УДК 517.983

©2004 р. А.В. Гончарук, Т.І. Звоздецький

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Встановлено необхідні й достатні умови еквівалентності деяких диференціальних операторів першого порядку в просторах функцій, аналітичних у $\frac{2\pi}{n}$-інваріантних областях, а також подібних операторів у просторах послідовностей, що наділені нормальною топологією.

It is obtained the necessary and sufficient conditions of similarity of some differential operators of the first order in the spaces of functions analytic in $\frac{2\pi}{n}$-invariant domains. It is also established analogical conditions of similarity of analogical operators in spaces of sequences with normal topology.

1. Нехай G – область комплексної площини, а $\mathcal{A}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Якщо $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(0 < R \leq \infty)$, то відповідний простір $\mathcal{A}(G)$ позначатимемо через $\mathcal{A}_R$. Нагадаємо, що два лінійні неперервні оператори A та B, які діють в $\mathcal{A}(G)$, називаються еквівалентними, якщо існує такий ізоморфізм T простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, для якого

$$TA = BT.$$

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ та функцію $a \in \mathcal{A}(G)$. Нехай E – тотожний оператор в $\mathcal{A}(G)$, а $\mathcal{D}$ – оператор звичайного диференціювання в $\mathcal{A}(G)$. В [1] встановлено, що для випадку простору $\mathcal{A}_R$ оператори $A = z^{n+1}\mathcal{D} + a(z)E$ та $B = z^{n+1}\mathcal{D}$ є еквівалентними тоді й лише тоді, коли

$$a(0) = a'(0) = ... = a^{(n-1)}(0) = 0,$$

$$a^{(n)}(0) = -ln!,$$

де $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Зауважимо, що доводилось це твердження за допомогою матричного зображення лінійних неперервних операторів, що діють в $\mathcal{A}_R$. Для випадку некругових областей G такого зображення вже немає. У другому пункті даної роботи сформульований вище результат з [1] узагальнюється на випадок $\frac{2\pi}{n}$-інваріантної області G. Крім цього, зважаючи на ізоморфізм простору $\mathcal{A}_R$ до певного простору послідовностей, наділеного нормальною за Кете топологією, у третьому пункті роботи встановлюються аналогічні необхідні й достатні умови еквівалентності операторів, подібних до A та B, які діють у просторах послідовностей з деякого класу, який містить, зокрема, всі простори послідовностей, ізоморфні до просторів $\mathcal{A}_R$ $(0 < R \leq \infty)$.

2. Нехай G – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, а $a(z)$ – фіксована функція з $\mathcal{A}(G)$. Розглянемо в $\mathcal{A}(G)$ оператори

$$A = z^{n+1}\mathcal{D} + a(z)E$$

та

$$B = z^{n+1}\mathcal{D}.$$

Встановимо необхідні й достатні умови еквівалентності в $\mathcal{A}(G)$ операторів A та B. Спочатку, як і в [1], відзначимо, що оператор A еквівалентний в $\mathcal{A}(G)$ до оператора

$$A_1 = z^{n+1}\mathcal{D} + \left(a(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} z^k\right) E.$$

Зокрема, в цьому випадку за оператор перетворення A в A_1 можна взяти, наприклад, ізоморфізм T, який на довільну функцію

$f \in \mathcal{A}(G)$ діє за правилом [1]

$$(Tf)(z) = f(z)g(z),$$

де

$$g(z) = \\ = \exp\left(\int\limits_0^z \frac{a(\zeta) - a(0) - \sum\limits_{k=1}^{n} a^{(k)}(0)\zeta^k/k!}{\zeta^{n+1}} d\zeta\right).$$

Дійсно, для $f \in \mathcal{A}(G)$ маємо:

$$TAf(z) = (z^{n+1}f'(z) + a(z)f(z))g(z);$$

$$A_1Tf(z) = z^{n+1}f'(z)g(z) + f(z)g(z)\times \\ \times\left(a(z) - a(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} z^k\right) + \\ + \left(a(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} z^k\right) f(z)g(z) = \\ = (z^{n+1}f'(z) + a(z)f(z))g(z).$$

Отже, досить встановити умови еквівалентності в $\mathcal{A}(G)$ операторів A_1 та B.

Позначимо

$$a_0 = a(0), \quad a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Тоді

$$A_1 = z^{n+1}\mathcal{D} + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) E,$$

причому вважатимемо, що $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k| \neq 0$.

Припустимо, що оператори A_1 та B еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$, тобто $TA_1 = BT$ для деякого ізоморфізму T простору $\mathcal{A}(G)$ на себе. Для встановлення необхідних умов еквівалентності цих операторів у $\mathcal{A}(G)$ проведемо міркування, аналогічні до наведених в [1] для випадку простору $\mathcal{A}_R$.

Оскільки оператор B має в $\mathcal{A}(G)$ нетривіальний нуль (а саме, $B1 = 0$), то й оператор A_1 має нетривіальний нуль в $\mathcal{A}(G)$. Позначимо його через $\varphi(z)$, тобто нехай

$$z^{n+1}\varphi'(z) + (a_0 + a_1z + ... + a_nz^n)\varphi(z) = 0. \quad (1)$$

Припустимо, що $a_0 \neq 0$. Покладемо в (1) $z = 0$. Тоді $a_0\varphi(0) = 0$, звідки $\varphi(0) = 0$. Доведемо тепер індукцією по k, що

$$\varphi^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \{0, 1, 2, ...\},$$

(вважатимемо надалі, що $\varphi^{(0)}(z) = \varphi(z)$).

Нехай $k \geq 1$ і

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = ... = \varphi^{(k-1)}(0) = 0.$$

Переконаємося, що і $\varphi^{(k)}(0) = 0$. Справді, диференціюючи рівність (1) k разів, одержимо

$$\left(z^{n+1}\varphi'(z) + (a_0 + a_1z + ... + a_nz^n)\varphi(z)\right)^{(k)} = \\ = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (z^{n+1})^{(j)} \varphi^{(k-j+1)}(z) + \\ + \sum_{j=0}^{k} C_k^j (a_0 + a_1z + ... + a_nz^n)^{(j)} \varphi^{(k-j)}(z) = \\ = \sum_{j=0}^{\min\{n+1,k\}} C_k^j \left[(z^{n+1})^{(j)}\varphi^{(k-j+1)}(z) + \right. \\ \left. + (a_0 + a_1z + ... + a_nz^n)^{(j)}\varphi^{(k-j)}(z)\right] = 0.$$

Звідси, поклавши $z = 0$, отримаємо (оскільки $a_0 \neq 0$), що $\varphi^{(k)}(0) = 0$.

Отже, $\varphi^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \{0, 1, 2, ...\}$, а тому $\varphi(z) \equiv 0$ на G.

Таким чином, якщо $a_0 \neq 0$, то рівняння (1) має лише нульовий розв'язок, що суперечить вибору $\varphi(z)$. Тому $a_0 = 0$. Тоді рівність (1) набуде вигляду

$$z^n\varphi'(z) + (a_1 + a_2z + ... + a_nz^{n-1})\varphi(z) = 0.$$

Звідси, як і вище, одержимо, що $a_1 = 0$.

Повторюючи аналогічні міркування, отримаємо, що $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$ і тому функція $\varphi(z)$ задовольняє співвідношення

$$z\varphi'(z) + a_n\varphi(z) = 0, \quad (2)$$

причому $a_n \neq 0$.

Розглянемо деякий круг $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \subset G$ і розкладемо в ньому $\varphi(z)$ у степеневий ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k, \quad z \in K. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (2), матимемо

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+a_n)\varphi_k z^k = 0.$$

Функція $\varphi(z)$ буде нетривіальним нулем оператора A_1, якщо не всі φ_k $(k \in \{0,1,2,...\})$ рівні 0. Разом з цим,

$$(k+a_n)\varphi_k = 0, \quad k \in \{0,1,2,...\}.$$

Оскільки множник $k+a_n$ може бути рівний нулеві лише при якомусь одному $k = l \in \mathbb{N}$, то $\varphi_k = 0$, $k \neq l$. Тому рівняння (2), а отже і рівняння (1), має ненульовий розв'язок (а саме, $\varphi(z) = z^l$), лише якщо $a_n = -l$, $l \in \mathbb{N}$.

Розглянемо функцію $\varphi(z) = z^l$, $l \in \mathbb{N}$. Нехай $A_1 z^l = 0$. Тоді $TA_1 z^l = 0$. Але $TA_1 = BT$, тому $B(Tz^l) = 0$, звідки $(Tz^l)' = 0$, тобто $Tz^l = C$, $z \in G$, де C – деяка стала з $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($C \neq 0$, бо ізоморфізм T не може мати нетривіального нуля). Крім цього, оскільки T – ізоморфізм простору $\mathcal{A}(G)$ на себе, то з рівності $TA_1 = BT$ випливає, що $T(Im\ A_1) = Im\ B$, де $Im\ B = \{g \in \mathcal{A}(G) : g = Bf,\ f \in \mathcal{A}(G)\}$.

Якщо $l \geq n$, то $z^l \in Im\ A_1$, бо $A_1 z^{l-n} = (l-n)z^l - lz^l = -nz^l$. Тому $C = Tz^l \in Im\ B$. Але це неможливо, бо якщо б $C \in Im\ B$, то існувала б така функція $h \in \mathcal{A}(G)$, що $Bh = C$, тобто $z^{n+1}h(z) = C$, $z \in G$. Покладаючи тут $z = 0$, одержимо $0 = C$, що суперечить вибору C. Отже, $l < n$.

Таким чином, необхідною умовою еквівалентності операторів A_1 і B у просторі $\mathcal{A}(G)$ є така умова:

$$a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0,$$

$$a_n = -l, \quad l \in \{0,1,...,n-1\}.$$

Доведемо тепер, що при додатковій умові на область G ця необхідна умова є і достатньою.

Нехай $\omega = \exp\frac{2\pi i}{n}$, а G – зіркова відносно нуля область комплексної площини, для якої $\omega G = G$. Для $k \in \{0,1,...,n-1\}$ позначатимемо

$$(P_k f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-kj} f(z\omega^j), \quad f \in \mathcal{A}(G).$$

Крім цього, під символами $\mathcal{I}$ та Δ розумітимемо відповідно оператор звичайного інтегрування та оператор Помм'є в $\mathcal{A}(G)$, тобто

$$(\mathcal{I}f)(z) = \int_0^z f(\zeta)\ d\zeta,$$

$$(\Delta f)(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}, \quad f \in \mathcal{A}(G).$$

Якщо $l = 0$, то $A_1 = B$. Тому вважатимемо, що $l \geq 1$. Зафіксуємо $l \in \{1,2,...,n-1\}$ і розглянемо в $\mathcal{A}(G)$ оператори T і T_1, які визначаються формулами

$$(Tf)(z) =$$
$$= (z^{n+1-l}\mathcal{D} - lz^{n-l})(P_0 + ... + P_{l-1})f(z) +$$
$$+\Delta^l(P_l + ... + P_{n-1})f(z),$$
$$(T_1 f)(z) = z^l(P_0 + ... + P_{n-l-1})f(z) +$$
$$+z^l\mathcal{I}\Delta^{n+1}(P_{n-l} + ... + P_{n-1})f(z) -$$
$$-\sum_{j=n-l}^{n-1}\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\frac{z^{j-n+l}}{n-j}, \quad f \in \mathcal{A}(G).$$

Переконаємося, що для $m \in \{0,1,2,...\}$ виконуються співвідношення

$$TT_1 z^m = T_1 T z^m = z^m \tag{4}$$

і

$$TA_1 z^m = BTz^m. \tag{5}$$

Доведемо спочатку (4). Зафіксуємо якесь $m \in \{0,1,2,...\}$. Нехай $m = kn+s$, де $k \geq 0$, а $0 \leq s \leq n-1$.

Розглянемо випадок, коли $0 \leq s \leq l-1$. Тоді

$$Tz^{kn+s} = z^{n+1-l}(kn+s)z^{kn+s-1} - lz^{n-l}z^{kn+s} =$$
$$= (kn+s-l)z^{kn+n+s-l}.$$

Оскільки $n-l \leq n+s-l \leq n-1$, то при $k = 0$

$$T_1 T z^s = -(s-l)\frac{(n+s-l)!}{(n+s-l)!}\frac{z^s}{l-s} = z^s,$$

а при $k \geq 1$

$$T_1 T z^{kn+s} = (kn+s-l)z^l\mathcal{I}z^{kn+s-l-1} = z^{kn+s}.$$

Отже, в цьому випадку $T_1 T z^{kn+s} = z^{kn+s}$.

Розглянемо тепер випадок, коли $l \leq s \leq n-1$, тобто $0 \leq s-l \leq n-l-1$. Тоді

$$Tz^{kn+s} = z^{kn+s-l};$$

$$T_1 T z^{kn+s} = T_1 z^{kn+s-l} = z^{kn+s}.$$

Таким чином, і в цьому випадку $T_1 T z^{kn+s} = z^{kn+s}$.

Перевіримо зараз, що $TT_1 z^{kn+s} = z^{kn+s}$.

Нехай $0 \leq s \leq n-1-l$, тобто $l \leq l+s \leq n-1$, тоді

$$T_1 z^{kn+s} = z^{kn+s+l};$$

$$TT_1 z^{kn+s} = \Delta^l z^{kn+s+l} = z^{kn+s}.$$

Отже, для вказаних вище s маємо, що $TT_1 z^{kn+s} = z^{kn+s}$.

Нехай $n-l \leq s \leq n-1$, тобто $0 \leq s+n-l \leq l-1$. Якщо $k=0$, то

$$T_1 z^s = \frac{z^{s-n+l}}{s-n};$$

$$TT_1 z^s = \frac{1}{s-n}(z^{n+1-l}(s-n+l)z^{s-n+l-1} -$$

$$-lz^{n-l}z^{s-n+l}) = \frac{1}{s-n}((s-n+l)z^s - lz^s) = z^s.$$

Якщо $k \geq 1$, то

$$T_1 z^{kn+s} = z^l \mathcal{I} \Delta^{n+1} z^{kn+s} = \frac{z^{kn+s+l-n}}{kn+s-n};$$

$$TT_1 z^{kn+s} = \frac{kn+s+l-n}{kn+s-n} z^{kn+s} -$$

$$-\frac{l}{kn+s-n} z^{kn+s} = z^{kn+s}.$$

Таким чином, $TT_1 z^{kn+s} = z^{kn+s}$.

Отже, на функціях із повної в $\mathcal{A}(G)$ системи $\{z^m : m \geq 0\}$ виконуються співвідношення (4). Враховуючи лінійність і неперервність в $\mathcal{A}(G)$ операторів T і T_1, звідси отримуємо, що

$$TT_1 f = T_1 T f = f, \quad f \in \mathcal{A}(G).$$

Тому оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{A}(G)$ на себе.

Доведемо тепер рівність (5). Зафіксуємо $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. Нехай $m = kn+s$, де $k \geq 0$, а $0 \leq s \leq n-1$. Тоді

$$A_1 z^{kn+s} = (kn+s-l) z^{kn+n+s}.$$

Розглянемо випадок, коли $0 \leq s \leq l-1$. Матимемо

$$TA_1 z^{kn+s} = (kn+s-l)(kn+n+s) z^{kn+2n+s-l} -$$

$$-l(kn+s-l) z^{kn+2n+s-l} =$$

$$= (kn+s-l)(kn+n+s-l) z^{kn+2n+s-l};$$

$$Tz^{kn+s} = (kn+s-l) z^{kn+n+s-l};$$

$$BTz^{kn+s} = (kn+s-l)(kn+n+s-l) z^{kn+2n+s-l}.$$

Таким чином, у цьому випадку $TA_1 z^{kn+s} = BTz^{kn+s}$.

Нехай тепер $l \leq s \leq n-1$. Тоді

$$TA_1 z^{kn+s} = (kn+s-l) z^{kn+n+s-l};$$

$$BTz^{kn+s} = Bz^{kn+s-l} = (kn+s-l) z^{kn+n+s-l}.$$

Отже, і в цьому випадку $TA_1 z^{kn+s} = BTz^{kn+s}$. Тому виконується співвідношення (5). Звідси, враховуючи повноту в $\mathcal{A}(G)$ системи $\{z^m : m \geq 0\}$ та лінійність і неперервність в $\mathcal{A}(G)$ операторів T, A_1 і B, одержимо, що

$$TA_1 f = BTf, \quad f \in \mathcal{A}(G).$$

А ця рівність означає (якщо пригадати, що T – ізоморфізм простору $\mathcal{A}(G)$ на себе), що оператори A_1 і B еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$.

Таким чином, встановлена наступна теорема, яка узагальнює відповідний результат з [1].

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\omega = \exp \frac{2\pi i}{n}$, G – зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, для якої $\omega G = G$, а $a(z)$ – фіксована функція з $\mathcal{A}(G)$. Оператори $A = z^{n+1}\mathcal{D} + a(z)E$ та $B = z^{n+1}\mathcal{D}$ еквівалентні в $\mathcal{A}(G)$ тоді й лише тоді, коли*

$$a(0) = a'(0) = ... = a^{(n-1)}(0) = 0,$$

$$a^{(n)}(0) = -ln!,$$

де $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

3. Нехай X – деякий векторний простір послідовностей $x = (x_0, x_1, x_2, ...)$ комплексних чисел над полем $\mathbb{C}$, а X^α – двоїстий до нього простір послідовностей, тобто

$$X^\alpha = \left\{ u : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k u_k| < +\infty,\ \forall x \in X \right\}.$$

Набором переднорм $\{p_u(x) : u \in X^\alpha\}$, де

$$p_u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k u_k|, \quad x \in X, \quad u \in X^\alpha,$$

на просторі X визначається нормальна за Кете топологія [2].

Скрізь надалі через X позначатимемо простір послідовностей, який містить усі фінітні послідовності й наділений нормальною топологією. Крім цього, вважатимемо, що X – повний простір, що рівносильне його досконалості, тобто $(X^\alpha)^\alpha = X$ [2]. Для кожного $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ через $e^{(k)}$ позначимо k-ий орт, тобто таку послідовність, у якої k-ий член дорівнює 1, а всі решта – 0. Відзначимо, що сукупність усіх ортів утворює базис простору X [2], тобто

$$\forall\, x \in X : \quad x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{(k)}.$$

Нехай E – тотожний оператор в X, а $\mathcal{D}$, $\mathcal{I}$, Δ та Z – відповідно оператори диференціювання, інтегрування, зсуву вліво та зсуву вправо на X, тобто для $x \in X$

$$\mathcal{D}x = (x_1, 2x_2, 3x_3, ...),$$

$$\mathcal{I}x = (0, x_0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, ...),$$

$$\Delta x = (x_1, x_2, x_3, x_4, ...),$$

$$Zx = (0, x_0, x_1, x_2, ...).$$

Вважатимемо надалі, що простір X такий, що всі ці оператори діють з X в X. Очевидно, що всі вони лінійні. Враховуючи досконалість простору X, неважко переконатися, що вони є неперервними.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ та числа $a_0, a_1, ..., a_n$ із $\mathbb{C}$. Розглянемо на X оператори

$$A = Z^{n+1}\mathcal{D} + (a_0 E + a_1 Z + ... + a_n Z^n)$$

та

$$B = Z^{n+1}\mathcal{D}.$$

Встановимо необхідні й достатні умови еквівалентності в X цих операторів.

Нехай оператори A та B еквівалентні в X, тобто існує такий ізоморфізм T простору X на себе, що $TA = BT$. Оскільки оператор B має в X нетривіальний нуль (а саме, $Be^{(0)} = 0$), то й оператор A має в X нетривіальний нуль. Позначимо його через φ, тобто нехай $A\varphi = 0$. Тоді

$$(a_0\varphi_0, a_0\varphi_1 + a_1\varphi_0, ..., a_0\varphi_n + a_1\varphi_{n-1} + ... + a_n\varphi_0,$$
$$\varphi_1 + a_0\varphi_{n+1} + ... + a_n\varphi_1,$$
$$2\varphi_2 + a_0\varphi_{n+2} + ... + a_n\varphi_2, ...) = 0. \qquad (6)$$

Припустимо, що $a_0 \neq 0$. Тоді з (6) будемо мати

$$a_0\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0;$$
$$a_0\varphi_1 + a_1\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0;$$
$$... \; ... \; ...$$
$$a_0\varphi_n + a_1\varphi_{n-1} + ... + a_n\varphi_0 = 0, \quad \varphi_n = 0;$$
$$\varphi_1 + a_0\varphi_{n+1} + ... + a_n\varphi_1 = 0, \quad \varphi_{n+1} = 0;$$
$$... \; ... \; ...$$

Отже, $\varphi = 0$. Але це суперечить вибору φ. Тому $a_0 = 0$ і рівність (6) набуде вигляду

$$(0, a_1\varphi_0, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_0, ..., a_1\varphi_{n-1} + ... + a_n\varphi_0,$$
$$\varphi_1 + a_1\varphi_n + ... + a_n\varphi_1,$$
$$2\varphi_2 + a_1\varphi_{n+1} + ... + a_n\varphi_2, ...) = 0.$$

Повторюючи попередні міркування ще $n-1$ раз, прийдемо до висновку, що

$$a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = 0,$$

тобто (6) перепишеться так:

$$(0, ..., 0, a_n\varphi_0, \varphi_1 + a_n\varphi_1, 2\varphi_2 + a_n\varphi_2, ...) = 0.$$

Якщо $a_n = 0$, то отримаємо тривіальний випадок, коли $A = B$. Тому вважатимемо, що $a_n \neq 0$. Тоді з останньої рівності одержимо, що

$$\varphi_0 = 0;\ \varphi_1(1 + a_n) = 0;\ ...; \varphi_k(k + a_n) = 0; ...$$

А ці всі рівності можуть виконуватися, лише якщо при деякому $l \in \mathbb{N}$ матимемо, що $a_n = -l$, а $\varphi = e^{(l)}$.

Таким чином, якщо оператори A та B еквівалентні в X, причому $A \neq B$, то

$$A = Z^{n+1}\mathcal{D} - lZ^n,$$

де $l \in \mathbb{N}$.

Зафіксуємо якесь $l \in \mathbb{N}$. Нехай $Ae^{(l)} = 0$. Тоді $TAe^{(l)} = 0$. Але $TA = BT$, тому $B(Te^{(l)}) = 0$, тобто $Te^{(l)} = \lambda e^{(0)}$. Відзначимо, що тут $\lambda \neq 0$, бо ізоморфізм T не може мати нетривіального нуля. Крім цього, оскільки T – ізоморфізм простору X на себе, то з рівності $TA = BT$ випливає, що $T(Im\ A) = Im\ B$, де $Im\ A = \{y \in X :\ y = Ax,\ x \in X\}$.

Припустимо, що $l \geq n$. Тоді $e^{(l)} \in Im\ A$, бо $Ae^{(l-n)} = Z^{n+1}\mathcal{D}e^{l-n} - lZ^n e^{(l-n)} = -ne^{(l)}$. Тому $Te^{(l)} = \lambda e^{(0)} \in Im\ B$. Але це неможливо, бо $\lambda \neq 0$, а

$$\forall\ b \in Im\ B : \quad b_0 = b_1 = ... = b_n = 0.$$

Отримана суперечність вказує, що $l < n$.

Отже, отримані необхідні умови наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, а $a_0, a_1, ..., a_n$ – фіксовані числа з $\mathbb{C}$. Оператори*

$$A = Z^{n+1}\mathcal{D} + (a_0E + a_1Z + ... + a_nZ^n)$$

та

$$B = Z^{n+1}\mathcal{D}$$

є еквівалентними в просторі X тоді й лише тоді, коли

$$a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0, \quad a_n = -l,$$

де $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

Доведення. Достатність. Якщо $l = 0$, то $A = B$. Тому вважатимемо, що $l \in \{1, 2, ..., n-1\}$ $(n \geq 2)$. Для $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ через P_k позначатимемо такий оператор на X:

$$P_k x = \sum_{m=0}^{\infty} x_{mn+k} e^{(mn+k)}, \quad x \in X.$$

Очевидно, що всі оператори P_k $(k \in \{0, 1, ..., n-1\})$ лінійно й неперервно діють з X в X.

Зафіксуємо $l \in \{1, 2, ..., n-1\}$ і розглянемо на X оператори T і T_1, які визначаються формулами

$$Tx = (Z^{n+1-l}\mathcal{D} - lZ^{n-l})(P_0 + ... + P_{l-1})x +$$
$$+\Delta^l(P_l + ... + P_{n-1})x,$$
$$T_1 x = Z^l(P_0 + ... + P_{n-l-1})x +$$
$$+Z^l\mathcal{I}\Delta^{n+1}(P_{n-l} + ... + P_{n-1})x -$$
$$-\sum_{j=n-l}^{n-1} \frac{x_j}{n-j} e^{j-n+l}, \quad x \in X.$$

Міркуваннями, які повністю аналогічні до наведених у 2-му пункті при доведенні теореми 1, одержуємо, що для всіх $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$TT_1 e^{(m)} = T_1 T e^{(m)}, \quad TAe^{(m)} = BTe^{(m)}.$$

Враховуючи лінійність і неперервність в X операторів T, T_1, A та B і базисність в X системи $\{e^{(m)} :\ m \geq 0\}$, звідси отримуємо, що

$$TT_1 = T_1 T, \quad TA = BT.$$

А це означає, що T є ізоморфізмом простору X, а оператори A та B еквівалентні в X. Теорему доведено.

Відзначимо, що оскільки багато просторів аналітичних функцій ізоморфні до відповідних просторів послідовностей, що наділені нормальною топологією [3], а також ці простори послідовностей задовольняють ті умови, які накладалися на простір X у цьому пункті, то з теореми 2 одержуємо умови еквівалентності відповідних операторів у цих просторах аналітичних функцій.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995.— 297 с.

2. *Köthe G.* Topologische lineare Räume. Bd.1.- Berlin, 1960.— 307 p.

3. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1983.— 160 с.

Надійшла до редколегії 13.12.2004