УДК 517.98

©2004 р. І.В. Чернега

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОЛЯРИЗАЦІЙНОЇ ФОРМУЛИ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ПОЛІНОМІВ І АНАЛІТИЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Пропонується узагальнення поляризаційної формули для неоднорідних поліномів і аналітичних функцій на банахових просторах.

It is proposed a generalization of polarization formula for nonhomogeneous polynomials and analytic functions on Banach spaces.

1. Вступ і попередні відомості. Відображення P між лінійними просторами X, Y називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує симетрична n-лінійна форма $A : X^n \to Y$ така, що $P(x) = A(x, \ldots, x)$. Вказана n-лінійна форма однозначно визначається через поліном за допомогою *поляризаційної формули* (див. нижче), яка є одним із фундаментальних результатів у теорії поліномів і полілінійних відображень. Ця формула відома з 1930 року [1], але протягом наступних років постійно перевідкривалася і публікувалася у працях Мартіна [2], Мазура й Орліча [3] та інших. Поляризаційна формула має різноманітні зображення, зокрема за допомогою узагальнених функцій Радемахера.

Узагальнені функції Радемахера вперше були введені в [4]. Надалі їх успішно застосовували для отримання простих доведень різноманітних оцінок на норми поліномів (див. [5]). У даній статті узагальнені функції Радемахера будуть застосовані для доведення аналога поляризаційної формули для довільного неоднорідного полінома P на лінійному просторі X та для аналітичних відображень на банаховому просторі.

Для кожного натурального $n \geq 2$ узагальнені функції Радемахера $S_j^{[n]}(t)$ визначаються наступним чином (див. [4], [5]). Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ комплексні корені степеня n з одиниці. Позначимо $I_j = \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, і $I_{j_1 j_2}$ – відкритий j_2-підінтервал довжиною $\frac{1}{n^2}$ інтервалу I_{j_1} $(j_1, j_2 = 1, \ldots, n)$. Продовжуючи в такий спосіб, ми можемо визначити інтервал $I_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ для довільного k. Функцію $S_1^{[n]} : [0,1] \to C$ означуємо, припускаючи $S_1^{[n]}(t) = \alpha_j$ для $t \in I_j$, $1 < j < n$. Загалом, $S_k^{[n]}(t) = \alpha_j$, якщо t належить підінтервалу $I_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, де $j_k = j$. Узагальнені функції Радемахера володіють наступними властивостями, які ми будемо застосовувати в доведеннях:

1. Для довільного натурального k і для $t \in [0,1]$ маємо $|S_k^{[n]}(t)| = 1$.

2.
$$\int_0^1 S_{i_1}^{[n]}(t) \ldots S_{i_n}^{[n]}(t) dt =$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } i_1 = \ldots = i_n, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

3. Якщо $j_1, \ldots, j_k$ – попарно різні додатні цілі числа, то для $\sigma_j^{[n]}(t) = S_j^{[n]}(t)$ або $\sigma_j^{[n]}(t) = \overline{S_j^{[n]}(t)}$ виконується:
$$\int_0^1 (\sigma_{j_1}^{[n]})^{m_1}(t) \ldots (\sigma_{j_k}^{[n]})^{m_k}(t) dt =$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } m_1 \equiv \ldots \equiv m_k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n) \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

2. Поляризаційна формула для поліномів. Нехай X,Y – банахові простори, через $L_a(^nX, Y)$ позначимо простір симетричних n-лінійних форм $A : X \times \ldots \times X \to Y$. Через $P_a(^nX, Y)$ будемо позначати простір n-однорідних поліномів P :

$X \to Y$. Для кожного $P \in P_a({}^nX, Y)$ існує єдиний елемент $A \in L_a({}^nX, Y)$ такий, що $P(x) = A(x, \dots, x)$. Для отримання A з P застосовується поляризаційна формула, яку за допомогою узагальнених функцій Радемахера можна записати у вигляді [5]:

$$A\left(x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k}\right) = \frac{n_1! \dots n_k!}{n!} \times$$
$$\times \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-n_1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-n_k}(t) \times$$
$$\times P\left(S_1^{[n]}(t)x_1 + \dots + S_k^{[n]}(t)x_k\right) dt, \qquad (1)$$

де $n_1 + \dots + n_k = n$, $n_1, \dots, n_k$ – невід'ємні цілі числа. Тут і далі

$$A\left(x_1^{n_1}, \dots, x_k^{n_k}\right) := A(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{n_k}).$$

Нехай всі $n_1, \dots, n_k = 1$ і $k = n$, тоді формула (1) набуде вигляду

$$A\left(x_1, \dots, x_n\right) =$$
$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times P\left(S_1^{[n]}(t)x_1 + \dots + S_n^{[n]}(t)x_n\right) dt. \qquad (2)$$

Теорема 1. *Нехай $P = P_0 + \dots + P_n$ – довільний поліном степеня n на X, де $P_0 \equiv const$ і P_k – k-однорідні поліноми для $k = 1, \dots, n$. Нехай A_n – n-лінійна симетрична форма, яка породжує P_n. Тоді*

$$A_n\left(x_1, \dots, x_n\right) =$$
$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times P\left(S_1^{[n]}(t)x_1 + \dots + S_n^{[n]}(t)x_n\right) dt \qquad (3)$$

Доведення. Покажемо, що

$$A_n\left(x_1, \dots, x_n\right) =$$
$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n} P_k\left(S_1^{[n]}(t)x_1 + \dots + S_n^{[n]}(t)x_n\right) dt.$$

Порахуємо праву частину даної формули. Оскільки всі P_k, $1 \le k \le n$ є k-однорідними поліномами, ми отримуємо наступне:

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n} P_k\left(S_1^{[n]}(t)x_1 + \dots + S_n^{[n]}(t)x_n\right) dt =$$
$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n} \left(S_1^{[n]}(t)x_1 + \dots + S_n^{[n]}(t)x_n\right)^k dt =$$
$$= \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) dt +$$
$$+ \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{n} S_m^{[n]}(t) A_m\left(x_1\right) dt + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times \sum_{m_1, \dots, m_k = 1}^{n} S_{m_1}^{[n]}(t) \dots S_{m_k}^{[n]}(t) \times$$
$$\times A_k\left(x_{m_1}, \dots, x_{m_k}\right) dt + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times \sum_{m_1, \dots, m_n = 1}^{n} S_{m_1}^{[n]}(t) \dots S_{m_n}^{[n]}(t) \times$$
$$\times A_n\left(x_{m_1}, \dots, x_{m_n}\right) dt.$$

За властивістю 3 всі доданки останньої суми при $0 \le k \le n-1$ перетворюються в нуль. Отже,

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t) \dots \left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t) \times$$
$$\times \sum_{m_1, \dots, m_n = 1}^{n} S_{m_1}^{[n]}(t) \dots S_{m_n}^{[n]}(t) \times$$
$$\times A_n\left(x_{m_1}, \dots, x_{m_n}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t)\ldots\left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t)\times$$

$$\times P_n\left(S_1^{[n]}(t)x_1+\ldots+S_n^{[n]}(t)x_n\right)dt=$$

$$= A_n\left(x_1,\ldots,x_n\right),$$

що й треба було довести.

Позначимо $\Pi_n\left(P\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right)=$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 \left(S_1^{[n]}\right)^{n-1}(t)\ldots\left(S_n^{[n]}\right)^{n-1}(t)\times$$

$$\times P\left(S_1^{[n]}(t)x_1+\ldots+S_n^{[n]}(t)x_n\right)dt$$

Теорема 2. *Для довільного* $1\le k\le n$ *і полінома* $P=P_0+\ldots+P_n$ *виконується рівність*

$$A_k\left(x_1,\ldots x_k\right)=\Pi_k(P)(x_1,\ldots,x_k)-$$

$$-\sum_{\mu\in J_n^k}\Pi_{\mu k}\left(P\right)\left(x_1^{\mu},\ldots,x_k^{\mu}\right),$$

де $A_k(x,\ldots,x)=P_k$, *а* J_n^k *– множина всіх простих чисел, які більші за одиницю і не превищують* n/k.

Доведення. За теоремою 1 $A_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\Pi_n(P)(x_1,\ldots,x_n)$.

Нехай $P=P_0+\ldots+P_n$, знайдемо $A_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)$, $1\le k\le n$. За властивістю 3 узагальнених функцій Радемахера всі $\Pi_k(P_m)$, $0\le m\le k-1$, дорівнюють нулю. Отже, залишається

$$\Pi_k\left(P\right)\left(x_1,\ldots,x_k\right)=$$

$$= \frac{1}{k!}\int_0^1 \left(S_1^{[k]}\right)^{k-1}(t)\ldots\left(S_k^{[k]}\right)^{k-1}(t)\times$$

$$\times P_k\left(S_1^{[k]}(t)x_1+\ldots+S_k^{[k]}(t)x_k\right)dt+\ldots$$

$$+\frac{1}{k!}\int_0^1 \left(S_1^{[k]}\right)^{k-1}(t)\ldots\left(S_k^{[k]}\right)^{k-1}(t)\times$$

$$\times P_n\left(S_1^{[k]}(t)x_1+\ldots+S_k^{[k]}(t)x_k\right)dt=$$

$$= \frac{1}{k!}\int_0^1 \left(S_1^{[k]}\right)^{k-1}(t)\ldots\left(S_k^{[k]}\right)^{k-1}(t)\times$$

$$\times P_k\left(S_1^{[k]}(t)x_1+\ldots+S_k^{[k]}(t)x_k\right)dt+$$

$$+\frac{1}{k!}\int_0^1 \left(S_1^{[k]}\right)^{k-1}(t)\ldots\left(S_k^{[k]}\right)^{k-1}(t)\times$$

$$\times P_{2k}\left(S_1^{[k]}(t)x_1+\ldots+S_k^{[k]}(t)x_k\right)dt+\ldots$$

$$+\frac{1}{k!}\int_0^1 \left(S_1^{[k]}\right)^{k-1}(t)\ldots\left(S_k^{[k]}\right)^{k-1}(t)$$

$$P_{mk}\left(S_1^{[k]}(t)x_1+\ldots+S_k^{[k]}(t)x_k\right)dt,$$

$mk\le n$, $m(k+1)>n$. Таким чином, ми отримали, що

$$\Pi_k\left(P\right)\left(x_1,\ldots,x_k\right)=$$

$$=A_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)+A_{2k}\left(x_1^2,\ldots,x_k^2\right)+\ldots$$

$$+A_{mk}\left(x_1^m,\ldots,x_k^m\right).$$

Звідси

$$A_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)=\Pi_k\left(P\right)\left(x_1,\ldots,x_k\right)-$$

$$-A_{2k}\left(x_1^2,\ldots,x_k^2\right)-\ldots-A_{mk}\left(x_1^m,\ldots,x_k^m\right) \quad (4)$$

У свою чергу,

$$A_{2k}\left(x_1^2,\ldots,x_k^2\right)=\Pi_{2k}\left(P\right)\left(x_1^2,\ldots,x_k^2\right)-$$

$$-A_{4k}\left(x_1^4,\ldots,x_k^4\right)-\ldots-A_{2rk}\left(x_1^{2r},\ldots,x_k^{2r}\right),$$

$2rk\le n$, $2r(k+1)>n$;

$$A_{3k}\left(x_1^3,\ldots,x_k^3\right)=\Pi_{3k}\left(P\right)\left(x_1^3,\ldots,x_k^3\right)-$$

$$-A_{6k}\left(x_1^6,\ldots,x_k^6\right)-\ldots-A_{3pk}\left(x_1^{3p},\ldots,x_k^{3p}\right),$$

$3pk\le n$, $3p(k+1)>n$ і т. д. Підставивши всі A_{tk}, $2\le t\le m$ в (4) і скоротивши відповідні доданки, ми отримаємо, що

$$A_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)=\Pi_k\left(P\right)\left(x_1,\ldots,x_k\right)-$$

$$-\sum_{\mu\in J_n^k}\Pi_{\mu k}\left(P\right)\left(x_1^{\mu},\ldots,x_k^{\mu}\right).$$

Наслідок. *Для довільного полінома* P *степеня* n *з* X *в* Y

$$\Pi_k(P)(x_1,\ldots,x_k)=A_k(x_1,\ldots,x_k)+$$

$$+\sum_{\mu\in J_n^k}A_{\mu k}(x_1^{\mu},\ldots,x_k^{\mu}).$$

3. (k,m)**-лінійні форми.**

Означення. *Скажемо, що відображення $B : X^k \to Y$ називається (k,m)-лінійним відображенням, якщо $B(x_1,\ldots,x_k)$ є m-однорідним поліномом по кожному окремому аргументу при інших фіксованих. Відображення B називається симетричним, якщо $B(x_1,\ldots,x_k) = B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(k)})$ для довільної підстановки σ.*

Легко бачити, що для симетричного (k,m)-лінійного відображення B існує єдине km-лінійне відображення A таке, що

$$B(x_1,\ldots,x_k) = A(x_1^m,\ldots,x_k^m).$$

Нехай тепер X, Y – банахові простори, $L(^nX,Y)$, $P(^nX,Y)$ – простори неперервних n-лінійних форм з X^n в Y та неперервних n-однорідних поліномів з X в Y відповідно. Позначимо $L(^k_mX,Y)$–простір (k,m)-лінійних відображень. Зауважимо, що простори $L(^nX,Y)$, $L(^k_mX,Y)$, $P(^nX,Y)$ є банаховими відносно sup-норм на одиничних кулях відповідних просторів. Позначимо $P(X,Y)$ та $L(^k_\infty X,Y)$ пряму суму просторів $P(^nX,Y)$ при $n\to\infty$ та $L(^k_mX,Y)$ при $m\to\infty$ з топологією локально опуклої прямої суми.

Твердження 1. *Відображення Π_k є неперервним лінійним оператором з $P(X,Y)$ в $L(^k_\infty X,Y)$.*

Доведення. Оператор Π_k є лінійним згідно з означенням. Доведемо його неперервність. Нехай $P\in P(^nX,Y)$ для деякого n. Якщо n не ділиться на k, то $\Pi_k(P)=0$. Припустимо, що $n=km$ для деякого m. Тоді очевидно, що

$$||P|| \le ||\Pi_k(P)|| \le ||A||,$$

де $A(x,\ldots,x)=P(x)$, оскільки, згідно з наслідком, $\Pi_k(P)(x_1,\ldots,x_k) = A(x_1^m,\ldots,x_k^m)$. З іншого боку, згідно з поляризаційною нерівністю [6, с. 10]

$$||A|| \le \frac{n^n}{n!}||P||.$$

Тому оператор Π_k обмежений на банаховому просторі $P(^nX,Y)$ і, отже, неперервний.

Оскільки кожен елемент з $P(X,Y)$ є скінченною сумою однорідних поліномів, то Π_k є неперервним на $P(X,Y)$.

4. Випадок аналітичних відображень. Нехай Ω – відкрита підмножина в X. Нагадаймо, що відображення $F : \Omega\to Y$ називається *аналітичним*, якщо для кожного $x_0\in\Omega$ існує окіл точки x_0, $V_{x_0}\subset\Omega$ такий, що для кожного $x\in V_{x_0}$

$$F(X) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x),$$

де F_k – неперервні k-однорідні поліноми і ряд збігається рівномірно на V_{x_0}.

Теорема 3. *Нехай A_k – k-однорідне симетричне відображення, яке відповідає k-однорідній компоненті F_k аналітичного відображення F. Тоді*

$$A_k(x_1,\ldots,x_k) = \Pi_k(F)(x_1,\ldots,x_k) - \\ -\sum_{\mu\in J}^{\infty} \Pi_{\mu k}(F)(x_1^\mu,\ldots,x_k^\mu),$$

де J – множина простих чисел, більших за одиницю.

Доведення. Згідно з теоремою 2, для довільного n

$$A_k(x_1,\ldots x_k) = \Pi_k\left(\sum_{j=0}^{n} F_j\right)(x_1,\ldots,x_k) - \\ -\sum_{\mu\in J_n^k} \Pi_{\mu k}\left(\sum_{j=0}^{n} F_j\right)(x_1^\mu,\ldots,x_k^\mu),$$

де J_n^k – множина простих чисел, які більші за одиницю й не перевищують n/k. Взявши границю від обох частин рівності при $n\to 0$ і врахувавши, що

$$\sum_{\mu\in J_n^k} \Pi_{\mu k}\left(\sum_{j=0}^{n} F_j\right) = \sum_{\mu\in J} \Pi_{\mu k}\left(\sum_{j=0}^{n} F_j\right)$$

одержимо

$$A_k(x_1,\ldots,x_k) = \\ = \lim_{n\to\infty} \Pi_k\left(\sum_{j=0}^{n} F_j\right)(x_1,\ldots,x_k) -$$

$$-\sum_{\mu\in J}\lim_{n\to\infty}\Pi_{\mu k}\left(\sum_{j=0}^{n}F_j\right)(x_1^{\mu},\ldots,x_k^{\mu}).$$

Внаслідок неперервності Π_k (твердження 1)

$$A_k\,(x_1,\ldots,x_k)=$$

$$\Pi_k\left(\sum_{j=0}^{\infty}F_j\right)(x_1,\ldots,x_k)-$$

$$-\sum_{\mu\in J}\Pi_{\mu k}\left(\sum_{j=0}^{\infty}F_j\right)(x_1^{\mu},\ldots,x_k^{\mu})=$$

$$=\Pi_k\,(F)\,(x_1,\ldots,x_k)-\sum_{\mu\in J}\Pi_{\mu k}\,(F)\,(x_1^{\mu},\ldots,x_k^{\mu}).$$

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bohnenblust H.F., Hille E.* On the absolute convergence of Dirichlet series // Ann. of Math. (2).— 1931.— 32.— P.610.

2. *Martin R.S.* Contributions to the theory of functionals // Thesis, University of California.— 1932 (unpublished).

3. *Mazur S., Orlicz W.* Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen I // Studia Math.— 1934.— 5.— P.50—68.

4. *Aron R.M., Globevnik J.* Analytic functions on c_0 // Revista Matematica (Madrid).— 1989.— 2.— P.27—34.

5. *Aron R.M., Lacruz M., Ryan R.A, Tonge A.M.* The generalized Rademacher Functions // Note Math.— 1992.— 12.— P.15—25.

6. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.— Springer-Verlag, 1999.— 542 p.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004