УДК 517.51

©2004 р. О.О. Карлова, С.М. Куцак, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ БЕРА ПРО ФУНКЦІЇ ПЕРШОГО КЛАСУ НА ВИПАДОК НЕМЕТРИЗОВНОГО ПРОСТОРУ ЗНАЧЕНЬ

Доводиться, що теорема Бера про функції першого класу вірна для функцій зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах, а для σ-метризовних просторів це вже не так, і наводиться приклад скрізь розривного відображення першого класу Бера зі значеннями у площині Немицького.

It is obtained that the Baire theorem on functions of the first class for functions with values in strongly σ-metrizable spaces is valid and for function with values in σ-metrizable spaces is not. The example of everywhere discontinuous mapping of the first Baire class with values in Nemytskij plane is given.

1. Для топологічних просторів X і Y символом $B_1(X,Y)$ позначимо сукупність усіх функцій $f : X \to Y$ першого класу Бера, тобто поточкових границь послідовностей неперервних функцій $f_n : X \to Y$. Згідно з класичною теоремою Бера [1, с. 405] у випадку метризовності простору Y для кожної функції $f \in B_1(X,Y)$ множина $D(f)$ точок її розриву є множиною першої категорії. Для загальних топологічних просторів Y цей результат не правильний. Так, в книзі [2, с. 125] у вправі 22б пропонується побудувати приклад скрізь розривного відображення $f \in B_1(\mathbb{I},\mathbb{I}^{\mathbb{I}})$, де $\mathbb{I} = [0,1]$ – відрізок числової прямої $\mathbb{R}$, а $\mathbb{I}^{\mathbb{I}}$ – відповідний тихоновський куб. Прикладом такого відображення служить функція f, яка на $[0,1]$ задається рівністю $f(x) = g_x$, де

$$g_x(y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Це відображення є частинним випадком відображень, що розглядалися в [3]. На основі цього природно постає питання про дослідження класу просторів Y, для яких справджується теорема Бера.

Тут ми розглядаємо випадок, коли Y – це σ-метризовний простір чи сильно σ-метризовний простір (означення див. далі в п. 2). Виявляється, що для сильно σ-метризовного простору Y твердження теореми Бера залишається в силі, а для σ-метризовного простору це вже не так, і прикладом служить відома площина Немицького [4, с. 47]. Ці результати були анонсовані в [5 – 7].

2. Нагадаємо, що простір Y називається */сильно/ σ-метризовним*, якщо його можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності замкнених метризовних підпросторів Y_n /таких, що для кожної збіжної в Y послідовності точок y_n існує номер n, для якого $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Y_n$/. Така послідовність підпросторів Y_n називається *вичерпуванням* відповідного простору Y.

Ми будемо використовувати наступне добре відоме твердження [8].

Лема. *Нехай X – топологічний простір, $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність замкнених множин у просторі X, така, що*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

$G_n = \mathrm{int} F_n$ для кожного n і $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Тоді множина G залишкова в X.

Доведення. Для кожного n множина $B_n = F_n \setminus G_n$ ніде не щільна, бо вона є межею замкненої множини F_n, а тому $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ є множиною першої категорії. Нехай $A = X \setminus G$. Покажемо, що $A \subseteq B$. Візьмемо елемент $x \in A$. Тоді $x \notin G_n$ для кожного n. Але $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. тому $x \in F_m$ для деякого m. Оскільки $x \notin G_m$, то $x \in B_m$. Тепер зрозуміло, що A є множиною першої категорії разом з B, отже, множина G залишкова.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – сильно σ-метризовний простір і $f : X \to Y$ – функція першого класу Бера. Тоді множина точок розриву $D(f)$ функції f є множиною першої категорії в X.*

Доведення. Нехай $(Y_m)_{m=1}^{\infty}$ – вичерпування сильно σ-метризовного простору Y і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервних відображень $f_n : X \to Y$, яка поточково збігається до f. Для кожного номера m покладемо

$$F_m = \{x \in X : \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y_m\}.$$

Ясно, що

$$F_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(Y_m),$$

звідки випливає, що множини F_m замкнені. Оскільки для кожного $x \in X$ послідовність $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ збігається до $f(x)$, то існує такий номер m, що

$$\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y_m.$$

Тому $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m = X$. Покладемо далі

$$G_m = \mathrm{int} F_m \quad \text{і} \quad G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m.$$

Згідно з лемою, множина G залишкова в X. Нехай

$$g_{m,n} = f_n|_{G_m} \quad \text{і} \quad g_m = f|_{G_m}.$$

Оскільки $f_n(G_m) \subseteq Y_m$ для кожного n, $f_n(x) \to f(x)$ на X і простір Y_m замкнений в Y, то $f(G_m) \subseteq Y_m$. Тому відображення $g_{m,n}$ і g_m набувають значень у метризовному просторі Y_m, причому $g_{m,n} : G_m \to Y_m$ неперервні і $g_{m,n}(x) \to g_m(x)$ на G_m. Таким чином, $g_m \in B_1(G_m, Y_m)$, отже, за класичною теоремою Бера $A_m = D(g_m)$ є множиною першої категорії в G_m, а значить і в X. З відкритості множин G_m випливає, що

$$D(g_m) = D(g) \cap G_m$$

для кожного m. Отже,

$$D(f) = \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m,$$

де

$$A_0 = D(f) \cap (X \setminus G).$$

Оскільки всі A_m є множинами першої категорії, то такою ж буде і множина $D(f)$.

3. Доведення наступного результату використовує метод, застосований в [9] для доведення досконалої нормальності простору $\mathbb{R}^\infty$ фінітних послідовностей.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір, такий, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, де $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність замкнених досконало нормальних підпросторів простору X і множина A замкнена в X. Тоді існує функція $\varphi : X \to [0, +\infty)$, така, що $A = \varphi^{-1}(0)$ і всі звуження*

$$\varphi_n = \varphi|_{X_n} : X_n \to [0, +\infty)$$

неперервні.

Доведення. Нехай A – замкнена в X множина і $A_n = X_n \cap A$ для кожного номера n. Зрозуміло, що множини A_n замкнені в X_n і в X. Оскільки простір X_1 досконало нормальний, то існує неперервна функція $\varphi_1 : X_1 \to [0, 1]$, така, що $A_1 = \varphi^{-1}(0)$. Множина $B_1 = X_1 \cup A_2$ замкнена в досконало нормальному просторі X_2. Тому існує неперервна функція $\psi_1 : X_2 \to [0, 1]$, така, що $B_1 = \psi_1^{-1}(0)$. Розглянемо функцію $\tilde{\varphi}_1 : B_1 \to [0, 1]$, для якої

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x), \quad \text{якщо} \quad x \in X_1, \quad \text{і}$$

$$\tilde{\varphi}_1(x) = 0, \quad \text{якщо} \quad x \in A_2.$$

Оскільки $A_2 \cap x_1 = A_1$ і $\varphi_1(x) = 0$ на A_1, то функція $\tilde{\varphi}_2$ коректно визначена і неперервна, адже її звуження на замкнені в B_1 множини X_1 і A_2 неперервні. За теоремою Тітце-Урисона [4,с. 116] існує неперервна функція $\tilde{\psi}_1 : X_2 \to [0, 1]$, яка є продовженням функції $\tilde{\varphi}_1$. Покладемо

$$\varphi_2 = \psi_1 + \tilde{\psi}_1.$$

Функція $\varphi_2 : X_2 \to [0, 2]$ неперервна і має такі властивості:

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x), \quad \text{якщо} \quad x \in X_1,$$

$$A_2 = \varphi_2^{-1}(0).$$

Справді, якщо $x \in X_1$, то $x \in B_1$, отже, $\psi_1(x) = 0$, а значить

$$\varphi_2(x) = \tilde{\psi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x).$$

Якщо $x \in A_2$, то $x \in B_1$, отже, $\psi_1(x) = 0$ і $\tilde{\varphi}_1(x) = 0$. Тому

$$\varphi_2(x) = \tilde{\psi}_1(x) = \tilde{\varphi}_1(x) = 0.$$

Нехай $x \in X_2 \setminus A_2$. Тоді $\psi_1(x) > 0$. Але $\tilde{\psi}_1(x) \geq 0$, отже,

$$\varphi_2(x) = \psi_1(x) + \tilde{\psi}_1(x) > 0.$$

Таким чином, $A_2 = \varphi_2^{-1}(0)$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми зможемо побудувати таку послідовність неперервних функцій $\varphi_n : X_n \to [0, n]$, що $A_n = \varphi_n^{-1}(0)$ і $\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x)$ для всіх $x \in X_{n-1}$ і довільних $n = 2, 3, \ldots$.

Визначимо функцію $\varphi : X \to [0, +\infty)$, покладаючи $\varphi(x) = \varphi_n(x)$, якщо $x \in X_n$. Зрозуміло, що таке означення коректне.

Покажемо, що $A = \varphi^{-1}(0)$. Справді, якщо $x \in A$, то $x \in A_n$ для деякого n, отже,

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) = 0.$$

Якщо ж $x \in X \setminus A$, то $x \notin A_n$ для кожного n. Крім того, існує таке m, що $x \in X_m$. В такому разі $x \in X_m \setminus A_m$ і

$$\varphi(x) = \varphi_m(x) > 0.$$

Теорема 3. *Сильно σ-метризовний T_1-простір X з першою аксіомою зліченності є досконало нормальним.*

Доведення. Згідно з теоремою Веденісова [4, с. 82] досить довести, що кожна замкнена в X множина є функціонально замкненою.

Нехай A – замкнена в X множина, $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – вичерпування сильно σ-метризовного простору X і $A_n = A \cap X_n$. Оскільки кожний метризовний простір є досконало нормальним, то згідно з теоремою 2, існує функція $\varphi : X \to [0, +\infty)$, така, що $A = \varphi^{-1}(0)$ і звуження

$$\varphi_n = \varphi|_{X_n} : X_n \to [0, +\infty)$$

неперервні для кожного n.

Доведемо, що функція $\varphi : X \to [0, +\infty)$ неперервна. Зафіксуємо $x \in X$. Оскільки простір X задовольняє першу аксіому зліченності, то неперервність функції φ в точці x рівносильна секвенціальній неперервності цієї функції в точці x. Щоб довести останнє, розглянемо послідовність точок $x_k \in X$, яка збігається до точки x. Зрозуміло, що існує номер n, такий, що $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq X_n$. Функції $\varphi_n = \varphi|_{X_n}$ неперервні, тоді

$$\varphi(x_k) = \varphi_n(x_k) \to \varphi_n(x) = \varphi(x),$$

отже функція φ неперервна в точці x. Оскільки точка x була взята довільним чином з X, то φ – неперервна функція.

З того, шо $A = \varphi^{-1}(0)$ негайно випливає, що множина A функціонально замкнена, що і дає нам досконалу нормальність простору X.

4. Нехай $\mathbb{P} = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ – площина Немицького [4, с. 47 - 48]. Легко бачити, що $\mathbb{P}$ – це σ-метризовний простір з вичерпуванням

$$Y_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{n} \quad \text{або} \quad y = 0\}.$$

Крім того, відомо [4, с. 74], що $\mathbb{P}$ не є нормальним простором. З іншого боку очевидно, що $\mathbb{P}$ задовольняє першу аксіому зліченності і є T_1-простором ($\mathbb{P}$ навіть цілком регулярний). Тому на основі теореми

З площина Немицького $\mathbb{P}$ не є сильно σ-метризовним простором.

Виявляється, що теорема Бера для функцій першого класу перестає бути вірною, коли простір значень Y є площиною Немицького.

Теорема 4. *Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{P}$, для якої $f(x) = (x, 0)$ при $x \in \mathbb{R}$, належить до першого класу Бера і є скрізь розривною.*

Доведення. Покладемо

$$f_n(x) = (x, \frac{1}{n}),$$

якщо $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що функції $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{P}$ неперервні і $f_n(x) \to f(x)$ на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$. Таким чином, $f \in B_1(\mathbb{R}, \mathbb{P})$.

Нехай $x \in \mathbb{R}$. Доведемо, що функція f розривна в точці x. З означення топологічної структури у площині Немицького випливає, що множина $G_x = \{(x, 0)\}$ є відкритою в підпросторі $\mathbb{R} \times \{0\}$ площини Немицького. Крім того, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}$ і $f^{-1}(G_x) = \{x\}$. Зрозуміло, що $\{x\}$ не є околом точки x в $\mathbb{R}$. Звідси випливає, що f не може бути неперервним в точці x. Таким чином, функція f скрізь розривна.

Зауважимо, що з теорем 1 і 4 одержуємо інше пояснення того, що площина Немицького не є сильно σ-метризовним простором.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Куратовский К.* Топология. Т.1.— М.: Мир, 1966.— 594 с.

2. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов.— М.: Наука, 1975.— 408 с. (фр. видання: 1958).

3. *Карлова О.О., Маслюченко В.К.* Типи множин точок неперервності відображень зі значеннями в неметризовних просторах // Вісн. Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат., 2002.— Вип.60.— С.77—79.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

5. *Карлова О.* Про деякі узагальнення теорем Бера і Лебеґа // Матеріали студентської наукової конференції (14—15 травня 2002 року). Книга 2. Природничі та фізико-математичні науки.— Чернівці: Рута, 2002.— С. 424—425.

6. *Куцак С.* Про функції першого класу Бера зі значеннями у площині Немицького // Матеріали студентської наукової конференції (12—13 травня 2004 року). Фізико-математичні науки.— Чернівці: Рута, 2004.— С. 51—52.

7. *Карлова О., Куцак С., Маслюченко В.* Про узагальнення однієї теореми Бера на функції зі значеннями в -метризовних просторах // Міжнародна конференція "Геометрична топологія: нескінченновимірна топологія, абсолютні екстензори, застосування" (26 - 30 травня, 2004 р.). Тези доповідей.— Львів, 2004.— С.28—29.

8. *Breckenridge J.C., Nishiura T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Acad. Sinica.— 1976.— **4**, N2.— P. 191—203.

9. *Маслюченко В.К., Собчук О.В.* Досконала нормальність простору фінітних послідовностей // Чернів. ун-т.— Чернівці, 1991.— 6 с.— Деп. в УкрНДІТІ, N1610-Ук91.

Надійшла до редколегії 13.12.2004