]^{\sigma+1}} = \alpha_0 p(t)\varphi(t)[1 + o(1)]$$

при $t \to +\infty$. Інтегруючи це асимптотичне співвідношення на проміжку $[t_y, t]$, маємо

$$[y'(t)]^{-\sigma} - [y'(t_y)]^{-\sigma} =$$

$$= -\sigma\alpha_0 \int_{t_y}^t p(\tau)\varphi(\tau)[1 + o(1)]\,d\tau.$$

Одержане співвідношення не протирічить першим двом умовам (6) лише у випадку, коли

$$[y'(t)]^{-\sigma} = -\sigma\alpha_0 \int_A^t p(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\,[1 + o(1)]$$

при $t \to +\infty$. Тому виконується умова (9) і має місце асимптотичне зображення (13). Далі, інтегруючи співвідношення (13) на проміжку $[t_y, t]$ і використовуючи першу з умов (6), впевнюємося у достовірності умови (10). При цьому з (13) і першої з умов (14) дістанемо асимптотичну формулу (12).

На підставі (16) і зображення (13) при $t \to +\infty$ маємо

$$\frac{ty''(t)}{y'(t)} \sim \frac{t\alpha_0 p(t) t^{\sigma+1} L(t)}{[y'(t)]^{-\sigma}} \sim$$

$$\sim -\frac{tp(t)t^{\sigma+1}L(t)}{\sigma I(t)}.$$

Тому, з (4) і (7), при $t \to +\infty$ дістанемо

$$\frac{ty''(t)}{y'(t)} \sim -\frac{tI'(t)}{\sigma I(t)}.$$

З урахуванням другої з умов (14) ліва частина одержаного співвідношення прямує до нуля при $t \to +\infty$. Оскільки $\sigma \neq 0$, дістаємо умову (11).

Достатність. Нехай виконуються умови (9)-(11). Рівняння (1) за допомогою перетворення

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^t (-\alpha_0 \sigma I(\tau))^{-1/\sigma}\, d\tau [1 + v_1(t)], \\ y'(t) &= (-\alpha_0 \sigma I(t))^{-1/\sigma} [1 + v_2(t)] \end{aligned} \tag{17}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = -\dfrac{Y'(t)}{Y(t)} v_1 + \dfrac{Y'(t)}{Y(t)} v_2, \\ v_2' = \dfrac{I'(t)}{\sigma I(t)}(1 + v_2) + G(t, v_1), \end{cases} \tag{18}$$

де

$$Y(t) = \int_a^t (-\alpha_0 \sigma I(\tau))^{-1/\sigma}\, d\tau, \tag{19}$$

$$G(t, v_1) = P(t)(1 + v_1)^{\sigma+1} L(Y(t)(1 + v_1)),$$

$$P(t) = \frac{\alpha_0 p(t)}{Y'(t)} [Y(t)]^{\sigma+1}.$$

Виберемо тепер довільне число $t_0 \in]a, +\infty[$ і зафіксуємо довільне $\delta \in]0, 1[$. Розглянемо систему диференціальних рівнянь (18) на множині

$$\Omega = [t_0, +\infty[\times D,$$

де $D = \{(v_1, v_2) : |v_i| \le \delta,\ i = 1, 2\}$.

Розклавши при кожному фіксованому $t \in [t_0, +\infty[$ функцію $L(Y(t)(1 + v_1))$ за формулою Тейлора з залишком у формі Лагранжа в околі $v_1 = 0$ до другого порядку включно, дістаємо зображення

$$L(Y(t)(1 + v_1)) = L(Y(t)) \left[1 + M_1(t) v_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} M_2(t, \xi) {v_1}^2 \right],$$

в якому

$$M_1(t) = \frac{Y(t) L'(Y(t))}{L(Y(t))},$$

$$M_2(t, \xi) = \frac{[Y(t)]^2 L''(Y(t) \cdot (1 + \xi))}{L(Y(t))},$$

де $\xi = \xi(t, v_1)$ така, що $|\xi(t, v_1)| \le |v_1|$.

Систему (18) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} v_1' = a_{11}(t) v_1 + a_{12}(t) v_2, \\ v_2' = f(t) + a_{21}(t) v_1 + a_{22}(t) v_2 + g(t) r(t, v_1), \end{cases} \tag{20}$$

де

$$a_{11}(t) = -\frac{Y'(t)}{Y(t)}, \qquad a_{12}(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)},$$

$$f(t) = P(t) L(Y(t)) + \frac{I'(t)}{\sigma I(t)},$$

$$a_{21}(t) = P(t) L(Y(t)) [\sigma + 1 + M_1(t)],$$

$$a_{22}(t) = \frac{I'(t)}{\sigma I(t)}, \qquad g(t) = P(t) L(Y(t)),$$

$$r(t, v_1) = M_1(t) [(1 + v_1)^{\sigma+1} - 1] v_1 +$$

$$+ [(1 + v_1)^{\sigma+1} - 1 - (\sigma + 1) v_1] +$$

$$+M_2(t,\xi)\,[(1+v_1)^{\sigma+1}-1]v_1^2.$$

Зазначимо деякі властивості функцій, що входять до правої частини цієї системи.

Згідно умови (10) $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t)=+\infty$. Тому, враховуючи (5), маємо

$$\lim_{t\to+\infty} M_1(t)=0.$$

Застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{tY'(t)}{Y(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t(-\alpha_0\sigma I(t))^{-1/\sigma}}{\displaystyle\int_a^t(-\alpha_0\sigma I(\tau))^{-1/\sigma}\,d\tau}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{tI'(t)}{\sigma I(t)}\right)=1. \tag{21}$$

Звідси на підставі (8) випливає, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{L(Y(t))}{L(t)}=1. \tag{22}$$

Далі, з урахуванням останніх двох співвідношень, а також зображень (7) і (19) і умови (11), для коефіцієнтів при лінійній частині системи (20) виконуються наступні властивості

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{a_{21}(t)}{a_{11}(t)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{P(t)Y(t)L(Y(t))[\sigma+1+M_1(t)]}{-Y'(t)}=$$

$$=\frac{1}{\sigma}\lim_{t\to+\infty}\frac{tI'(t)}{I(t)}[\sigma+1+M_1(t)]=0, \tag{23}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{a_{22}(t)}{a_{11}(t)}=$$

$$=-\frac{1}{\sigma}\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{tI'(t)}{I(t)}}{\dfrac{tY'(t)}{Y(t)}}=0, \tag{24}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{a_{21}(t)}{a_{22}(t)}=-\sigma-1. \tag{25}$$

Доведемо тепер систему (20) до майже трикутного вигляду, використовуючи перетворення

$$\begin{aligned}v_1(t)&=z_1(t),\\ v_2(t)&=h(t)z_1(t)+z_2(t).\end{aligned} \tag{26}$$

При цьому за функцію $h:[t_1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $t_1\ge t_0$ візьмемо розв'язок наступного диференціального рівняння

$$h'=a_{21}(t)+[a_{22}(t)-a_{11}(t)]h-a_{12}(t)h^2, \tag{27}$$

який прямує до нуля при $t\to+\infty$. Оскільки, згідно до (23)—(25),

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{a_{21}(t)}{a_{22}(t)-a_{11}(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{a_{21}(t)}{a_{11}(t)}}{\dfrac{a_{22}(t)}{a_{11}(t)}-1}=0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{-a_{12}(t)}{a_{22}(t)-a_{11}(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\dfrac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)}}{\dfrac{a_{22}(t)}{a_{11}(t)}-1}=-1,$$

то такий розв'язок існує на підставі теореми 1.3 і зауваження (1.4) з [12]. Крім того, із (27) випливає, що для цього розв'язку має місце співвідношення

$$-a_{12}(t)h(t)+a_{22}(t)=\frac{a_{21}(t)+a_{22}(t)}{1-h(t)}+$$

$$+\frac{(1-h(t))'}{1-h(t)}.$$

Обравши як зазначено раніше функцію h і застосовуючи для (20) перетворення (26), дістаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z_1'=[a_{11}(t)+a_{12}(t)h(t)]z_1+a_{12}(t)z_2,\\ z_2'=f(t)+[c_1(t)+c_2(t)]\,z_2+g(t)r(t,z_1),\end{cases} \tag{28}$$

де

$$c_1(t)=\frac{a_{21}(t)+a_{22}(t)}{1-h(t)},$$

$$c_2(t)=\frac{(1-h(t))'}{1-h(t)}.$$

Тут згідно до (7), (19) і встановлених раніше властивостей (23)—(25),

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{a_{12}(t)}{a_{11}(t)+a_{12}(t)h(t)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{a_{11}(t)}{a_{12}(t)}+h(t)}=-1,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{c_1(t)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dfrac{f(t)}{a_{22}(t)}(1-h(t))}{\dfrac{a_{21}(t)}{a_{22}(t)}+1}=0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{c_1(t)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-h(t)}{\dfrac{a_{21}(t)}{g(t)}+\dfrac{a_{22}(t)}{g(t)}}=\frac{1}{\sigma},$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_1}^{t}c_2(\tau)\,d\tau=\lim_{t\to+\infty}\int_{t_1}^{t}\frac{(h(\tau)-1)'}{h(\tau)-1}\,d\tau=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\ln\left|\frac{h(t)-1}{h(t_1)-1}\right|=0.$$

Крім того, для $M_2(t,\xi)$ має місце зображення

$$M_2(t,\xi)=\frac{(Y(t)(1+\xi))L'(Y(t)(1+\xi))}{L(Y(t)(1+\xi))}\times$$

$$\times\frac{(Y(t)(1+\xi))L''(Y(t)(1+\xi))}{L'(Y(t)(1+\xi))}\times$$

$$\times\frac{L(Y(t)(1+\xi))}{L(Y(t))\,(1+\xi)^2}.$$

Користуючись теоремою про рівномірну збіжність для функцій що повільно змінюються (див. [1,розд.I,с.10—14]), а також (2) і (5), дістанемо, що функція $M_2(t,\xi)$ обмежена при $t\in[t_1,+\infty[$, $|\xi|\le\delta$. Тому $\lim\limits_{|z_1|+|z_2|}\dfrac{r(t,z_1)}{|z_1|+|z_2|}=0$ рівномірно за $t\in[t_1,+\infty[$.

Таким чином, із зауваження (1.4) роботи [12] випливає, що на деякій множині

$$\Omega_0=[t_1,+\infty[\times D_0,$$

де $D_0=\{(v_1,v_2):|v_i|\le\delta_0\le\delta,\ i=1,2\}$. для системи диференціальних рівнянь (28) виконуються всі умови теореми 1.3 із [12]. Тому вона має як найменше один дійсний розв'язок $z=(z_i)_{i=1}^2$, який прямує до нуля при $t\to+\infty$. Цьому розв'язку на підставі замін (26) і (17) відповідає розв'язок y рівняння (1), для якого мають місце при $t\to+\infty$ асимптотичні зображення

$$y(t)=\int\limits_a^t(-\alpha_0\sigma I(\tau))^{-1/\sigma}\,d\tau[1+o(1)],$$

$$y'(t)=(-\alpha_0\sigma I(t))^{-1/\sigma}[1+o(1)].$$

Звідси, враховуючи (9) і (21), маємо для y і y' асимптотичні зображення (12) і (13) відповідно. Використовуючи ці зображення і умови (9)-(11), дістанемо, що даний розв'язок y рівняння (1) є $P_{+\infty}(\pm\infty)$-розв'язком.

Висновки. В [13] для нелінійних диференціальних рівнянь зі степеневими нелінійностями був вилучений клас так званих $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків, який припускає встановлення точних асимптотичних формул для всіх можливих значень λ_0. У даній статті для нелінійного диференціального рівняння (1) з нелінійністю більш загального вигляду запропонована методика встановлення точних асимптотичних формул для необмежених $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків в особливому випадку, коли $\lambda_0=\pm\infty$. Також здобуті необхідні і достатні умови існування такого типу $P_\omega(\lambda_0)$-розв'язків.

У частинному випадку, коли рівняння (1) є рівнянням типу Емдена-Фаулера, тобто $\varphi(y)=y^{\sigma+1}$, встановлені результати збігаються з результатами робіт [2—8].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции.— М.:Наука, 1985.—141с.

2. *Кигурадзе И.Т.* Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера.// Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1965.— **29**, № 5.— С. 965—986.

3. *Костин А.В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена-Фаулера.// Докл. АН СССР.— 1971.— **200**, № 1.— С.28-31.

4. *Чантурия Т.А.* Об асимптотическом представлении решений уравнения $u''=a(t)|u|^n signu$.// Дифференц. уравнения.— 1972.— **8**, № 7.— С. 1195—1206.

5. *Костин А.В., Евтухов В.М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения.// Докл. АН СССР.— 1976.—**231**, № 5.— С. 1059-1062.

6. *Евтухов В.М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка.// Докл. АН СССР.— 1977.— **233**, № 4.— С. 531—534.

7. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.// Сообщ. АН ГССР.— 1982.— **106**, № 3.— С. 473—476.

8. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1991.— 432с.

9. *Talliaferro S.D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$.// SIAM J.Math.Anal.—1981.—**12**,№6.

10. *Evtukhov V.M., Kirillova L.A.* Asymptotic representations for unbounded solutions of second order nonlinear differential equations close to equations of Emden-Fowler type.//Mem. Differential Equations Math. Phys.— 2003.—**30**—P.153—158.

11. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Киев.— 1998.— 295с.

12. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений.// Дифференц. уравнения.— 2003.— **39**, № 4.— С. 433—444.

13.*Евтухов В.М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена—Фаулера n-го порядка.// Докл.АН России.— 1992.–**234**, №2.— С.258—260.

Надійшла до редколегії 4.05.2004