УДК 517.956

©2004 р. У.Б. Ярка

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

ПРО ОДИН КЛАС КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ, ІЗОСПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Розглядаються ізоспектральні збурення задачі Діріхле для рівняння Пуассона в одиничному квадраті. Досліджені спектральні властивості задачі. Доведено, що спектр таких задач є незмінним, а система власних функцій збуреної задачі утворює базу Ріса. Для звичайних диференціальних рівнянь та диференціально-операторних рівнянь аналогічні задачі вивчались у працях [1,2,3].

We consider isospectral perturbations of the Dirichlet problem for the Poisson equations in the unit square. Spectral properties of such problems are studied. We prove that eigenfunctions of the perturbed problem form a Riesz basis. Conditions of existence and uniqueness of the solution are established. Similar problems for ordinary differential equations and operator- differentional equations was studied in [1,2,3].

1. Вступ. При застосуванні узагальненого методу відокремлених змінних [4] для дослідження розв'язків ряду нелокальних крайових задач було запропоновано метод ізоспектральних збурень. Задачі з нелокальними крайовими умовами складної структури певним чином вибраним відображенням зводилися до класичних (незбурених задач), властивості яких добре вивчені. Було доведено, що спектр таких задач при цьому відображенні залишається незмінним. Досліджувалися умови існування та єдиності розв'язку цих задач. У монографії [4] описані крайові задачі з однаковим спектром для лінійних диференціальних рівнянь на скінченному інтервалі, нелокальні задачі з однаковим спектром: для диференціально-операторних рівнянь парного порядку, для еліптичних задач вищого порядку. В попередніх дослідженнях [4] вивчався випадок, коли при фіксованому диференціальному рівнянні ізоспектральні збурення належали різним класам нелокальних умов (двоточкові, багатоточкові, інтегральні). У працях [1,2,3] метод ізоспектральних збурень поширюється на задачі з однаковими крайовими умовами та зміненими (збуреними) рівняннями. Досліджуються системи власних функцій таких задач, знайдено їх розв'язки в явному вигляді. Метою даної статті є дослідження ізоспекрального збурення задачі Діріхле для рівняння Пуассона в одиничному квадраті та встановлення умови існування та єдиності розв'язку збуреної задачі.

2. Основні результати. Нехай $L_2(K)$ — гільбертів простір дійснозначних функцій, інтегрованих з квадратом модуля за Лебегом на $K = (0,1) \times (0,1) \subset R^2$, $S = \partial K$,

$$W_2^2(K) = \left\{ u(x,y) \in L_2(K), \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \in L_2(K), \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \in L_2(K) \right\},$$

$$\|u(x,y)\|^2_{W_2^2(K)} = \|u(x,y)\|^2_{L_2(K)} +$$

$$+ \left\| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \right\|^2_{L_2(K)} + \left\| \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \right\|^2_{L_2(K)}.$$

Розглянемо задачу

$$\hat{L}u(x,y) = \hat{L}_0 u(x,y) + \Delta L u(x,y) = f(x,y),$$

$$u(x,y) \in W_2^2(K),$$

$$\hat{L}_0 u(x,y) = -\Delta u(x,y), \quad (x,y) \in K, \tag{1}$$

де

$$-\Delta u(x,y) \equiv -\left(\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right),$$

$$\Delta L u(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,y) - u(1-x,1-y)\right).$$

$$u(x,y)|_{x=0} = 0, \ u(x,y)|_{x=1} = 0$$

$$u(x,y)|_{y=0} = 0, \ u(x,y)|_{y=1} = 0 \tag{2}$$

та задачу

$$\hat{L}_0 u(x,y) = -\Delta u(x,y) = f(x,y) \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{x=0} = 0, \quad u(x,y)|_{x=1} = 0,$$

$$u(x,y)|_{y=0} = 0, \quad u(x,y)|_{y=1} = 0. \tag{4}$$

Задача (1), (2) є збуренням задачі Діріхле для рівняння Пуасона (3), (4). Визначимо оператори L_0, L:

$$L_0, L : L_2(K) \to L_2(K), L_0 u(x,y) \equiv \hat{L_0} u(x,y),$$

$$Lu(x,y) \equiv \hat{L} u(x,y), \quad u \in D(L_0) = D(L) =$$
$$= \{u \in W_2^2(K), u|_S = 0\}.$$

Теорема 1. *1. Точковий спектр оператора L збігається з точковим спектром оператора L_0,*

$$S_p(L) = S_p(L_0) =$$
$$= \{\lambda_{k,m} : \lambda_{k,m} = (\pi k)^2 + (\pi m)^2, \quad k,m \in N\}.$$

2. Система власних функцій $V(L)$ є повною та мінімальною в $L_2(K)$.

3. Система власних функцій $V(L)$ є базою Ріса в $L_2(K)$.

Доведення. Скористаємось відомою теоремою: оператор L_0 має систему власних функцій $V(L_0) = \{v_{k,m}^0(x,y) \in H : v_{k,m}^0(x,y) = 2\sin \pi kx \sin \pi my\}$, яка утворює ортонормовану базу в $L_2(K)$ та множину власних значень $S_p(L_0) = \left\{\lambda_{k,m} : \lambda_{k,m} = (\pi k)^2 + (\pi m)^2, \quad k,m \in N\right\}$.

Власні функції оператора L будемо шукати у вигляді $v_{l,m} = v_{l,m}^0 + \Delta v_{l,m}$, де $v_{l,m}^0$ — власна функція оператора $L_0 (l,m \in N)$. Розглянемо оператор ΔL: $H_{00} \cap W_2^2(K)$; $\Delta L : H_{11} \cap W_2^2(K) \to 0$, $\Delta L : H_{01} \cap W_2^2(K) \to H_{11}$, $\Delta L : H_{10} \cap W_2^2(K) \to H_{00}$, оскільки $\Delta v_{2k-1,m} \in H_{0t}$, то $\Delta L \Delta v_{2k-1,m} = 0$, отже $Lv_{2k-1,m} = L_0 v_{2k-1,m}^0$ і $\lambda_{2k-1,m}(L) = \lambda_{2k-1,m}(L_0)$, $(t = 0,1, m,k \in \mathbf{N})$.

Тому власні функції оператора L будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} v_{2k-1,2m-1} = v_{2k-1,2m-1}^0 \,; \\ v_{2k,2m} = v_{2k,2m}^0; \\ v_{2k-1,2m} = v_{2k-1,2m}^0 + \Delta v_{2k-1,2m}; \\ v_{2k,2m-1} = v_{2k,2m-1}^0 + \Delta v_{2k,2m-1}; \end{cases}$$

Враховуючи, що $v_{2k-1,2m-1}^0 \in H_{00}, v_{2k,2m}^0 \in H_{11}$, $v_{2k-1,2m}^0 \in H_{01}, v_{2k,2m-1}^0 \in H_{10}$, та підставляючи $v_{2k-1,2m} = v_{2k-1,2m}^0 + \Delta v_{2k-1,2m}$ у співвідношення $Lv_{2k-1,2m} = \lambda_{2k-1,2m} v_{2k-1,2m}$, отримаємо

$$(L_0 - \lambda_{2k-1,2m}) \Delta v_{2k-1,2m} = -\Delta L v_{2k-1,2m}^0. \tag{5}$$

Оскільки $\Delta L v_{2k-1,2m}^0 \in H_{11}$ та оператор$(L_0 - \lambda_{2k-1,2m})$ не змінює парності функції $\Delta v_{2k-1,2m}$, отримаємо, що $\Delta v_{2k-1,2m} \in H_{11}$. Аналогічно доводиться, що $\Delta v_{2k,2m-1} \in H_{00}$.

Отже, функцію $\Delta v_{2k-1,2m} \in H_{11}$ будемо шукати у вигляді:

$$\Delta v_{2k-1,2m} = C(2x-1)\sin(2k-1)\pi x \times$$
$$\times \sin(2k\pi y), \quad C = \text{const}. \tag{6}$$

Підставивши (6) в (1), отримаємо, що

$$((2k)^2 + (2m-1) - (2k)^2 - (2m-1)^2)\pi^2 \times$$
$$\times c(2x-1)\sin(2k)\pi x \sin(2m-1)\pi y -$$
$$- c 8k\pi \cos 2k\pi x \sin(2m-1)\pi y =$$
$$= 8k\pi \cos 2k\pi x \sin(2m-1)\pi y, \quad c = -1.$$

Тому $\Delta v_{2k-1,2m} = -(2x-1)\sin(2k-1)\pi x \sin(2k)\pi y$, $(m,k \in N)$. Аналогічно отримаємо, що $\Delta v_{2k,2m-1} = (2x-1)\sin(2k)\pi x \sin(2m-1)\pi y$, $(m,k \in N)$. Отже, система власних функцій оператора L буде мати вигляд

$$\begin{cases} v_{2k-1,2m-1} = v_{2k-1,2m-1}^0, \\ v_{2k,2m} = v_{2k,2m}^0, \\ v_{2k-1,2m} = v_{2k-1,2m}^0 + \Delta v_{2k-1,2m}, \\ v_{2k,2m-1} = v_{2k,2m-1}^0 + \Delta v_{2k,2m-1}, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$\Delta v_{2k,2m-1} = (2x-1)\sin 2k\pi x \sin(2m-1)\pi y,$$

$$\Delta v_{2k-1,2m} = -(2x-1)\sin(2k-1)\pi x \times$$
$$\times \sin 2m\pi y, \quad (m,k \in N).$$

Визначимо оператор $Q : V(L_0) \to V(L)$, $(k,m \in N)$, так, що

$$Q = E + R, \tag{8}$$

де

$$R : \begin{cases} v^0_{2k-1,2m-1}, v^0_{2k,2m} \to 0 & , \\ v^0_{2k,2m-1} \to \Delta v_{2k,2m-1}, \\ v^0_{2k-1,2m} \to \Delta v_{2k-1,2m}, \end{cases}$$

з означення R маємо:

$$R : H_{10} \to H_{00},\ R : H_{01} \to H_{11}$$
$$R : H_{00}, H_{11} \to 0, \quad R^2 = 0.$$

Означення 1. *Нехай H — гільбертів простір, система $\{\tilde{h}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ називається біортогональною до системи $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$, якщо $(h_m, \tilde{h}_n)_H = \delta_{m,n}$ $(m,n \in N)$.*

З (8) випливає, що існують оператори $Q^{-1} = E - R$, $(Q^{-1})^* = E - R^*$. Тому оператор $(Q^{-1})^*$ визначає єдину біортогональну систему $\tilde{V}(L)$, до $V(L)$

$$\tilde{v}_{r,m} = (E - R^*)v^0_{r,m}. \tag{9}$$

Отже, система $V(L)$ є мінімальною системою в $L_2(K)$. Покажемо, який мають вигляд елементи системи $\tilde{V}(L)$. Враховуючи (6), отримуємо

$$\begin{cases} \tilde{v}_{2k-1,2m-1} = v^0_{2k-1,2m-1} + \Delta\tilde{v}_{2k-1,2m-1}; \\ \tilde{v}_{2k,2m} = v^0_{2k,2m} + \Delta\tilde{v}_{2k,2m}; \\ \tilde{v}_{2k-1,2m} = v^0_{2k-1,2m}; \\ \tilde{v}_{2k,2m-1} = v^0_{2k,2m-1}; \end{cases}$$

де $\Delta\tilde{v}_{2k-1,2m-1} = \beta(2x-1)\sin(2k-1)\pi x \sin(2m-1)\pi y$, $\Delta\tilde{v}_{2k,2m} = \gamma\,(2x-1)\sin\,(2k)\,\pi x \sin 2m\pi y$, γ, β — шукані константи.

З умов біортогональності $(v_{s,m}, \tilde{v}_{q,r}) = \delta_{s,q}\delta_{m,r}$ випливає, що

$$(v_{2k-1,2m}, \tilde{v}_{2k,2m})_{L_2(K)} = 0, \quad s \neq q, m = r,$$

$$(v_{2k-1,2m}, \tilde{v}_{2k,2m})_{L_2(K)} = (v^0_{2k-1,2m}, v^0_{2k,2m})_{L_2(K)} +$$
$$+ (\Delta v_{2k-1,2m}, v^0_{2k,2m})_{L_2(K)} + (v^0_{2k-1,2m},$$
$$\Delta v_{2k,2m})_{L_2(K)} + (\Delta v_{2k-1,2m}, \Delta v_{2k,2m})_{L_2(K)}.$$

Враховуючи, що $H_{11} \perp H_{10} \perp H_{01} \perp H_{00}$, отримаємо:

$$(v_{2k-1,2m}, \tilde{v}_{2k,2m}) = (\Delta v_{2k-1,2m}, v^0_{2k,2m}) +$$
$$+ \left(v^0_{2k-1,2m}, \Delta v_{2k,2m}\right) = 0,$$

$$\left(\Delta v_{2k-1,2m}, v^0_{2k,2m}\right) + \left(v^0_{2k-1,2m}, \Delta v_{2k,2m}\right) = 0,$$

$$-\int_0^1 \beta(2x-1)\sin(2k-1)\pi x \sin(2k)\pi x dx =$$

$$= 2\int_0^1 \sin^2(2m-1)\pi y dy = -\int_0^1 (2x-1) \times$$

$$\times \sin(2k-1)\pi x \sin(2k)\pi x dx =$$

$$= 2\int_0^1 \sin^2(2m-1)\pi y dy.$$

Отже, $\beta = 1$. Аналогічно, використовуючи умову біортогональності $(v_{2k,2m-1}, \tilde{v}_{2k-1,2m-1}) = 0$, $s \neq q$, $m = r$, отримуємо $\gamma = -1$.

Решта умов біортогональності автоматично випливає з ортонормованості системи $V(L_0)$.

Біортогональна система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \tilde{v}_{2k-1,2m-1} = v^0_{2k-1,2m-1} + \Delta v_{2k-1,2m-1}; \\ \tilde{v}_{2k,2m} = v^0_{2k,2m} + \Delta v_{2k,2m}; \\ \tilde{v}_{2k-1,2m} = v^0_{2k-1,2m}; \\ \tilde{v}_{2k,2m-1} = v^0_{2k,2m-1}; \end{cases}$$

де $\Delta v_{2k,2m} = -(2x-1)\sin(2k)\pi x \sin(2m)\pi y$; $\Delta v_{2k-1,2m-1} = (2x-1)\sin(2k-1)\pi x \sin(2m-1)\pi y$. У гільбертовому просторі поняття повноти збігається з поняттям тотальності. Система $V(L)$ є тотальною в $L_2(K)$, а отже, і повною.

Означення 2. *Повна й мінімальна система $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ називається базою Ріса в гільбертовому просторі H , якщо існує ізоморфізм M такий, що $\{Mv_k\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормована база.*

Щоб довести базисність Ріса системи $V(L)$, згідно з формулою (8), досить довести обмеженість оператора R.

Нехай $w(x,y) \in L_2(K)$, тоді $w(x,y) = \sum_{m,k} w_{k,m} v^0_{2k,m}$. Розглянемо: $\|Rw(x,y)\|^2_{L_2(K)} = \|R\sum_{m,k} w_{k,m} v^0_{2k,m}\|^2_{L_2(K)} = \|\sum_{m,k} w_{k,m} R v^0_{2k,m}\|^2_{L_2(K)} = \|\sum_{m,k} w_{k,m}(2x-1)\sin(2k\pi x)\sin(m\pi y)\|^2_{L_2(K)} = \|(2x-1)\sum_{m,k} w_{k,m}\sin(2k\pi x)\sin(m\pi y)\|^2_{L_2(K)} \le \|2x-1\|^2_{L_2(K)}\sum_{k,m}|w_{2k,m}|^2 \le \frac{1}{3}\|w(x,y)\|^2_{L_2(K)}$. Отже, оператор R обмежений в $L_2(K)$, а тому система $V(L)$ є базою Ріса в $L_2(K)$.

Означення 3. *Розв'язком задачі (3), (4) ((1), (2)) називається функція $u(x,y) \in W^2_2(K)$, що задовольняє рівняння (3) ((1)) в сенсі рівності в просторі $L_2(K)$.*

Дослідимо властивості розвязку задачі (3),(4).

Теорема 2. *Для будь-якої функції $f(x,y) \in L_2(G)$ існує єдиний розв'язок задачі (3), (4) та виконується оцінка $C_1\|f\|^2_{L_2(K)} \le \|u\|^2_{W^2_2(K)} \le C_2\|f\|^2_{L_2(K)}$.*

Доведення. Розв'язок $u(x,y)$ задачі (3), (4) та функцію $f(x,y)$ розвинемо в ряди Фур'є за системою $V(L_0)$

$$u(x,y) = \sum_{k,s=1}^{\infty} u^0_{s,k} v^0_{k,s}(x,y),$$

$$f(x,y) = \sum_{k,s=1}^{\infty} f^0_{s,k} v^0_{k,s}(x,y),$$

$$f^0_{s,k} = 2\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin k\pi y \sin s\pi x\,dx\,dy,$$

Підставляючи розклади в рівняння (3) та враховуючи базисність системи $V(L_0)$, отримаємо $u^0_{s,k} = \lambda^{-1}_{s,k} f^0_{s,k} (s,k \in N)$,

$$\|u(x,y)\|^2_{W^2_2(K)} =$$

$$= \|u(x,y)\|^2_{L_2(K)} + \|\Delta u(x,y)\|^2_{L_2(K)} =$$

$$= \sum_{k,s=1}^{\infty} |\ M^0_{s,k}\ |^2\ \|v^0_{k,s}(x,y)\|^2 + \sum_{k,s=1}^{\infty} |\ f^0_{k,s}\ |^2 =$$

$$= \sum_{k,s=1}^{\infty} |\ f^0_{k,s}\ |^2\ (1+\lambda^{-2}_{s,k}) \le (1+\min\lambda^{-2}_{s,k})\times$$

$$\times\|f(x,y)\|^2_{L_2(K)} = C_2\,\|f\|^2_{L_2(K)}\,.$$

Оцінимо $\|u(x,y)\|^2_{W^2_2(K)}$ зверху:

$$\|u(x,y)\|^2_{W^2_2(K)} \ge \|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\|^2_{L_2(K)} +$$

$$+|\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\|^2_{L_2(K)} = \sum_{k,s=1}^{\infty} |\ f^0_{k,s}\ |^2\ \lambda^{-2}_{s,k}(\pi^4 k^4 +$$

$$+\pi^4 s^4) = C_1\,\|f\|^2_{L_2(K)}\,.$$

Теорему доведено.

Визначимо умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 3. *Для будь-якої функції $f(x,y) \in L_2(G)$ існує єдиний розв'язок $\hat{u}(x,y)$ задачі (1)(2) та виконується оцінка*

$$C_2\,\|f\|^2_{L_2(K)} \le \|\hat{u}\|^2_{W^2_2(K)} \le C_3\,\|f\|^2_{L_2(K)}$$

Доведення. Розв'язок $\hat{u}(x,y)$ задачі (1), (2) та функцію $f(x,y)$ розвинемо у ряди Фур'є за системою $V(L)$

$$\hat{u}(x,y) = \sum_{k,s=1}^{\infty} \check{M}_{s,k} v_{k,s}(x,y),$$

$$\check{M}_{s,k} = (\hat{u}, v_{s,k})_{L_2(K)},$$

$$f(x,y) = \sum_{k,s=1}^{\infty} f_{s,k} v_{k,s}(x,y),$$

$$f_{s,k} = \int_0^1\int_0^1 f(x,y) v_{k,s}(x,y) dxdy,$$

Аналогічно, як у теоремі 2, отримуємо $M_{s,k} = \lambda^{-1}_{s,k} f_{s,k}$. Оператор L задачі (1), (2) можна зобразити у вигляді $L = QL_0Q^{-1}$. Оскільки оператори Q^{-1}, L_0^{-1} обмежені, то існує оператор $L^{-1} = QL_0^{-1}Q^{-1}$, який також обмежений. Тому $\|\hat{u}\|^2_{W^2_2(K)} = \|L^{-1}f\|^2_{W^2_2(K)} \le C_3\,\|f\|^2_{L_2(K)}$. У другий бік $\|\hat{u}\|^2_{W^2_2(K)} = \|\hat{u}\|^2_{L_2(K)} + \|L\hat{u}\|^2_{L_2(K)} \ge \|L\hat{u}\|^2_{L_2(K)} = C_2\,\|f\|^2_{L_2(K)}$. Теорему доведено.

3. Висновки. Дані результати мають важливі апроксимаційні аспекти, можливість подальшого використання для дослідження еволюційних рівнянь. З точки зору застосування, властивість ізоспектральності є важливою в методі оберненої спектральної задачі, теорії розширень диференціальних операторів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баранецький Я.О., Ярка У.Б.* Про один клас крайових задач для диференціально-операторних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 1999.— **42**, N 4.— С.1—6.

2. *Баранецький Я.О., Каленюк П.І., Ярка У.Б.* Збурення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісн. держ. ун-ту "Львівська політехніка".— 1998.— N 337.— С.70—73.

3. *Ярка У.Б.* Спектральні властивості граничної задачі для абстрактного диференціального рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.— 2000.— Вип.56.— С.185—192.

4. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных.— К.: Наук. думка, 1993.— 229 с.

Стаття надійшла до редколегії 15.12.2003