

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

## ЗАДАЧА З НЕФІКСОВАНОЮ ПРАВОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ СИСТЕМИ ІЗ ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку двоточної крайової задачі з нефіксованою правою межею для системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом.

The question of existence and approximate construction of a solution for a differential equations system with linearly transformed argument and unstable right border in two-point boundary conditions is investigated by the numerical-analytical method.

Чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка виявився надзвичайно ефективним та універсальним методом дослідження різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1-3]. Для рівнянь із відхиленим аргументом він поки що не знайшов такого ж широкого застосування [4]. Відзначимо праці [1, 5] та [6, 7], де розглянуто деякі крайові задачі відповідно для систем із постійним запізненням та диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

У даній статті розглядається система диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)), \quad (1)$$

де  $t \in [0, T]$ ;  $x, f \in R^n$ ;  $\lambda \in (0, 1)$ . Функція  $f(t, x, y)$  вважається неперервною за  $t, x, y$  в області  $G = [0, T] \times D \times D$ , де  $D$  – замкнена обмежена область в  $R^n$ .

Припустимо також, що функція  $f(t, x, y)$  в області  $G$  обмежена вектором  $M \in R^n$ ,  $M_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , та задовольняє умову Ліпшица за  $x, y$  з матрицею  $K = \{k_{ij} \geq 0; i, j = \overline{1, n}\}$

$$|f(t, x, y)| \leq M, \quad (2)$$

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}) - f(t, \underline{x}, \underline{y})| \leq K(|\bar{x} - \underline{x}| + |\bar{y} - \underline{y}|), \quad (3)$$

де  $|f(t, x, y)| = (|f_1(t, x, y)|, \dots, |f_n(t, x, y)|)$  і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Відзначимо, що у [8-10] для систем дещо більш загального вигляду обґрунтовано схеми чисельно-аналітичного методу у випадках відповідно багатоточкових, інтегральних та двоточкових із лінійним входженням параметра крайових умов.

Розглянемо для системи (1) двоточкові крайові умови з нефіксованою правою межею  $\mu \in (0, T]$  вигляду

$$Ax(0) + Bx(\mu) = d, \quad \det B \neq 0, \quad (4)$$

$$x_1(0) = x_{01}, \quad (5)$$

де  $A$  і  $B$  – сталі  $n \times n$  матриці,  $d$  – відомий сталий  $n$ -вимірний вектор,  $x_1$  – перша координата вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_{01}$  – задане значення.

Зауважимо, що для системи звичайних диференціальних рівнянь крайові умови вигляду (4), (5) розглядалися в [2].

Задача полягає у відшуванні розв'язку  $x = x^*(t)$  системи (1) і такого значення параметра  $\mu = \mu^* \in (0, T]$ , щоб пара  $(x^*(t), \mu^*)$  задовольняла умови (4), (5).

Позначимо через  $D_\beta$  множину точок  $x_0 \in R^n$ , що містяться разом зі своїм  $\beta$ -околом в області  $D$  при всіх значеннях параметра  $\mu$  із деякої області  $I_\mu = [\mu_1, T]$ ,  $\mu_1 > 0$ , де

$$\beta = \frac{\mu}{2}M + |B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0|.$$

Розумітимемо також надалі під  $\bar{D}$  множину векторів  $y_0 = (x_{02}, \dots, x_{0n}) \in R^{n-1}$  таких, що  $x_0 = \text{col}(x_{01}, y_0)$  належить  $D_\beta$ .

Нехай

$$D_\beta \neq \emptyset \quad (6)$$

і найбільше власне значення  $\nu_{\max}(Q)$  матриці  $Q = TK$  не перевищує одиниці

$$\nu_{\max}(Q) < 1. \quad (7)$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$\begin{aligned} x_m(t, y_0, \mu) = & x_0 + \\ & + Lf(t, x_{m-1}(t, y_0, \mu), x_{m-1}(\lambda t, y_0, \mu)) + \\ & + \frac{t}{\mu} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0], \quad m = 1, 2, \dots, \\ x_0(t, y_0, \mu) = & x_0 \in D_\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

де перша компонента вектора  $x_0$  задається згідно з (5), а оператор  $L$  діє на неперервну при  $t \in [0, \mu]$  функцію  $g(t)$  наступним чином:

$$Lg(t) \equiv \int_0^t \left[ g(z) - \frac{1}{\mu} \int_0^\mu g(s) ds \right] dz.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що всі функції  $x_m(t, y_0, \mu)$  задовольняють крайові умови (4), (5) для довільних  $y_0 \in \bar{D}$ ,  $\mu \in I_\mu$ .

Має місце наступне твердження про рівномірну збіжність послідовних наближень  $x_m(t, y_0, \mu)$  вигляду (8).

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови (2), (3), (6), (7). Тоді послідовність функцій  $x_m(t, y_0, \mu)$  вигляду (8), які для довільних  $y_0 \in \bar{D}$ ,  $\mu \in I_\mu$  задовольняють крайові умови (4), (5), рівномірно збігається при  $m \rightarrow \infty$  в області  $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu] \times \bar{D} \times I_\mu$  до граничної функції  $x^*(t, y_0, \mu)$ , яка задовольняє крайові умови (4), (5) і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + Lf(t, x(t), x(\lambda t)) + \\ & + \frac{t}{\mu} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] dt, \end{aligned} \quad (9)$$

який при  $t = 0$  проходить через точку  $x^*(0, y_0, \mu) = x_0 = (x_{01}, y_0)$ . Крім цього,  $x^*(t, y_0, \mu)$  є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)) + \Delta(y_0, \mu),$$

$$Ax(0) + Bx(\mu) = d, \quad x_1(0) = x_{01}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(y_0, \mu) = & \frac{1}{\mu} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \\ & - \frac{1}{\mu} \int_0^\mu f(t, x(t), x(\lambda t)) dt. \end{aligned}$$

Для відхилення  $x^*(t, y_0, \mu)$  від  $x_m(t, y_0, \mu)$  при всіх  $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu] \times \bar{D} \times I_\mu$  і  $m = 1, 2, \dots$  правильна оцінка

$$|x^*(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)| \leq W_m(y_0, \mu), \quad (11)$$

де  $W_m(y_0, \mu) \equiv Q^m(E - Q)^{-1}\beta$ .

**Доведення.** Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (8) є фундаментальною.

Встановимо спочатку, що при  $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$  всі функції  $x_m(t, y_0, \mu) \in D$ . На підставі (8) із урахуванням (2) та леми 2.1[2] знаходимо

$$\begin{aligned} |x_1(t, y_0, \mu) - x_0| \leq & 2t \left( 1 - \frac{t}{\mu} \right) M + \\ & + |[B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0]| \leq \beta. \end{aligned} \quad (12)$$

Тому  $x_1(t, y_0, \mu) \in D$ , як тільки  $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$ . Індукцією легко показати, що для всіх  $m = 1, 2, \dots$ ,  $t \in [0, \mu]$  і будь-яких  $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$  функції  $x_m(t, y_0, \mu)$  вигляду (8) не виходять за межі області  $D$ .

Припускаючи, що

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) = |x_{m+1}(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)|,$$

на підставі (8) із урахуванням (3) отримуємо

$$\begin{aligned} r_{m+1}(t, y_0, \mu) \leq & \\ \leq & K \left[ \left( 1 - \frac{t}{\mu} \right) \int_0^t \omega_m(s, y_0, \mu) ds + \right. \\ & \left. + \frac{t}{\mu} \int_t^\mu \omega_m(s, y_0, \mu) ds \right], \end{aligned} \quad (13)$$

де  $\omega_m(s, y_0, \mu) = r_m(s, y_0, \mu) + r_m(\lambda s, y_0, \mu)$ .

Згідно з (12),  $r_1(t, y_0, \mu) = |x_1(t, y_0, \mu) - x_0| \leq \beta$ , тому із (13) при  $m = 1$  знаходимо

$$r_2(t, y_0, \mu) \leq 2K\beta \cdot 2t \left(1 - \frac{t}{\mu}\right) \leq Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх  $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu] \times \bar{D} \times I_\mu$

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) \leq Q^m \beta, \quad m = 0, 1, \dots$$

Тому для  $j \geq 1$  маємо нерівність

$$\begin{aligned} & |x_{m+j}(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)| \leq \\ & \leq \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right) \beta = Q^m \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right) \beta. \end{aligned} \quad (14)$$

Умова (7) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leq (E - Q)^{-1}. \quad (15)$$

Тоді із (14) та (15) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність  $x_m(t, y_0, \mu)$  вигляду (8) рівномірно збігається при  $m \rightarrow \infty$  в області  $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu] \times \bar{D} \times I_\mu$  і

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, y_0, \mu) = x^*(t, y_0, \mu). \quad (16)$$

Оскільки всі послідовні наближення  $x_m(t, y_0, \mu)$  задовольняють крайові умови (4), (5), то й гранична функція  $x^*(t, y_0, \mu)$  для довільних  $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$  також їх задовольняє. При  $j \rightarrow \infty$  із (14), враховуючи (16) та (15), для всіх  $m = 1, 2, \dots$ ,  $(t, y_0, \mu) \in [0, \mu] \times \bar{D} \times I_\mu$  отримуємо оцінку (11). Крім цього, переходячи із урахуванням (16) у (8) до границі при  $m \rightarrow \infty$ , бачимо, що функція  $x^*(t, y_0, \mu)$  є розв'язком інтегрального рівняння (9), який при  $t = 0$  проходить через точку  $x^*(0, y_0, \mu) = x_0 = (x_{01}, y_0)$ . Отже, гранична функція  $x^*(t, y_0, \mu)$  справді є розв'язком крайової задачі (10). Теорему доведено.

Вкажемо необхідні й достатні умови, щоб гранична функція  $x^*(t, y_0, \mu)$  послідовності (8) була розв'язком задачі (1), (4), (5).

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок  $x^*(t)$  початкової задачі*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t)), \quad x(0) = x_0 = (x_{01}, y_0),$$

*був одночасно й розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), необхідно й досить, щоб пара  $(y_0, \mu)$  була розв'язком визначального рівняння*

$$\Delta(y_0, \mu) = 0, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(y_0, \mu) = & \frac{1}{\mu} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \\ & - \frac{1}{\mu} \int_0^\mu f(t, x^*(t, y_0, \mu), x^*(\lambda t, y_0, \mu)) dt \end{aligned}$$

При цьому  $x^*(t) = x^*(t, y_0, \mu)$  і для всіх  $m = 1, 2, \dots$ ,  $t \in [0, \mu]$  щодо відхилення точного розв'язку  $x^*(t) = x^*(t, y_0, \mu)$  крайової задачі (1), (4), (5) від її наближеного розв'язку  $x_m(t, y_0, \mu)$  вигляду (8) правильна оцінка (11).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (4), (5):

а) при  $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$  згідно з (8) будемо послідовність функцій  $x_m(t, y_0, \mu)$ , залежну від  $y_0$  та  $\mu$  як від параметрів;

б) знаходимо її граничну функцію  $x^*(t, y_0, \mu)$ ;

в) знаходимо розв'язок  $y_0 = y_0^*$ ,  $\mu = \mu^*$  визначального рівняння (17);

г) шукаємо розв'язок початкової задачі  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda t))$ ,  $x(0) = x_0 = (x_{01}, y_0^*)$ , або, що те саме, граничну функцію  $x^*(t, y_0^*, \mu^*)$  послідовності  $x_m(t, y_0^*, \mu^*)$ .

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), а за наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує  $W_m(y_0^*, \mu^*)$ , можна взяти функцію  $x_m(t, y_0^*, \mu^*)$  вигляду (8).

Очевидно, головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції  $x^*(t, y_0, \mu)$ .

Крім цього, з точки зору практичного застосування важливо вміти зробити висновки про існування розв'язку крайової задачі (1), (4), (5) не за граничною функцією  $x^*(t, y_0, \mu)$ , а за її  $m$ -тим наближенням  $x_m(t, y_0, \mu)$ .

Тому розглянемо наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(y_0, \mu) = 0, \quad (18)$$

де

$$\Delta_m(y_0, \mu) = \frac{1}{\mu} [B^{-1}d - (B^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu} f(t, x_m(t, y_0, \mu), x_m(\lambda t, y_0, \mu)) dt,$$

яке відрізняється від точного лише тим, що замість граничної функції  $x^*(t, y_0, \mu)$  фігурує її  $m$ -те наближення  $x_m(t, y_0, \mu)$ .

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (4), (5) дає наступне твердження.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область  $\tilde{D} \times \tilde{I}_\mu \subset \bar{D} \times I_\mu$ , в якій наближене визначальне рівняння (18) має для деякого фіксованого  $m \geq 1$  єдиний розв'язок  $(y_0, \mu) = (y_{0m}, \mu_m)$  ненульового індексу;

2) на межі  $S$  області  $\tilde{D} \times \tilde{I}_\mu$  виконується нерівність

$$\inf_{(y_0, \mu) \in S} |\Delta_m(y_0, \mu)| > 2KW_m(y_0, \mu).$$

Тоді крайова задача (1), (4), (5) має розв'язок  $(x^*(t), \mu^*)$ , початкове значення  $x^*(0) = \text{col}(x_{01}, y_0^*)$  якого таке, що  $y_0^* \in \tilde{D}$ , а  $\mu^* \in \tilde{I}_\mu$ .

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 19.1[2].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.— К.: Наук. думка, 1985.— 224 с.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— К.: Наук. думка, 1992.— 280 с.
3. *Трофимчук Е.П., Коваленко А.В.* Численно-аналитический метод А.М. Самойленко без определяющего уравнения // Укр. мат. журн.— 1995.— **47**, N 1.— С.138—140.
4. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Укр. мат. журн.— 1998.— **50**, N 7.— С.960—979.
5. *Янчук С.В.* Дослідження неавтономних диференціальних рівнянь та системи Чуа: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук.— Київ, 1997.— 111 с.
6. *Augustynowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr.— 1990.— **145**.— P.255—269.
7. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, N 1.— С.128—132.
8. *Філіпчук М.П., Бігун Я.Й.* Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. мат. журн.— 1998.— **50**, N 11.— С.1581—1585.
9. *Філіпчук М.П.* Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— Чернівці: Прут, 2001.— Вип.7.— С.243—250.
10. *Філіпчук М.П.* Крайова задача з параметром для системи із перетвореним аргументом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.103—106.

Стаття надійшла до редколегії 5.12.2003