УДК 517.925

©2004 р. В.А. Касьянова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м.Одеса

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ЗНИКАЮЧИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Для рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків з нелінійностями різних типів, встановлено необхідні і достатні умови існування одного класу зникаючих при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) неколивних розв'язків і одержано для цих розв'язків асимптотичні зображення.

The necessary and sufficient conditions of one class existance disappearing under $t \uparrow \omega$ of non-oscillating solutions were stated for the equations of the second order with non-linearities of more general kind of Emden-Fowler non-linearity type and asymptotic representations were obtained for these solutions.

1. Постановка задачі и формулювання основних результатів. В [1,2] для нелінійного диференціального рівняння

$$y'' = p(t)\varphi(y),$$

де $p : [a, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна функція, а $\varphi :]0, y_0] \longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна і правильно мінлива в нулі (див. [3]) функція, встановлено достатні ознаки існування зникаючих у нескінченності розв'язків і отримано для цих розв'язків, а точніше для відношення $\frac{y(t)}{\varphi(y(t))}$, двобічні асимптотичні оцінки. При деяких більш сильних обмеженнях на функцію φ, але в припущенні, що функція p неперервна і відмінна від нуля на проміжку $[a, \omega[$, де $\omega \leq +\infty$, в [4] був вилучений для даного рівняння клас зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків, що допускає, на відміну від [1,2], встановлення точних асимптотичних формул для $\frac{y(t)}{\varphi(y(t))}$, а також необхідних і достатніх умов існування розв'язків з отриманими асимптотичними зображеннями.

Тут розглядається диференціальне рівняння виду

$$y'' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \tag{1.1}$$

де $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1, m})$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m})$- неперервно диференційовні функції, $r_k : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = \overline{1, m})$- неперервні функции, що задовольняють умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

$-\infty < a < \omega \leq +\infty$, а $\varphi_k :]0, y_0] \longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1, m};\ 0 < y_0 < +\infty)$- двічі неперервно диференційовні функції такі, шо

$$\lim_{y \downarrow 0} \varphi_k(y) = \varphi_k^0 > 0, \quad k = \overline{1, m_1},^{1} \tag{1.3}$$

$$\lim_{y \downarrow 0} \varphi_k(y) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } +\infty, \end{cases} \quad k = \overline{m_1 + 1, m}, \tag{1.4}$$

причому

$$\begin{gathered} \varphi_k'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in]0, y_0], \\ \lim_{y \downarrow 0} \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)} = \sigma_k = \text{const} \end{gathered} \tag{1.5}$$

якщо $k \in \{1, \ldots, m\}$ і відмінно від тих $k \in \{1, \ldots, m_1\}$, для яких $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0 > 0$.

Покладемо

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

і для кожного $i \in \{1, \ldots, m\}$ введемо функції

$$I_{i1}(t) = \int_{A_{i1}}^{t} p_i(s)\, ds, \quad I_{i2}(t) = \int_{A_{i2}}^{t} \pi_\omega(s) p_i(s)\, ds,$$

[1] Тут і нижче вважаємо, що $m_1 = 0$ $(m_1 = m)$, якщо виконується тільки умова (1.4) (тільки умова (1.3)).

де

$$A_{i1} = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega p_i(s)\,ds < +\infty, \end{cases}$$

$$A_{i2} = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(s)| p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(s)| p_i(s)\,ds < +\infty. \end{cases}$$

Означення 1.1. *Розв'язок $y : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$ ($t_0 \in [a, \omega[$) рівняння (1.1) називається $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язком, де $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, якщо він задовольняє наступні три умови:*

1) $\lim\limits_{t \uparrow \omega} y(t) = 0;$

2) $y'(t) < 0 \quad$ *при* $\quad t \in [t_0, \omega[,$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty; \end{cases}$$

3) $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0,$

причому $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \dfrac{y''(t) y(t)}{[y'(t)]^2} = 1,$ *якщо* $\quad \mu_0 = \pm\infty.$

Зауваження 1.1. *Якщо $\mu_0 = \pm\infty$ і існує скінченна або рівна $\pm\infty$ границя $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t) y(t)}{[y'(t)]^2}$, то неважко зрозуміти, що значенням цієї границі може бути лише 1.*

Нижче буде встановлено, що для рівняння (1.1) мають місце наступні твердження.

Теорема 1.1. *Нехай $|\mu_o| < +\infty$, $m_1 \ge 1$ і для деякого $i \in \{1, \dots, m_1\}$ виконуються умови:*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t)}{p_i(t)} = 0 \quad \text{при } j = \overline{1, m_1} \quad (j \ne i); \quad (1.6)$$

$$\varlimsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < (1 + \sigma_j)|1 + \mu_0|$$

$$\text{при} \quad j = \overline{m_1 + 1, m}, \quad \text{якщо} \quad m_1 < m. \quad (1.7)$$

Тоді для існування у рівняння (1.1) $\Pi^0_\omega(\mu_0)$-розв'язків необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} = \mu_0, \quad (1.8)$$

$$\int\limits_a^\omega |I_{i1}(t)|\,dt < +\infty \quad (1.9)$$

і при $t \in]a, \omega[$ справджувались нерівності

$$(1 + \mu_0)\pi_\omega(t) \le 0, \qquad \alpha_i I_{i1}(t) < 0, \quad (1.10)$$

причому для кожного з цих розв'язків правильними є при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = -\alpha_i \varphi_i^0 \int\limits_t^\omega I_{i1}(s)\,ds[1 + o(1)], \quad (1.11)$$

$$y'(t) = \alpha_i \varphi_i^0 I_{i1}(t)[1 + o(1)]. \quad (1.12)$$

Більше того, при виконанні умов (1.8) – (1.10) рівняння (1.1) має однопараметричну сім'ю таких розв'язків у випадку, коли $\alpha_i < 0$.

Теорема 1.2. *Нехай $m_1 \ge 1$ і для деякого $i \in \{1, \dots, m_1\}$ виконуються припущення (1.6) і*

$$\sigma_j > -1, \quad \varlimsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < +\infty$$

$$\text{при} \quad j = \overline{m_1 + 1, m}, \quad \text{якщо} \quad m_1 < m. \quad (1.13)$$

Тоді для існування у рівняння (1.1) $\Pi^0_\omega(+\infty)$- розв'язків ($\Pi^0_\omega(-\infty)$- розв'язків) необхідно і достатньо, щоб $\omega < +\infty$ ($\omega = +\infty$), виконувались умови (1.9),

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i1}(t)}{I_{i1}(t)} = +\infty \ (-\infty) \quad (1.14)$$

і справджувалась при $t \in]a, \omega[$ друга з нерівностей (1.10). Більше того, кожний такий розв'язок допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (1.11), (1.12).

Теорема 1.3. *Нехай $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $m_1 < m$ і для деякого $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$ виконуються припущення $\sigma_i \ne 0$,*

$$\varlimsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] < -(1 + \sigma_i)|1 + \mu_0|$$

при $j = \overline{1, m_1}$ (*якщо* $m_1 \geq 1$),
$$(1.15)$$

$$\varlimsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \right] < (\sigma_j - \sigma_i)|1+\mu_0|$$

при $j = \overline{m_1+1, m}$ $(j \neq i)$. $\qquad$ (1.16)

Тоді для існування у рівняння (1.1) $\Pi^0_\omega(\mu_0)$-*розв'язків необхідно, а якщо виконується одна з наступних двох умов:*

$$\mu_0 \neq -\frac{1}{2}; \qquad \mu_0 = -\frac{1}{2} \quad i \quad \sigma_i < 0, \qquad (1.17)$$

то і достатньо, щоб

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)} = -(1+\mu_0)\sigma_i \qquad (1.18)$$

і справджувались при $t \in]a, \omega[$ *нерівності*

$$(1+\mu_0)\pi_\omega(t) < 0, \quad \alpha_i\mu_0\pi_\omega(t) < 0. \qquad (1.19)$$

Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення*

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = -\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0} I_{i2}(t)[1+o(1)], \qquad (1.20)$$

$$y'(t) = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)} y(t)[1+o(1)]. \qquad (1.21).$$

2. Допоміжні твердження.

Лема 2.1. *Якщо* $m_1 < m$ *і* $k \in \{m_1+1, \ldots, m\}$, *то*

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)} = 1 + \sigma_k. \qquad (2.1)$$

Якщо ж $m_1 \geq 1$, $k \in \{1, \ldots, m_1\}$ *і* m *відмінне від тих* k, *для яких* $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0 > 0$, *то*

$$\sigma_k \geq -1 \quad i \quad \lim_{y\downarrow 0} y\varphi_k'(y) = 0. \qquad (2.2)$$

Доведення. Нехай $k \in \{1, \ldots, m\}$ і відмінно від тих $k \in \{1, \ldots, m_1\}$, для яких $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0 > 0$. В цьому випадку виконуються умови (1.5).

Поклавши

$$z_k(y) = \frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)},$$

помічаємо, що

$$z_k'(y) = \frac{1}{y} z_k(y) \left[1 + \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k(y)} - z_k(y) \right]. \qquad (2.3)$$

У зв'язку з (1.5) відповідна до (2.3) функція $f(y,c) = \frac{1}{y} c \left[1 + \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k(y)} - c \right]$ при будь-якому значенні c, що відмінно від 0 і $1+\sigma_k$, зберігає знак в деякому правому околі нуля. Тому для функції z_k існує скінченна або рівна $\pm\infty$ границя при $y \downarrow 0$. Якщо припустити, що ця границя дорівнює $\pm\infty$, то з (2.3) одержимо

$$\frac{z_k'(y)}{z_k^2(y)} = -\frac{1}{y}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad y \downarrow 0.$$

Звідси після інтегрування отримаємо асимптотичне співвідношення

$$\frac{1}{z_k(y)} \sim \ln y \quad \text{при} \quad y \downarrow 0,$$

в якому вираз, що стоїть ліворуч, прямує до нуля, а праворуч - до $-\infty$ при $y \downarrow 0$, чого бути не може. Отже, $\lim\limits_{y\downarrow 0} z_k(y) = c = \text{const}$. Далі, покажемо, що c може бути рівним лише або 0, або $1+\sigma_k$. Дійсно, якщо б це було не так, то з (2.3) з урахуванням (1.5) одержали б співвідношення

$$z_k'(y) = \frac{c}{y}[1+\sigma_k - c + o(1)] \quad \text{при} \quad y \downarrow 0,$$

звідки отримали б асимптотичне зображення

$$z_k(y) = c[1+\sigma_k - c + o(1)] \ln y \quad \text{при} \quad y \downarrow 0,$$

яке суперечить умові $\lim\limits_{y\downarrow 0} z_k(y) = c = \text{const}$. Таким чином,

$$\lim_{y\downarrow 0} z_k(y) = \begin{cases} \text{або} \quad 0, \\ \text{або} \quad 1+\sigma_k. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Звідси, зокрема, випливає, що при $\sigma_k = -1$ твердження леми вірні.

Нехай $\sigma_k \neq -1$. Тоді, якщо $k \in \{m_1+1, \ldots, m\}$ (випадок $m_1 < m$), то у зв'язку з (1.4), (1.5) і (2.4) для обчислення $\lim\limits_{y\downarrow 0} z_k(y)$ може бути використано правило Лопіталя у формі Штольця (див. [5], стор. 115). Тому отримаємо

$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)}=\lim_{y\downarrow 0}\frac{\varphi_k'(y)+y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)}=$$

$$=1+\lim_{y\downarrow 0}\frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k(y)}=1+\sigma_k.$$

Отже, встановлено вірність першого твердження леми.

Якщо $k\in\{1,\dots,m_1\}$ (випадок $m_1\geq 1$) і відмінно від тих значень, для яких $\varphi_k(y)\equiv\varphi_k^0>0$, то $\lim\limits_{y\downarrow 0}z_k(y)=0$, так як в протилежному випадку через (2.4) і (1.3) отримали б асимптотичне співвідношення

$$y\varphi_k'(y)\sim(1+\sigma_k)\varphi_k^0\neq 0 \quad \text{при} \quad y\downarrow 0,$$

звідки випливає, що $\lim\limits_{y\downarrow 0}\varphi_k(y)=\pm\infty$, але це суперечить (1.3). Таким чином, виконується друга з умов (2.2). Враховуючи її, з (2.3) маємо

$$\frac{z_k'(y)}{z_k(y)}\sim\frac{1+\sigma_k}{y} \quad \text{при} \quad y\downarrow 0.$$

Звідси отримуємо асимптотичне співвідношення

$$\ln|z_k(y)|\sim(1+\sigma_k)\ln y \quad \text{при} \quad y\downarrow 0,$$

яке не суперечить умові $\lim\limits_{y\downarrow 0}z_k(y)=0$ лише у випадку, коли виконується нерівність $\sigma_k>-1$. Лему доведено.

Лема 2.2. *Нехай* $y:[t_0,\omega[\longrightarrow]0,y_0]$- $\Pi_\omega^0(\mu_0)$*- розв'язок рівняння* (1.1)*. Тоді*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\mu_0+1 \text{ при } |\mu_0|<+\infty \qquad (2.5)$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\pm\infty \text{ при } \mu_0=\pm\infty. \qquad (2.6)$$

Більш того, якщо $|\mu_0|<+\infty$*, то справджується нерівність* $(\mu_0+1)\pi_\omega(t)\leq 0$ *при* $t\in[a,\omega[$[2]*, а якщо* $\mu_0=+\infty$ ($\mu_0=-\infty$)*, то* $\omega<+\infty$ ($\omega=+\infty$)*.*

Доведення. Нехай $y:[t_0,\omega[\longrightarrow]0,y_0]$- довільний $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1). Тоді, якщо $\mu_0=\pm\infty$, то з умови 3) означення 1.1 безпосередньо випливає справедливість граничного співвідношення (2.6). Якщо ж $|\mu_0|<+\infty$, то поклавши

$$z(t)=\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}$$

і враховуючи, що

$$z'(t)=\frac{1}{\pi_\omega(t)}z(t)\left[1+\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}-z(t)\right],$$

точно в такий же спосіб, як при доведенні леми 2.1 встановлюємо існування скінченної границі при $t\uparrow\omega$ для функції z. Звідси з урахуванням умови 1) означенння 1.1 випливає, що $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\pi_\omega(t)y'(t)=0$. Тому, застосовуючи правило Лопиталя, одержимо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)+y'(t)}{y'(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}+1=1+\mu_0,$$

тобто має місце (2.5). Справедливість другого твердження леми безпосередньо випливає з (2.5) і (2.6), якщо додатково врахувати знакові умови з означення 1.1 та вид функції $\pi_\omega(t)$.

Лема 2.3. *Нехай* $|\mu_0|<+\infty$, $m_1\geq 1$ *і для деякого* $i\in\{1,\dots,m_1\}$ *виконуються припущення* (1.6), (1.7)*. Тоді для кажного* $\Pi_\omega^0(\mu_0)$*- розв'язку рівняння* (1.1) *при будь-якому* $j\in\{1,\dots,m\}$*, відмінному від* i*,*

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))}=0. \qquad (2.7)$$

Доведення. Нехай $y:[t_0,\omega[\longrightarrow]0,y_0]$- довільний $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1). Тоді через умови 1) означення 1.1, (1.3) і (1.6), очевидно, що (2.7) справджується для будь-якого $j\in\{1,\dots,m_1\}$, відмінного від i.

Припустимо тепер, що $j\in\{m_1+1,\dots,m\}$ (якщо $m_1<m$) і позначимо

$$z_j(t)=\frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)}.$$

[2]При $\omega=+\infty$ вважаемо, що $a>0$.

Звідси випливає, що

$$z_j'(t) = \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)} \times$$

$$\times \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{\varphi_j'(y(t))y'(t)}{\varphi_j(y(t))} \right],$$

або

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} \right]. \qquad (2.8)$$

Тут на підставі лем 2.1 і 2.2

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} = -|1+\mu_0|(1+\sigma_j).$$

Тому у зв'язку з умовами (1.7) існують числа $\gamma_j < 0$ і $t_j \in [t_0, \omega[$ такі, що при $t \in [t_j, \omega[$ справджується нерівність

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} +$$

$$+ \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} < \gamma_j.$$

Враховуючи цю нерівність із (2.8) одержимо

$$z_j'(t) \le \frac{\gamma_j z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_j, \omega[. \qquad (2.9)$$

Звідси знаходимо, що

$$\ln z_j(t) \le C + (\gamma_j \operatorname{sign} \pi_\omega(t)) \ln |\pi_\omega(t)|$$

при $t \in [t_j, \omega[$, де C- деяка дійсна стала. Тут вираз, що стоїть праворуч, на підставі умови $\gamma_j < 0$ і виду функції $\pi_\omega(t)$ прямує до $-\infty$ при $t \uparrow \omega$. Тому $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z_j(t) = 0$. Якщо ж на додаток до цього врахувати (1.3) при $k = i$, то одержимо (2.7).

Лема 2.4. *Нехай* $|\mu_0| < +\infty$, $m_1 < m$ *і для деякого* $i \in \{m_1+1, \ldots, m\}$ *виконуються припущення* (1.15), (1.16). *Тоді для кожного* $\Pi_\omega^0(\mu_0)$*- розв'язку рівняння* (1.1) *мають місце при будь-якому* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *відмінному від* i, *граничні співвідношення* (2.7).

Доведення. Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$- довільний $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1). Виберемо спочатку (якщо $m_1 \ge 1$) довільним чином $j \in \{1, \ldots, m_1\}$ і розглянемо функцію

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)}{p_i(t)\varphi_i(y(t))}.$$

Для неї маємо

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} \right].$$

На підставі означення 1.1, лем 2.1, 2.2 і умови (1.15) існують числа $\gamma_j < 0$ и $t_j \in [t_0, \omega[$ такі, що при $t \in [t_j, \omega[$ справджується нерівність

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} -$$

$$- \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \cdot \frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} < \gamma_j.$$

Тому із попереднього співвідношення одержимо нерівність (2.9). З (2.9), як було встановлено при доведені леми 2.3, випливає, що $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z_j(t) = 0$. Звідси з урахуванням умови (1.3) приходимо до висновку про справедливість граничного співвідношення (2.7) при $j \in \{1, \ldots, m_1\}$.

Тепер виберемо довільним чином число $j \in \{m_1+1, \ldots, m\}$, що відмінно від i (якщо таке існує), і введемо функцію

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))}.$$

Для цієї функції

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)} \left(\frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} - \frac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))} \right) \right].$$

Звідси з урахуванням означення 1.1, лем 2.1, 2.2 і умови (1.16) випливає існування сталих

$\gamma_j < 0$ і $t_j \in [t_0, \omega[$ таких, що справджується нерівність (2.9), яка, в свою чергу, як було встановлено при доведені леми 2.3, гарантує виконання умови $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z_j(t) = 0$. Отже, при будь-якому $j \in \{m_1+1, \dots, m\}$, що відмінно від i, граничне співвідношення (2.7) також справедливо. Лему повністю доведено.

Аналогічним чином встановлюються наступні дві леми.

Лема 2.5. *Нехай* $m_1 \geq 1$ *і для деякого* $i \in \{1, \dots, m_1\}$ *виконуються припущення* (1.6), (1.13). *Тоді для кожного* $\Pi^0_\omega(\pm\infty)$*- розв'язку рівняння* (1.1) *мають місце при будь-якому* $j \in \{1, \dots, m\}$*, відмінному від* i*, граничні співвідношення* (2.7).

Лема 2.6. *Нехай* $m_1 < m$ *і для деякого* $i \in \{m_1+1, \dots, m\}$ *виконуються нерівності* $\sigma_i < -1$,

$$\sigma_j > \sigma_i \quad \text{при} \quad j = \overline{m_1+1, m}, \tag{2.10}$$

а також при $j = \overline{1, m}$ $\quad (j \neq i)$ *умови*

$$\varlimsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \right] < +\infty. \tag{2.11}$$

Тоді для кожного $\Pi^0_\omega(\pm\infty)$*- розв'язку рівняння* (1.1) *мають місце при будь-якому* $j \in \{1, \dots, m\}$*, відмінному від* i*, граничні співвідношення* (2.7).

3. Доведення теорем.

Доведення теореми 1.1. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$- довільний $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1). Тоді згідно з лемою 2.2 справджується перша із нерівностей (1.10). Крім того, на підставі умов (1.6) і (1.7) із леми 2.3 випливає, що для даного розв'язку при $j = \overline{1, m}$ і $j \neq i$ мають місце граничні співвідношення (2.7). Враховуючи їх із (1.1) дістанемо

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тут $i \in \{1, \dots, m_1\}$ і тому через (1.3) будемо мати

$$y''(t) = \alpha_i \varphi_i^0 p_i(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси, з урахуванням означення 1.1, спочатку одержуємо асимптотичне зображення (1.12) і другу із нерівностей (1.10), а потім асимптотичне зображення (1.11) і умови (1.9), (1.8).

Достатність. Застосовуючи до рівняння (1.1) перетворення

$$y(t) = -\alpha_i \varphi_i^0 \int_t^\omega I_{i1}(s)\, ds [1 + v_1(t)], \tag{3.1}$$

$$y'(t) = \alpha_i \varphi_i^0 I_{i1}(t)[1 + v_2(t)],$$

одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{q_i'(t)}{q_i(t)}[v_2 - v_1], \\[2ex] v_2' = \dfrac{I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} \Bigg[-1 - v_2 + \end{cases} \tag{3.2}$$

$$+ \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]}{\alpha_i \varphi_i^0 p_i(t)} \varphi_k\left(q_i(t)[1 + v_1]\right) \Bigg],$$

де

$$q_i(t) = -\alpha_i \varphi_i^0 \int_t^\omega I_{i1}(s)\, ds.$$

Цю систему розглянемо на множині $\Omega = [t_1, \omega[\times D$, де

$$D = \left\{ (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |v_k| \leq \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2 \right\},$$

а число $t_1 \in [a, \omega[$ обрано з урахуванням (1.9) і другої із нерівностей (1.10) таким, щоб при $t \in [t_1, \omega[$ справджувалась нерівність $q_i(t) \leq \frac{2}{3} y_0$.

Так як для кожного $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\frac{\partial \varphi_k\left(q_i(t)[1 + v_1]\right)}{\partial v_1} = q_i(t) \varphi_k'\left(q_i(t)[1 + v_1]\right),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_k\left(q_i(t)[1 + v_1]\right)}{\partial v_1^2} = q_i^2(t) \varphi_k''\left(q_i(t)[1 + v_1]\right),$$

то згідно з формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа

$$\varphi_k\left(q_i(t)[1 + v_1]\right) = \varphi_k\left(q_i(t)\right) +$$

$$+ q_i(t) \varphi_k'\left(q_i(t)\right) v_1 + q_i^2(t) \varphi_k''\left(q_i(t)[1 + \xi_k]\right) v_1^2,$$

де $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$ така, що $|\xi_k(t, v_1)| < |v_1| \le \frac{1}{2}$ при будь-якому $t \in [t_1, \omega[$. Звернемо увагу на те, що цей розклад має вид $\varphi_k\left(q_i(t)[1+v_1]\right) \equiv \varphi_k^0$, для тих $k \in \{1, \dots, m_1\}$, при яких $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0 > 0$.

Враховуючи отриманий розклад перепишемо систему рівнянь (3.2) у виді

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{q_i'(t)}{q_i(t)}[v_2 - v_1], \\ \\ v_2' = \dfrac{I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)}[f(t) + c_1(t)v_1 - v_2 + V(t, v_1)], \end{cases} \tag{3.3}$$

де

$$f(t) = -1 + \frac{\varphi_i\left(q_i(t)\right)[1 + r_i(t)]}{\varphi_i^0} +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k\left(q_i(t)\right)}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i^0},$$

$$c_1(t) = \frac{[1 + r_i(t)]q_i(t)\varphi_i'\left(q_i(t)\right)}{\varphi_i^0} +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]q_i(t)\varphi_k'\left(q_i(t)\right)}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i^0},$$

$$V(t, v_1) = \frac{q_i^2(t)\, v_1^2}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i^0} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k''\left(q_i(t)[1 + \xi_k(t, v_1)]\right).$$

У зв'язку з (1.8)-(1.10) $q_i(t) > 0$ при $t \in]t_1, \omega[$,

$$\lim_{t \uparrow \omega} q_i(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q_i'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) q_i''(t)}{q_i'(t)} = \mu_0.$$

Отже, функція q_i має ті ж самі асимптотичні властивості, що і будь-який $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1). Тому на підставі лем 2.1, 2.3 і умов (1.3),(1.4)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t)\varphi_k(q_i(t))}{p_i(t)\varphi_i^0} = 0 \text{ при } k = \overline{1, m} \quad (k \ne i),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \varphi_k(q_i(t)) = \varphi_k^0 > 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q_i(t)\varphi_k'(q_i(t)) = 0$$

при $k = \overline{1, m_1}$,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{q_i(t)\varphi_k'(q_i(t))}{\varphi_k(q_i(t))} = 1 + \sigma_k \text{ при } k = \overline{m_1 + 1, m}.$$

Якщо ж врахувати, що $|\xi_k(t, v_1)| < \frac{1}{2}$ при $t \in [t_1, \omega[$ і $|v_1| \le \frac{1}{2}$, а також лему 2.1 і умови (1.5), то при будь-яких $k \in \{1, \dots, m\}$, відмінних від тих, для яких $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0 > 0$, будемо мати

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{q_i^2(t)[1 + \xi_k(t, v_1)]^2 \varphi_k''(q_i(t)[1 + \xi_k(t, v_1)])}{\varphi_k(q_i(t)[1 + \xi_k(t, v_1)])} =$$

$$= \sigma_k(1 + \sigma_k) \text{ равномерно по } v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

У зв'язку з умовами (1.3)-(1.5) кожна з функцій φ_k, $k \in \{1, \dots, m\}$, є (див. монографію [3], Розд.1, стор. 15) правильно мінливою у нулі. Тому для кожного $k \in \{1, \dots, m\}$ знайдуться сталі $l_k, L_k > 0$ такі, що при $t \in [t_1, \omega[$ і $|v_1| \le \frac{1}{2}$ буде справджуватись нерівність

$$l_k\varphi_k(q_i(t)) \le \varphi_k\left(q_i(t)[1 + \xi_k(t, v_1)]\right) \le$$

$$\le L_k\varphi_k(q_i(t)).$$

На підставі наведених вище умов

$$\lim_{t \uparrow \omega} f(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_1(t) = 0$$

и

$$\lim_{v_1 \to 0} \frac{V(t, v_1)}{v_1} = 0 \text{ равномерно по } t \in [t_1, \omega[.$$

Таким чином, встановлено, що для системи рівнянь (3.3) виконано всі умови леми 2.1 з праці [6]. З цієї леми випливає, що система диференціальних рівнянь (3.3) має хоча б один розв'язок $(v_k)_{k=1}^2 : [t_2, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($t_2 \in [t_1, \omega[$), який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$. Якщо ж врахувати, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} \ln|I_{i1}(t)| = \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad A_{i1} = a, \\ -\infty & \text{при} \quad A_{i1} = \omega \end{cases}$$

і прийняти до уваги зауваження 1.1 з праці [7], то неважко зрозуміти, що у випадку

$\alpha_i < 0$, тобто коли у зв'язку з (1.10) границя інтегрування $A_{i1} = a$, у системи (3.3) існує однопараметричне сім'я розв'язків, зникаючих при $t \uparrow \omega$. З урахуванням перетворення (3.1) кожному такому розв'язку системи (3.3) відповідає розв'язок $y : [t_2, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$ рівняння (1.1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (1.11) і (1.12). Використовуючи ці зображення і умови (1.8)-(1.10), переконуємося в тому, що кожний такий розв'язок задовольняє всі умови означення $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язку рівняння (1.1). Теорему повністю доведено.

Доведення теореми 1.2. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$- довільний $\Pi^0_\omega(+\infty)$- розв'язок ($\Pi^0_\omega(-\infty)$- розв'язок) рівняння (1.1). Тоді згідно з лемою 2.2 $\omega < +\infty$ ($\omega = +\infty$). Крім того, через (1.6) і (1.13) для даного розв'язку на підставі леми 2.5 мають місце при $j = \overline{1, m}$ і $j \neq i$ граничні співвідношення (2.7). Враховуючи їх із (1.1) дістанемо

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси з урахуванням означення $\Pi^0_\omega(+\infty)$-розв'язку ($\Pi^0_\omega(-\infty)$- розв'язку) рівняння (1.1) випливають асимптотичні зображення (1.11), (1.12), умови (1.9), (1.14) і друга із нерівностей (1.10).

Достатність. Припускаючи виконаними умови $\omega < +\infty$ ($\omega = +\infty$), (1.9), (1.14) і другу із нерівностей (1.10), рівняння (1.1) за допомогою перетворення (3.1) зведемо до системи рівнянь виду (3.2). Після цього на такий же спосіб, як при доведенні достатності теореми 3.1, встановлюємо, що ця система має хоча б один розв'язок $(v_k)^2_{k=1} : [t_2, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($t_2 \in [t_1, \omega[$), який прямує до нуля при $t \uparrow \omega$. Йому з урахуванням перетворення (3.1) відповідає $\Pi^0_\omega(+\infty)$- розв'язок ($\Pi^0_\omega(-\infty)$- розв'язок) $y : [t_2, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$ рівняння (1.1), що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (1.11) і (1.12). Теорему доведено.

При доведенні теореми 1.3, що стосується до випадку $m_1 < m$, буде використана при $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$ наступна допоміжна функція

$$\Phi_i(y) = \int\limits_{B_i}^{y} \frac{dz}{\varphi_i(z)},$$

де

$$B_i = \begin{cases} y_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_0^{y_0} \frac{dz}{\varphi_i(z)} = +\infty, \\ 0, & \text{якщо} \quad \int\limits_0^{y_0} \frac{dz}{\varphi_i(z)} < +\infty. \end{cases}$$

Враховуючи лему 2.1, помітимо, що при $\sigma_i > 0$ границя інтегрування $B_i = y_0$, а при $\sigma_i < 0$– $B_i = 0$. Звернемо також увагу на те, що для функції Φ_i існує обернена функція Φ_i^{-1}, яка визначена на проміжку $]-\infty, 0]$, коли $B_i = y_0$, або на проміжку $]0, b_i]$, де $b_i = \int_0^{y_0} \dfrac{dz}{\varphi_i(z)}$, коли $B_i = 0$, причому для них

$$\lim_{y \downarrow 0} \Phi_i(y) = -\infty, \quad \lim_{z \to -\infty} \Phi_i^{-1}(z) = 0 \qquad (3.4_1)$$

при $B_i = y_0$ і

$$\lim_{y \downarrow 0} \Phi_i(y) = 0, \quad \lim_{z \downarrow 0} \Phi_i^{-1}(z) = 0 \qquad (3.4_2)$$

при $B_i = 0$.

Доведення теореми 1.3. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$- довільний $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1). Тоді згідно з лемою 2.2 виконується перша із нерівностей (1.19), а згідно з лемою 2.4 мають місце при $j = \overline{1, m}$, відмінних від i, граничні співвідношення (2.7). Враховуючи (2.7) з (1.1) одержимо

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y(t))[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Так як $\mu_0 \neq 0$ і у зв'язку з означенням $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язку $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0$, то звідси випливає, що при $t \uparrow \omega$

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = \frac{\alpha_i}{\mu_0} p_i(t) \pi_\omega(t)[1 + o(1)]. \qquad (3.5)$$

Із цього асимптотичного зображення, з урахуванням перших двох умов означення 1.1, приходимо до висновку про справедливість другої із нерівностей (1.19).

Далі, застосовуючи правило Лопиталя у формі Штольця (див. [5], стор. 115), на підставі (3.5), нерівності $\sigma_i \neq 0$ і леми 2.1, дістанемо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)}{I_{i2}(t)\varphi_i(y(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\dfrac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)}{I_{i2}(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))}\left[1-\dfrac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))}\right]}{\pi_\omega(t)p_i(t)}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{\alpha_i}{\mu_0}\pi_\omega(t)p_i(t)[1-(1+\sigma_i)]}{\pi_\omega(t)p_i(t)}=-\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0}.$$

Отже, має місце при $t\uparrow\omega$ асимптотичне зображення (1.20). Вірність при $t\uparrow\omega$ асимптотичного зображення (1.21) випливає із леми 2.2.

Використовуючи тепер (3.5) і (1.20), одержимо

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}=-\frac{\pi_\omega^2(t)p_i(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Звідси з урахуванням леми 2.2 і виду функції $I_{i2}(t)$ випливає, що виконується умова (1.18).

Достатність. Нехай поряд з (1.18) і (1.19) виконується одна з умов (1.17).

Рівняння (1.1) за допомогою перетворення

$$\Phi_i(y(t))=\frac{\alpha_i}{\mu_0}I_{i2}(t)[1+v_1(x)], \tag{3.6}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+\mu_o}{\pi_\omega(t)}[1+v_2(x)], \quad x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|,$$

де

$$\beta=\begin{cases}1, & \text{якщо} \quad \omega=+\infty,\\ -1, & \text{якщо} \quad \omega<+\infty,\end{cases}$$

зведемо до системи рівнянь

$$\begin{cases} v_1'=\beta\left[-q_i(t)(1+v_1)+(1+v_2)F_1(t,v_1)\right] \\ v_2'=\beta\left[1+v_2-(1+\mu_0)(1+v_2)^2+F_2(t,v_1)\right]\end{cases} \tag{3.7}$$

в якій

$$q_i(t)=\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)},$$

$$F_1(t,v_1)=\frac{\alpha_i\mu_0(1+\mu_0)}{I_{i2}(t)}\cdot\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)},$$

$$F_2(t,v_1)=\frac{\pi_\omega^2(t)}{(1+\mu_0)Y_i(t,v_1)}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)\Big],$$

$$Y_i(t,v_1)=\Phi_i^{-1}\left(\frac{\alpha_i}{\mu_0}I_{i2}(t)(1+v_1)\right)$$

и

$$t=\begin{cases} e^x & \text{при} \quad \omega=+\infty,\\ \omega-e^{-x} & \text{при} \quad \omega<+\infty.\end{cases}$$

На підставі нерівностей $\sigma_i\neq 0$, $\mu_0\neq 0,-1$ і умов (1.18), (1.19)

$$\alpha_i\mu_0\sigma_i I_{i2}(t)<0 \quad \text{при} \quad t\in]a,\omega[,$$
$$\lim_{t\uparrow\omega}I_{i2}(t)=\begin{cases}\pm\infty & \text{при} \quad \sigma_i>0,\\ 0 & \text{при} \quad \sigma_i<0.\end{cases} \tag{3.8}$$

Враховуючи (3.8) підберемо у випадку $\sigma_i<0$ число $t_1\in]a,\omega[$ таким, щоб при $t\in[t_1,\omega[$ справджувалась нерівність

$$0<\frac{3\alpha_i\mu_0}{2}I_{i2}(t)<b_i,$$

де b_i визначено при опису властивостей функцій Φ_i, Φ_i^{-1}. Якщо ж $\sigma_i>0$, то у якості t_1 вибираємо будь-яке число з проміжку $]a,\omega[$.

Поклавши $x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_1)|$, розглянемо систему рівнянь (3.7) на множині

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D,$$

де

$$D=\left\{(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2\,:\,|v_k|\leq\frac{1}{2},\ k=1,2\right\}.$$

З огляду на вибір числа t_1, вид функції Φ_i і умови (3.4_k) $(k=1,2)$, (3.8) $0<Y_i(t(x),v_1)\leq y_0$ при $x\geq x_0$ і $|v_1|\leq\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to+\infty}Y_i(t(x),v_1)=\lim_{t\uparrow\omega}Y_i(t,v_1)=0 \tag{3.9}$$

рівномірно за $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Крім того, маємо

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_i}{\mu_0}\, I_{i2}(t)\left[1 - \frac{Y_i(t,v_1)\varphi_i'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)}\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)}\right) = -\left(\frac{\alpha_i}{\mu_0}\, I_{i2}(t)\right)^2 \times$$

$$\times \frac{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)}{Y_i(t,v_1)}\left\{\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_i'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)} + \right.$$

$$+ \frac{Y_i^2(t,v_1)\varphi_i''\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)} -$$

$$\left. - \left[\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_i'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)}\right]^2\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)}{Y_i(t,v_1)}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_i}{\mu_0}\,\frac{I_{i2}(t)\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)}{Y_i^2(t,v_1)} \times$$

$$\times \left[\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_k'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)} - 1\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)}{Y_i(t,v_1)}\right) = \left[\frac{\alpha_i}{\mu_0}\, I_{i2}(t)\right]^2 \times$$

$$\times \frac{\varphi_i^2\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)}{Y_i^3(t,v_1)} \times$$

$$\times \left\{\frac{Y_i^2(t,v_1)\varphi_k''\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)} + \right.$$

$$+ \frac{Y_i^2(t,v_1)\varphi_i'\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_k'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)} -$$

$$-2\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_k'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)} -$$

$$\left. - \frac{Y_i(t,v_1)\varphi_i'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)} + 2\right\}.$$

Тоді відповідно до формули Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа мають місце при кажному фіксованому $t \in [t_1, \omega[$ розвинення

$$\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)} = \frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)} +$$

$$+ \frac{\alpha_i}{\mu_0}\, I_{i2}(t)\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}\right] v_1 -$$

$$- \left(\frac{\alpha_i}{\mu_0}\, I_{i2}(t)\right)^2 \left[\frac{Y_i(t,\xi_0)\varphi_i'\left(Y_i(t,\xi_0)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,\xi_0)\right)} + \right.$$

$$+ \frac{Y_i^2(t,\xi_0)\varphi_i''\left(Y_i(t,\xi_0)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,\xi_0)\right)} -$$

$$\left. - \left(\frac{Y_i(t,\xi_0)\varphi_i'\left(Y_i(t,\xi_0)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,\xi_0)\right)}\right)^2\right] \frac{\varphi_i\left(Y_i(t,\xi_0)\right)}{Y_i(t,\xi_0)} v_1^2,$$

$$\frac{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)}{Y_i(t,v_1)} = \frac{\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)}{Y_i(t,0)} +$$

$$+ \frac{\alpha_i}{\mu_0}\,\frac{I_{i2}(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)}{Y_i^2(t,0)} \times$$

$$\times \left[\frac{Y_i(t,0)\varphi_k'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)} - 1\right] v_1 +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_i}{\mu_0}\, I_{i2}(t)\right)^2 \frac{\varphi_i^2\left(Y_i(t,\xi_k)\right)\varphi_k\left(Y_i(t,\xi_k)\right)}{Y_i^3(t,\xi_k)} \times$$

$$\times \left[\frac{Y_i^2(t,\xi_k)\varphi_k''\left(Y_i(t,\xi_k)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,\xi_k)\right)} + Y_i(t,\xi_k) \times \right.$$

$$\times \frac{\varphi_k'\left(Y_i(t,\xi_k)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,\xi_k)\right)}\left(\frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'\left(Y_i(t,\xi_k)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,\xi_k)\right)} - 2\right) -$$

$$\left. - \frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'\left(Y_i(t,\xi_k)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,\xi_k)\right)} + 2\right] v_1^2,$$

де $\xi_k = \xi_k(t,v_1)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ такі, що

$$|\xi_k(t,v_1)| < |v_1| \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$$
$$\text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{и} \quad v_1 \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]. \tag{3.10}$$

Враховуючи ці розвинення, перепишемо систему (3.7) у вигляді

$$\begin{cases} v_1' = \beta\Big[f_1(x) + \sum\limits_{k=1}^{2} c_{1k}(x)v_k + V_1(x,v_1,v_2)\Big], \\ v_2' = \beta\Big[f_2(x) + \sum\limits_{k=1}^{2} c_{2k}(x)v_k + V_2(x,v_1,v_2)\Big], \end{cases} \tag{3.11}$$

де

$$f_1(x(t)) = -q_i(t) + \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{\alpha_i I_{i2}(t)} \cdot \frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)},$$

$$f_2(x(t)) = -\mu_0 + \frac{q_i(t)}{1+\mu_0}\frac{I_{i2}(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}{Y_i(t,0)}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k p_k(t)\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)}{p_i(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}[1+r_k(t)],$$

$$c_{11}(x(t)) = -q_i(t) +$$

$$+(1+\mu_0)\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}\right],$$

$$c_{12}(x(t)) = \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{\alpha_i I_{i2}(t)} \cdot \frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)},$$

$$c_{21}(x(t)) = \frac{q_i(t)}{\mu_0(1+\mu_0)}\left[\frac{I_{i2}(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}{Y_i(t,0)}\right]\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\left(Y_i(t.0)\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{Y_i(t,0)\varphi_k'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)} - 1\right],$$

$$c_{22}(x(t)) = -1 - 2\mu_0,$$

$$V_1(x(t),v_1,v_2) = (1+\mu_0)v_1\times$$

$$\times\left[\left(1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}\right)v_2 +\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_0\, v_1(1+v_2)}{\alpha_i I_{i2}(t)}\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i\left(Y_i(t,v_1)\right)}\right)\Bigg|_{v_1=\xi_0(t,v_1)}\right],$$

$$V_2(x(t),v_1,v_2) = -(1+\mu_0)v_2^2 +$$

$$+\frac{q_i(t)I_{i2}(t)v_1^2}{1+\mu_0}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]}{p_i(t)}\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)}{Y_i(t,v_1)}\right)\Bigg|_{v_1=\xi_k(t,v_1)}.$$

Далі, встановимо властивості функцій, що містяться в правій частині системи (3.11).

На підставі умов (1.3)-(1.5), леми 2.1 і умови (3.9) справджуються рівномірно за $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ границі

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_k'\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,v_1)\right)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k = \overline{1,m_1}, \\ 1+\sigma_k & \text{при} \quad k = \overline{m_1+1,m} \end{cases} \tag{3.12}$$

і

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,v_1)\varphi_k''\left(Y_i(t,v_1)\right)}{\varphi_k'\left(Y_i(t,v_1)\right)} = \sigma_k \tag{3.13}$$

при будь-яких $k \in \{1,\ldots,m\}$, відмінних від тих, для яких $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0 > 0$.

Враховуючи, що $i \in \{m_1+1,\ldots,m\}$, з використанням правила Лопиталя у формі Штольца і (3.12), дістанемо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)I_{i2}(t)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right)'}{I_{i2}'(t)} =$$

$$= \frac{\alpha_i}{\mu_0}\lim_{t\uparrow\omega}\left[1 - \frac{Y_i(t.0)\varphi_i'\left(Y_i(t,0)\right)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}\right] = -\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0}.$$

Звідси випливає, що при $t \uparrow \omega$

$$\frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)} = -\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0}I_{i2}(t)[1+o(1)]. \tag{3.14}$$

Оскільки $Y_i'(t,0) = \frac{\alpha_i}{\mu_0}I_{i2}'(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)$, то через (3.14) і (1.18) одержимо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)Y_i'(t,0)}{Y_i(t,0)} = 1+\mu_0,$$

тобто $Y_i(t,0)$ має ті ж самі властивості, що і будь-який $\Pi_\omega^0(\mu_0)$- розв'язок рівняння (1.1), які було використано при доведенні леми 2.4. З огляду на цей факт та виконання умов (1.15) і (1.16) леми 2.4 будемо мати

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_k(t)\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)}{p_i(t)\varphi_i\left(Y_i(t,0)\right)}=0 \qquad (3.15)$$

при будь-якому $k\in\{1,\dots,m\}$, що відмінно від i.

Нарешті, помітимо, що всі функції φ_k, де k відмінно від тих значень, для яких $\varphi_k(y)\equiv\varphi_k^0$, є строго монотонними на проміжку $]0,y_0]$ і правильно мінливими в нулі (див. [3]). Тому для кожного $k\in\{1,\dots.m\}$ існують сталі $l_k,L_k>0$ такі, що при будь-яких $t\in[t_1,\omega[$ і $\xi\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

$$l_k\le\frac{\varphi_k\left(Y_i(t,\xi)\right)}{\varphi_k\left(Y_i(t,0)\right)}\le L_k. \qquad (3.16)$$

Тепер, приймаючи до уваги умови (3.9), (3.10), (3.12)- (3.16) і (1.18), а також заміну незалежної змінної $x=\beta\ln|\pi_\omega(t)|$, переконуємося у тому, що в системі (3.11)

$$\lim_{x\to+\infty}f_k(x)=0\quad(k=1,2),\qquad \lim_{x\to+\infty}c_{11}(x)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}c_{12}(x)=-\sigma_i(1+\mu_0),$$

$$\lim_{x\to+\infty}c_{21}(x)=-\mu_0,\qquad \lim_{x\to+\infty}c_{22}(x)=-1-2\mu_0,$$

а функції V_1,V_2 такі, що

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to0}\frac{V_k(x,v_1v_2)}{|v_1|+|v_2|}=0\quad(k=1,2)$$

рівномірно за $x\in[x_0,+\infty[$.

Отже, система (3.11) є квазілінійною системою диференціальних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами.

Записавши характеристичне рівняння для граничної матриці коефіцієнтів лінійної частини цієї системи у виді

$$\begin{vmatrix}-\beta\lambda & -\beta\sigma_i(1+\mu_0)\\ -\beta\mu_0 & -\beta(1+2\mu_0)-\beta\lambda\end{vmatrix}=0,$$

одержимо

$$\lambda^2+(1+2\mu_0)\lambda-\sigma_i\mu_0(1+\mu_0)=0.$$

Оскільки виконується одна з умов (1.17), то це рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною.

Таким чином, для системи диференціальних рівнянь (3.11) виконано всі умови теореми 2.1 роботи [7]. На підставі цієї теореми система (3.11) має хоча б один розв'язок $(v_k)_{k=1}^2:[x_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$, де $x_1\ge x_0$, який прямує до нуля при $x\to+\infty$. Йому з урахуванням перетворення (3.6) відповідає розв'язок $y:[t_2,\omega[\longrightarrow]0,y_0]$ рівняння (1.1), що допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_i(y(t))=\frac{\alpha_i}{\mu_0}I_{i2}(t)[1+o(1)],$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{1+\mu_o}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)].$$

А так як для цього розв'язку

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_i(y(t))}{\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_i'(y(t))}{\left(\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)'}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{1}{1-\frac{y(t)\varphi_i'(y(t)}{\varphi_i(y(t))}}=-\frac{1}{\sigma_i},$$

то з останніх зображень одержимо зображення виду (1.20), (1.21). Теорему повністю доведено.

4. Приклад рівняння зі степеневими коефіцієнтами. Проілюструємо отримані результати на прикладі диференціального рівняння

$$y''=a_1t^{\gamma_1}+a_2t^{\gamma_2}y^{\sigma_2}\sin y+a_3t^{\gamma_3}y^{1+\sigma_3}|\ln y|^\lambda, \qquad (4.1)$$

де

$$(t,y)\in]0,+\infty[\times]0,1[,$$

$a_k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\gamma_k\in\mathbb{R}$ $(k=1,2,3)$, а $\sigma_2,\sigma_3,\lambda\in\mathbb{R}$ і такі, що $\sigma_2\ne-1$, $|1+\sigma_3|+|\lambda|\ne0$.

Тут у відповідності з (1.1)

$$\alpha_k=\operatorname{sign}a_k,\quad p_k(t)=|a_k|t^{\gamma_k}\quad(k=1,2,3),$$

$$\varphi_1(y)\equiv1,\quad \varphi_2(y)=y^{\sigma_2}\sin y,$$

$$\varphi_3(y)=y^{1+\sigma_3}|\ln y|^\lambda,$$

причому при будь-якому $k\in\{2,3\}$ $\varphi_k'(y)\ne0$ у правому околі нуля і

$$\lim_{y\downarrow0}\frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)}=\sigma_k.$$

Отже, маємо рівняння виду (1.1), в якому $m_1 = 1$ і $m = 3$.

Спочатку, вважаючи, що $\omega = +\infty$, з'ясуємо питання про існування у рівняння (4.1) $\Pi^0_{+\infty}(\mu_0)$- розв'язків та їх асимптотику при $t \to +\infty$. В цьому випадку $\pi_\omega(t) = t$,

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p_k'(t)}{p_k(t)} \equiv \gamma_k \quad (k = 1, 2, 3), \tag{4.2}$$

$$I_{11}(t) = |a_1| \int\limits_{A_{11}}^{t} \tau^{\gamma_1}\, d\tau, \tag{4.3}$$

$$I_{i2}(t) = |a_i| \int\limits_{A_{i2}}^{t} \tau^{1+\gamma_i}\, d\tau, \quad (i = 2, 3), \tag{4.4}$$

де

$$A_{11} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \gamma_1 \geq -1, \\ +\infty & \text{при} \quad \gamma_1 < -1, \end{cases}$$

$$A_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \gamma_i \geq -2, \\ +\infty & \text{при} \quad \gamma_i < -2. \end{cases}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{tI_{11}'(t)}{I_{11}(t)} = 1 + \gamma_1, \tag{4.5}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{tI_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)} = 2 + \gamma_i \quad (i = 2, 3). \tag{4.6}$$

Оскільки перше з цих граничних співвідношень суперечить умові (1.14) теореми 1.2, то обмежимось лише розглядом $\Pi^0_{+\infty}(\mu_0)$-розв'язків, для яких $|\mu_0| < +\infty$.

Згідно з (4.2), (4.3) і (4.5) умови (1.6)-(1.10) теореми 1.3 набувають вигляду

$$\gamma_j - \gamma_1 < (1 + \sigma_j)|1 + \mu_0| \quad (j = 2, 3),$$

$$1 + \gamma_1 = \mu_0, \quad \gamma_1 < -2,$$

$$1 + \mu_0 < 0, \quad a_1 > 0.$$

Вони рівносильні умовам

$$\gamma_j - \gamma_1 + (1 + \sigma_j)(2 + \gamma_1) < 0 \quad (j = 2, 3),$$

$$a_1 > 0, \quad \gamma_1 < -2.$$

При їх виконанні рівняння (4.1) має на підставі теореми 1.1 хоча б один розв'язок, визначений в околі $+\infty$, що допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y(t) \sim \frac{a_1\, t^{2+\gamma_1}}{(1 + \gamma_1)(2 + \gamma_1)}, \quad y'(t) \sim \frac{a_1\, t^{1+\gamma_1}}{1 + \gamma_1}.$$

Далі, згідно з (4.2), (4.4) і (4.6) умови (1.15)-(1.19) і $\sigma_i \neq 0$ теореми 1.3 запишуться при $i = 2$ у вигляді

$$\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{(1 + \sigma_2)(2 + \gamma_2)}{\sigma_2} < 0, \tag{4.7}$$

$$\gamma_3 - \gamma_2 + \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)(2 + \gamma_2)}{\sigma_2} < 0, \tag{4.8}$$

$$a_2 > 0, \qquad \sigma_2(2 + \gamma_2) > 0, \tag{4.9}$$

а при $i = 3$ - у вигляді

$$\gamma_1 - \gamma_3 + \frac{(1 + \sigma_3)(2 + \gamma_3)}{\sigma_3} < 0, \tag{4.10}$$

$$\gamma_2 - \gamma_3 + \frac{(\sigma_3 - \sigma_2)(2 + \gamma_3)}{\sigma_3} < 0, \tag{4.11}$$

$$a_3 > 0, \qquad \sigma_3(2 + \gamma_3) > 0. \tag{4.12}$$

Якщо виконуються умови (4.7)-(4.9), то рівняння (4.1) має на підставі теореми 1.3 хоча б один розв'язок, визначений в деякому околі $+\infty$ і зникаючий у нескінченності, причому він допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$y(t) \sim \left| \frac{(2 + \gamma_2)(2 + \gamma_2 + \sigma_2)}{a_2 \sigma_2^2} \right|^{\frac{1}{\sigma}} t^{-\frac{2+\gamma_2}{\sigma_2}},$$

$$y'(t) \sim -\frac{(2 + \gamma_2) y(t)}{\sigma_2\, t}.$$

Якщо ж виконуються умови (4.10)-(4.12), то у рівняння (4.1) існує відповідно до теореми 1.3 хоча б один зникаючий у нескінченості розв'язок $y : [t_0, +\infty[\longrightarrow]0, 1[$, причому для нього мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення

$$\frac{1}{y^{\sigma_3}(t) |\ln y(t)|^\lambda} \sim \frac{a_3 \sigma_3^2\, t^{2+\gamma_3}}{(2 + \gamma_3)(2 + \gamma_3 + \sigma_3)}, \tag{4.13}$$

$$y'(t) \sim -\frac{(2 + \gamma_3) y(t)}{\sigma_3\, t}. \tag{4.14}$$

Тут для y отримано асимптотичне зображення в неявному виді. Однак, якщо врахувати, що через (4.14)

$$y(t) = t^{-\frac{2+\gamma_3}{\sigma_3}+o(1)} \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

то будемо мати

$$|\ln y(t)|^\lambda = \left|\frac{2+\gamma_3}{\sigma_3}\right|^\lambda \ln^\lambda t[1+o(1)]$$

при $t \to +\infty$, і тому (4.13) може бути переписано у явному виді

$$y(t) \sim C\, t^{-\frac{2+\gamma_3}{\sigma_3}} \ln^{-\frac{\lambda}{\sigma_3}} t \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

де

$$C = \left(\frac{a_3\sigma_3}{2+\gamma_3+\sigma_3}\right)^{-\frac{1}{\sigma_3}} \left(\frac{2+\gamma_3}{\sigma_3}\right)^{\frac{1-\lambda}{\sigma_3}}.$$

Тепер, взявши за ω довільне додатне число, дослідимо для рівняння (4.1) питання про існування $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язків і про асимптотику цих розв'язків при $t \uparrow \omega$. Оскільки у даному випадку $\pi_\omega(t) = t-\omega$, то при $t \uparrow \omega$

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p'_k(t)}{p_k(t)} \sim \frac{\gamma_k}{\omega}(\omega - t) \quad (k = 1,2,3), \quad (4.15)$$

$$I_{11}(t) = |a_1| \int\limits_\omega^t \tau^{\gamma_1}\, d\tau \sim |a_1|\omega^{\gamma_1}(t-\omega), \quad (4.16)$$

$$I_{i2}(t) = |a_i| \int\limits_\omega^t (\tau-\omega)\tau^{\gamma_i}\, d\tau \sim$$

$$\sim \frac{|a_i|\omega^{\gamma_i}}{2}(t-\omega)^2 \quad (i = 2,3). \quad (4.17)$$

З урахуванням (4.16) і (4.17) будемо мати

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{11}(t)}{I_{11}(t)} = 1, \quad (4.18)$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)} = 2 \quad (i = 2,3). \quad (4.19)$$

Оскільки границя (4.18) є скінченою (тобто не виконуються умови (1.14) теореми 1.2), то обмежимось лише розглядом $\Pi^0_\omega(\mu_0)$-розв'язків, для яких $|\mu_0| < +\infty$.

Згідно з (4.15), (4.16) і (4.18) умови (1.6)-(1.10) теореми 1.1 набувають вигляду

$$a_1 > 0, \quad \sigma_j > -1 \quad (j = 2,3).$$

При цих умовах рівняння (4.1) має на підставі теореми 4.1 хоча б один розв'язок $y : [t_0,\omega[\longrightarrow]0,1[$, де $t_0 \in]a,\omega[$, що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) \sim \frac{a_1\omega^{\gamma_1}}{2}(t-\omega)^2, \quad y'(t) \sim a_1\omega^{\gamma_1}(t-\omega).$$

Далі, враховуючи (4.15), (4.17) і (4.19), приходимо до висновку, що умови (1.15)-(1.19) теореми 1.3 рівносильні при $i = 2$ умовам

$$\sigma_2 < -1, \quad \sigma_3 > \sigma_2, \quad a_2(2+\sigma_2) < 0, \quad (4.20)$$

а при $i = 3$- умовам

$$\sigma_3 < -1, \quad \sigma_2 > \sigma_3, \quad a_3(2+\sigma_3) < 0. \quad (4.21)$$

Тому при виконані нерівностей (4.20) рівняння (4.1) має на підставі теореми 1.3 хоча б один розв'язок $y : [t_0,\omega[\longrightarrow]0,1[$, де $t_0 \in]a,\omega[$, що допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) \sim \left[\frac{a_2\sigma_2^2\omega^{\gamma_2}}{2(2+\sigma_2)}\right]^{-\frac{1}{\sigma_2}} (t-\omega)^{-\frac{2}{\sigma_2}},$$

$$y'(t) \sim -\frac{2}{\sigma_2}\left[\frac{a_2\sigma_2^2\omega^{\gamma_2}}{2(2+\sigma_2)}\right]^{-\frac{1}{\sigma_2}} (t-\omega)^{-\frac{2+\sigma_2}{\sigma_2}},$$

а при виконанні нерівностей (4.21) – розв'язок з асимптотичними при $t \uparrow \omega$ зображеннями виду

$$\frac{1}{y^{\sigma_3}|\ln y(t)|^\lambda} \sim \frac{a_3\sigma_3^2\omega^{\gamma_3}}{2(2+\sigma_3)}(t-\omega)^2, \quad (4.22)$$

$$y'(t) \sim -\frac{2y(t)}{\sigma_3(t-\omega)}. \quad (4.23)$$

Оскільки згідно з (4.23)

$$y(t) = |t-\omega|^{-\frac{2}{\sigma_3}+o(1)} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

то зображення (4.22) може бути переписано в явному виді

$$y(t) \sim C_\omega (t-\omega)^{-\frac{2}{\sigma_3}} \ln^{-\frac{\lambda}{\sigma_3}}(\omega - t),$$

де
$$C_\omega = \left|\frac{2}{\sigma_3}\right|^{\frac{1-\lambda}{\sigma_3}} \left|\frac{a_3\sigma_3\omega^{\gamma_3}}{2+\sigma_3}\right|^{-\frac{1}{\sigma_3}}.$$

Нарешті, зазначимо, що якщо за ω вибрати довільне число з проміжку $[0,+\infty[$ і в рівнянні (4.1) зробити заміну $t-\omega=\omega-\tau$, $y(t)=z(\tau)$, то отримаємо рівняння, до якого можуть бути застосовані теореми 1.1-1.3. Це дозволить отримати для рівняння (4.1) результати про існування, а також про асимптотику розв'язків, визначених в правому околі ω і зникаючих при $t\downarrow\omega$ (зокрема, для розв'язків, що зникають при $t\downarrow 0$).

5. Висновки. В роботі для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку введено новий клас, так званих, $\Pi^0_\omega(\mu_0)$-розв'язків, котрий у деякому сенсі близький до класу P_ω-розв'язків, який був визначений в [8]. Для випадку диференціальних рівнянь виду (1.1) запропоновано підхід, що дозволяє вилучити ситуації, коли на розв'язках із даного класу тільки один доданок в правій частині рівняння є головним (див. леми 2.3-2.6). В кожній з цих ситуацій отримано (див. теореми 1.1-1.3) необхідні і достатні умови існування $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язків і встановлено для них асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$, де ω або скінчене, або рівне $\pm\infty$. При цьому випадки, що відносяться до $\omega<+\infty$ і $\omega=\pm\infty$ не розділяються, а досліджуються у рамках єдиного методу, що дозволяє (див. приклад рівняння (4.1)) дати опис асимптотичного поводження як правильних, так і різного роду сингулярних розв'язків (з приводу означень правильних і сингулярних розв'язків див. монографію [9], розд. III, стор. 238, 262).

Оскільки окремі доданки у правій частині рівняння (1.1) містять нелінійності, що не суто визначені класом правильно мінливих в нулі функцій, то асимптотика не завжди може бути записана у явному виді (див. теорему 1.3). Однак, якщо в цій теоремі більш конкретно визначити вид функції φ_i, то асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$ можуть бути надані явними формулами. Наприклад, якщо на додаток до умов теореми 1.3 припустити, що функція $\psi_i(y)=y^{-\sigma_i-1}\varphi_i(y)$ така, що при $t\uparrow\omega$ має місце співвідношення $\psi_i\left(|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0+o(1)}\right)=[C(\mu_0)+o(1)]\psi(|\pi_\omega(t)|)$ де $C(\mu_0)$- відмінна від нуля дійсна стала, то асимптотичні зображення (2.20), (2.21) можуть бути записані в явному виді
$$y(t)\sim\left|\frac{C(\mu_0)\sigma_i}{\mu_0}I_{i2}(t)\psi_i(|\pi_\omega(t)|)\right|^{-\frac{1}{\sigma_i}},$$
$$y'(t)\sim\frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}\left|\frac{C(\mu_0)\sigma_i}{\mu_0}I_{i2}(t)\psi_i(|\pi_\omega(t)|)\right|^{-\frac{1}{\sigma_i}}.$$
Вказаній вище умові задовольняють функції виду $\varphi_i(y)=y^{1+\sigma_i}\ln^\gamma y$, $\varphi_i(y)=y^{1+\sigma_i}\ln^\gamma y\ln^\lambda\ln y$ і багато інших.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Wong P.K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations // Pacific.J.Math. — 1963. — **13**. — P. 737-760.

2. *Marić V., Tomić M.* Asymptotic Properties of Solutions of the Equation $y''=f(x)\Phi(y)$ // Mathematische Zeitschrift. — 1976. — **149**. — P. 261-266.

3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука. — 1985. — 144с.

4. *Evtukhov V.M., Kirillova L.A.* Asymptotic representations of solutions of non-linear second order differential equations // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phis. — 2003. — **30**. — PP. 153-158

5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. — 1967.— 472с.

6. *Evtukhov V.M., Shinkarenko V. N.* On the solutions with degree asymptotics of the differential equations with exponential nonlinearity// Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, N 3. — С. 324-341.

7. *Евтухов В.М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 4. — С. 433-444.

8. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера n- го порядка// Докл. АН России. — 1992. — **324**, № 2. — С. 258-260.

9. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. — 1991. — 430с.

Надійшла до редколегії 23.04.2004