УДК 517.928

©2004 р. Т.М. Сопронюк, П.М. Дудницький

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ІМПУЛЬСНОЇ БАГАТОЧАСТОТНОЇ СИСТЕМИ

Знайдено достатні умови розв'язності багатоточкових задач із параметрами для резонансних коливних систем із фіксованими моментами імпульсної дії, частоти яких залежать від "повільного часу". За допомогою методів усереднення та стислих відображень доведено існування та єдиність розв'язків багатоточкових задач для таких систем.

We have found sufficient conditions for the possibility of solving multidot problems with parameters for the resonant oscillating systems frequencies of which depend on "slow time". By means of methods of averaging and tough reflections the existence and uniqueness of solutions of solving multidot problems for the same systems have been proved.

Застосування методу усереднення для розв'язування багаточастотних крайових задач без імпульсної дії досліджувалось у монографії [1]. У праці [2] вивчалося питання існування та єдиності розв'язку початкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією. У даній статті, використовуючи методику доведень [1] і результати [2], розглянуто багатоточкову задачу з параметрами для багаточастотних систем із фіксованими моментами імпульсної дії. При дослідженні використовуються оцінки відхилення розв'язку імпульсної початкової задачі від розв'язку відповідної усередненої за кутовими змінними задачі [3,4] та оцінки частинних похідних за початковими даними цього відхилення [4].

Нехай задана нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь із імпульсною дією й параметрами

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, \varphi, \xi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, \varphi, \xi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon p_j(x, \varphi, \xi), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon q_j(x, \varphi, \xi), \tag{1}$$

в якій $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{D}, \varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m) \in R^m, Q \ni (\xi_1, ..., \xi_s) = \xi$– невідомий параметр, $\tau = \varepsilon t \in I = [0, L]$,$(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ - малий параметр, $\mathbb{D}, Q$ - обмежені відкриті області, $0 < \tau_1 \leq \theta_0\varepsilon$, θ_0 – стала, незалежна від ε, $\tau_{j+1} > \tau_j$ для всіх $j \in N$. Зміст всіх інших позначень такий же, як і в [2].

Задамо для системи (1) багатоточкові умови вигляду

$$f(x|_{\tau=\tau^1}, x|_{\tau=\tau^2}, ..., x|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi) = 0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda} B_\nu(x|_{\tau=\tau^1}, x|_{\tau=\tau^2}, ..., x|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi)\, \varphi|_{\tau=\tau^\nu} =$$

$$= g(x|_{\tau=\tau^1}, x|_{\tau=\tau^2}, ..., x|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi), \tag{2}$$

де $0 \leq \tau^1 < \tau^2 < ... < \tau^\lambda \leq L, \lambda \geq 2$; $B_\nu(z_1, z_2, ..., z_\lambda, \zeta)$– m- вимірні матриці; $f(z_1, z_2, ..., z_\lambda, \zeta)$, $g(z_1, z_2, ..., z_\lambda, \zeta)$– відомі відповідно $n+s$- і m- вимірні вектор-функції. Надалі вважатимемо, що f, g, $B_\nu, \nu = \overline{1, \lambda}$, неперервні та мають обмежені сталою c_1 неперервні частинні похідні першого порядку за всіма аргументами в $\mathbb{D}^\lambda \times Q$.

Ставиться задача знайти невідомий параметр ξ і відповідний йому розв'язок $(x; \varphi)$ багатоточкової задачі (1), (2).

Нехай рівномірно за x, φ, ξ існує границя

$$\lim_{j\to\infty} r_j(x, \varphi, \xi) = r(x, \varphi, \xi), \tag{3}$$

в якій $r_j(x, \varphi, \xi) = [p_j(x, \varphi, \xi); q_j(x, \varphi, \xi)]$.

Припустимо, що $\omega(\tau) \in C^l_{[0,L]}, l \geq m$, а функції $c(x, \varphi, \xi, \tau) = [a(x, \varphi, \xi, \tau); b(x, \varphi, \xi, \tau)]$, $r_j(x, \varphi, \xi)$, $r(x, \varphi, \xi)$ 2π-періодичні за кожною із змінних

$\varphi_\nu, \nu = \overline{1,m}$, і мають неперервні в $\mathbb{D} \times R^m \times Q \times I$ та обмежені сталою σ_1 частинні похідні за всіма змінними до другого порядку включно.

Припустимо, що існує скінченна границя

$$\theta = \lim_{j\to\infty} \bar{t}_j, \tag{4}$$

де $\bar{t}_j = t_{j+1} - t_j, t_j = \varepsilon^{-1}\tau_j$. При зроблених обмеженнях існує таке додатне число θ_1, що $\bar{t}_j \geq \theta_1$ для всіх $j \in N$.

Накладемо наступні обмеження на коефіцієнти Фур'є функцій $c(x,\varphi,\xi,\tau)$ і $r(x,\varphi,\xi)$:

$$\sum_{k\neq 0}\Big[\|k\| \sup\|c_k\| + \sup\|\frac{\partial c_k}{\partial \tau}\| + \sup\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\| +$$

$$+\sup\|\frac{\partial c_k}{\partial \xi}\| + \frac{1}{\|k\|}(\sup\|\frac{\partial^2 c_k}{\partial x \partial \tau}\| + \sup\|\frac{\partial^2 c_k}{\partial \xi \partial \tau}\| +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Big(\sup\|\frac{\partial^2 c_k}{\partial x \partial x_j}\| + \sup\|\frac{\partial^2 c_k}{\partial \xi \partial x_j}\|\Big)\Big] \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{k}\Big[\|k\|^2\Big(\sup\|\frac{\partial r_k}{\partial x}\| + \sup\|\frac{\partial r_k}{\partial \xi}\|\Big) +$$

$$+\|k\|^3 \sup\|r_k\| + \|k\| \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{n}\Big(\sup\|\frac{\partial^2 r_k}{\partial x \partial x_j} + \sup\|\frac{\partial^2 r_k}{\partial \xi \partial x_j}\|\Big)\Big] \leq \sigma_1. \tag{5}$$

Тут супремум береться за $(x,\xi,\tau) \in G = \mathbb{D} \times Q \times I$, $c_k = c_k(x,\xi,\tau)$ і $r_k = r_k(x,\xi)$ - коефіцієнти Фур'є при гармоніках $exp\{i(k,\varphi)\}$ розкладу функцій $c(x,\varphi,\xi,\tau)$ і $r(x,\varphi,\xi)$ в ряд Фур'є, $k = (k_1,...,k_m)$ - вектор із цілочисловими координатами. Під нормою матриці будемо розуміти суму модулів її елементів.

Позначимо через $W_l(\tau)$ і $W_l^*(\tau)$ відповідно $l \times m$-матрицю [1]

$$W_l(\tau) = \left(\frac{d^\lambda}{d\tau^\lambda}\omega_\nu(\tau)\right)_{\lambda,\nu=1}^{l,m}$$

і транспоновану матрицю.

У працях [3,4] обгрунтовано метод усереднення для системи (1). Застосуємо методи усереднення та стислих відображень для розв'язування багатоточкової задачі (1),(2). Для цього поставимо у відповідність вихідній задачі усереднену за всіма кутовими змінними φ багатоточкову задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x},\xi,\tau) + \frac{1}{\theta}\bar{p}(\bar{x},\xi), \tag{6}$$

$$f(\bar{x}|_{\tau=\tau^1}, \bar{x}|_{\tau=\tau^2}, ..., \bar{x}|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x},\xi,\tau) + \frac{1}{\theta}\bar{q}(\bar{x},\xi), \tag{8}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda} B_\nu(\bar{x}|_{\tau=\tau^1}, \bar{x}|_{\tau=\tau^2}, ..., \bar{x}|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi)\,\bar{\varphi}|_{\tau=\tau^\nu} =$$

$$= g(\bar{x}|_{\tau=\tau^1}, \bar{x}|_{\tau=\tau^2}, ..., \bar{x}|_{\tau=\tau^\lambda}, \xi), \tag{9}$$

де

$$[\bar{a}(x,\xi,\tau); \bar{b}(x,\xi,\tau)] = c_0(x,\xi,\tau),$$

$$[\bar{p}(x,\xi); \bar{q}(x,\xi)] = r_0(x,\xi).$$

Усереднена задача (6)-(9) значно простіша, ніж вихідна (1),(2), оскільки задача (6),(7) не залежить від швидких змінних. Крім того, усереднена задача, на відміну від вихідної, є гладкою та не підлягає імпульсній дії.

Позначимо через $(x(\tau,y,\psi,\xi,\varepsilon);$ $\varphi(\tau,y,\psi,\xi,\varepsilon))$, $(\bar{x}(\tau,y,\xi);$ $\bar{\varphi}(\tau,y,\psi,\xi,\varepsilon))$ розв'язки відповідно систем (1) і (6),(8), які в початковий момент часу $\tau = 0$ набувають значення $(y;\psi)$.

Припустимо, що:

а) усереднена багатоточкова задача з параметрами (6),(7) має єдиний розв'язок $\xi = \xi^0 \in Q, \bar{x} = \bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)$, причому крива $\bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)$ лежить у $\mathbb{D}$ для всіх $\tau \in [0,L]$;

б) $n+s$ – вимірна квадратна матриця

$$A(x^0,\xi^0) = \Big(\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\partial f(z^0)}{\partial z_\nu}\frac{\partial \bar{x}(\tau^\nu,x^0,\xi^0)}{\partial x^0};$$

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\partial f(z^0)}{\partial z_\nu}\frac{\partial \bar{x}(\tau^\nu,x^0,\xi^0)}{\partial \xi^0} + \frac{\partial f(z^0)}{\partial \xi^0}\Big),$$

де $z^0 \equiv (\bar{x}(\tau^1,x^0,\xi^0),...,\bar{x}(\tau^\nu,x^0,\xi^0),\xi^0)$, невироджена;

в) m – вимірна квадратна матриця $B = \sum_{\nu=1}^{\lambda} B_\nu^0 \equiv \sum_{\nu=1}^{\lambda} B_\nu(z^0)$ невироджена.

Лема 1. *Якщо виконуються припущення а) і в), то існує єдиний розв'язок* $\bar\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\xi^0,\varepsilon)$ *задачі (8),(9).*

Доведення. Розв'язок задачі (8),(9) визначається формулою

$$\bar\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\xi^0,\varepsilon)=\varphi^0+\int\limits_0^\tau[\frac{\omega(t)}{\varepsilon}+\bar b(\bar x(t,x^0,\xi^0),$$

$$\xi^0,t)]dt+\frac{1}{\theta}\int\limits_0^\tau \bar q(\bar x(t,x^0,\xi^0),\xi^0)dt,$$

а невідомий параметр φ_0 знаходимо із крайових умов:

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda}B_\nu^0\,\bar\varphi(\tau^\nu,x^0,\varphi^0,\xi^0,\varepsilon)=$$

$$=g\left(\bar x(\tau^1,x^0,\xi^0),...,\bar x(\tau^\nu,x^0,\xi^0),\xi^0\right), \quad (10)$$

або

$$\varphi^0=B^{-1}\Bigg[g\left(\bar x(\tau^1,x^0,\xi^0),...,\bar x(\tau^\nu,x^0,\xi^0),\xi^0\right)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\lambda}\Bigg(\frac{B_\nu^0}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau^\nu}[\omega(t)+\varepsilon\bar b(\bar x(t,x^0,\xi^0),\xi^0,t)]dt+$$

$$+\frac{B_\nu^0}{\theta}\int\limits_0^{\tau^\nu}\bar q(\bar x(t,x^0,\xi^0),\xi^0)dt\Bigg)\Bigg]. \quad (11)$$

Лему доведено.

Нехай $\mathbb{D}\supset\mathbb{D}_1$– деяка куля в R^n.

Лема 2. *Нехай:*

1) $det(W_l^*(\tau)W_l(\tau))>0, \quad \tau\in[0,L]$;

2) виконуються умови (3), (4), (5);

3) крива $\bar x=\bar x(\tau,y,\zeta)$ *лежить у* $\mathbb{D}$ *разом із своїм* ρ*-околом для всіх* $\tau\in I, y\in\mathbb{D}_1,\zeta\in Q$.

Тоді для довільного $\mu>0$ *можна вказати таке досить мале* $\varepsilon_0(\mu)>0$*, що для всіх* $\tau\in[0,L], y\in\mathbb{D}_1,\psi\in R^m,\zeta\in Q$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *справджується оцінка*

$$\|U\|+\left\|\frac{\partial U}{\partial y}\right\|+\left\|\frac{\partial U}{\partial \psi}\right\|+\left\|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right\|\le\mu, \quad (12)$$

де $U=U(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)=(x(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)-\bar x(\tau,y,\zeta);\varphi(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)-\bar\varphi(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon))$.

Доведення. У дисертації [5] доведено існування частинних похідних за початковими даними і параметрами відхилення U розв'язків вихідної й усередненої систем. Із [3,4] випливає, що для довільного $\mu>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\mu)>0$, що для всіх $\tau\in[0,L], y\in\mathbb{D}_1,\psi\in R^m,\zeta\in Q$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$\|U\|+\left\|\frac{\partial U}{\partial y}\right\|+\left\|\frac{\partial U}{\partial \psi}\right\|\le\mu/2. \quad (13)$$

Для доведення леми залишилось встановити нерівність $\|\frac{\partial U}{\partial\zeta}\|\le\mu/2$.

Із усереднених рівнянь (6)-(9) одержимо оцінки

$$\left\|\frac{\partial\bar x(\tau,y,\zeta)}{\partial\zeta}\right\|\le\sigma_1(1+\frac{1}{\theta})Le^{\sigma_1(1+\frac{1}{\theta})L}\equiv\sigma_2e^{\sigma_2},$$

$$\left\|\frac{\partial\bar\varphi(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)}{\partial\zeta}\right\|\le\sigma_2^2e^{\sigma_2},$$

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\bar x(\tau,y,\zeta)}{\partial\zeta}\right\|\le(1+\sigma_2e^{\sigma_2})\sigma_1(1+\frac{1}{\theta}),$$

$$\left\|\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\bar\varphi(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)}{\partial\zeta}\right\|\le\sigma_1(1+\frac{1}{\theta})\sigma_2^2e^{\sigma_2}. \quad (14)$$

З систем (1) і (6),(8) матимемо

$$U(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)=\int\limits_0^\tau(c(x(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon),$$

$$\varphi(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon),\zeta,t)-\bar c(\bar x(t,y,\zeta),\zeta,t))dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{0<\tau_j<\tau}r_j(x(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon),\varphi(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon),\zeta)-$$

$$-\frac{1}{\theta}\int\limits_0^\tau\bar r(\bar x(t,y,\zeta),\zeta))dt. \quad (15)$$

Тут $\bar c(\bar x,\xi,\tau)=c_0(\bar x,\xi,\tau)$, $\bar r(\bar x,\xi)=r_0(\bar x,\xi)$

З нерівностей (3), (4) випливає, що для довільного $\eta>0$ існує таке $j_0(\eta)$, що справджуються умови

$$|\frac{\bar t_j}{\theta}-1|<\eta,\ \|\frac{\partial}{\partial\zeta}r_j(x,\varphi,\zeta)-\frac{\partial}{\partial\zeta}r(x,\varphi,\zeta))\|<\eta,$$

$$\|\frac{\partial}{\partial x}r_j(x,\varphi,\zeta)-\frac{\partial}{\partial x}r(x,\varphi,\zeta))\|<\eta,$$

$$\|\frac{\partial}{\partial\varphi}r_j(x,\varphi,\zeta)-\frac{\partial}{\partial\varphi}r(x,\varphi,\zeta))\|<\eta \qquad (16)$$

для всіх $(x,\varphi,\zeta)\in\mathbb{D}\times R^m\times Q$ і $j>j_0(\eta)$.

Диференціюючи (15) за ζ, на підставі оцінок осциляційних інтегралів і сум для розривних функцій [4, 6] та нерівностей (14) і (16) знаходимо, що

$$\|\frac{\partial U}{\partial\zeta}\|\le\sigma_1\int\limits_0^\tau\|\frac{\partial}{\partial\zeta}U(t,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\|dt+$$

$$+\varepsilon(\sigma_3+\eta)\sum_{0<\tau_j<\tau}\|\frac{\partial}{\partial\zeta}U(\tau_j,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\|+$$

$$+(\varepsilon^{\frac{1}{l+1}}+\eta+j_0\varepsilon)\sigma_4$$

з деякими сталими σ_3,σ_4.

Розв'язавши цю нерівність, при досить малому $\varepsilon_0>0$ отримаємо оцінку

$$\|\frac{\partial U}{\partial\zeta}\|\le\sigma_4e^{L(\sigma_1+\frac{\sigma_3+\eta}{\theta_1})}(\varepsilon_0^{\frac{1}{l+1}}+\eta+j_0\varepsilon_0)\le\mu/2,$$

$$(\tau,y,\psi,\zeta,\varepsilon)\in I\times\mathbb{D}_1\times R^m\times Q\times(0,\varepsilon_0].$$

Лему доведено.

Теорема. *Якщо виконуються припущення 1) леми 2 та умови (3)-(5) і а)-в), то:*

1) для довільного $\eta>0$ можна вказати такі сталу $\varepsilon_0(\eta)>0$ і функцію $\psi:(0,\varepsilon_0]\to R^m$, що при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ існує такий розв'язок ξ, $(x;\varphi)$ багатоточкової задачі (1),(2), який задовольняє оцінку

$$\|x-\bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)\|+\|\xi-\xi^0\|+$$

$$+\|\varphi-\bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\xi^0,\varepsilon)-\psi(\varepsilon)\|\le\eta \qquad (17)$$

для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$;

2) у випадку $B_\nu=\mathrm{const}$, $\nu=\overline{1,\lambda}$, для довільного $\eta>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0(\eta)>0$, що при кожному $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0(\eta)]$ в малому околі розв'язку усередненої задачі існує єдиний розв'язок $\xi,(x;\varphi)$ багатоточкової задачі (1),(2) і цей розв'язок задовольняє оцінку (17) з $\psi(\varepsilon)\equiv0$.

Доведення. Розв'язок вихідної задачі (1),(2) будуємо у вигляді $x=x(\tau,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon),\varphi=\varphi(\tau,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon)$, $\xi=\xi^0+\tilde{\xi}$, а невідомі параметри $\tilde{x},\tilde{\varphi},\tilde{\xi}$ визначимо із крайових умов.

Встановимо спочатку обмеження для $\tilde{x},\tilde{\xi}$, щоб крива $\bar{x}=\bar{x}(\tau,x^0+\tilde{x},\xi^0+\tilde{\xi})$ належала $\mathbb{D}$ разом із своїм $\frac{1}{2}\rho$-околом при $\tau\in[0,L]$. Враховуючи умови (5), з усереднених рівнянь для повільних змінних одержимо

$$\|\bar{x}(\tau,x^0+\tilde{x},\xi^0+\tilde{\xi})-\bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)\|\le$$

$$\le\|\tilde{x}\|+\sigma_1(1+\theta^{-1})\times\int\limits_0^\tau\Big(\|\bar{x}(t,x^0+\tilde{x},\xi^0+\tilde{\xi})-$$

$$-\bar{x}(t,x^0,\xi^0)\|+\|\tilde{\xi}\|\Big)dt\le$$

$$\le(\|\tilde{x}\|+\|\tilde{\xi}\|)\left(1+\sigma_1L(1+\theta^{-1})\right)e^{L\sigma_1(1+\theta^{-1})}.$$

Звідси випливає, що при $\|\tilde{x}\|+\|\tilde{\xi}\|\le\frac{1}{2}\rho e^{-L\sigma_1(1+\theta^{-1})}/\left(1+\sigma_1L(1+\theta^{-1})\right)\equiv c_3$ крива $\bar{x}=\bar{x}(\tau,x^0+\tilde{x},\xi^0+\tilde{\xi})$ лежить у $\mathbb{D}$ разом із своїм $\frac{1}{2}\rho$-околом для всіх $\tau\in[0,L]$.

Згідно із зробленими припущеннями, маємо рівності

$$\bar{x}(\tau,x^0+\tilde{x},\xi^0+\tilde{\xi})=\bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)+$$

$$+\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)}{\partial x^0}\tilde{x}+\frac{\partial\bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)}{\partial\xi^0}\tilde{\xi}+R_1(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi}),$$

$$\bar{x}(\tau,x^0+\tilde{x},\xi^0+\tilde{\xi})=\bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)+R_2(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi}),$$

в яких

$$\|R_1(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi})\|\le c_4(\|\tilde{x}\|+\|\tilde{\xi}\|)^2,$$

$$\|R_2(\tau,\tilde{x},\tilde{\xi})\|\le\bar{c}_4(\|\tilde{x}\|+\|\tilde{\xi}\|),\quad\tau\in[0,L], \qquad (18)$$

$c_4,\bar{c}_4-$ деякі сталі.

Щоб знайти невідомі $\tilde{x},\tilde{\varphi},\tilde{\xi}$, задовольнимо багатоточкові умови:

$$(f-f^*)+f^*=0,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda}B_\nu\Big(x(\tau^1,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon),...,$$

$$x(\tau^\nu,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon),\xi^0+\tilde{\xi}\Big)\times$$

$$\times\varphi(\tau^\nu,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon)=$$

$$= g\Big(x(\tau^1, x^0+\tilde{x}, \varphi^0+\tilde{\varphi}, \xi^0+\tilde{\xi}, \varepsilon), ...,$$

$$x(\tau^\nu, x^0+\tilde{x}, \varphi^0+\tilde{\varphi}, \xi^0+\tilde{\xi}, \varepsilon), \xi^0+\tilde{\xi}\Big), \quad (19)$$

де

$$f = f\Big(\bar{x}(\tau^1, x^0+\tilde{x}, \xi^0+\tilde{\xi})+$$
$$+\Delta x(\tau^1, x^0+\tilde{x}, \varphi^0+\tilde{\varphi}, \xi^0+\tilde{\xi}), ...,$$
$$\bar{x}(\tau^\lambda, x^0+\tilde{x}, \xi^0+\tilde{\xi})+$$
$$+\Delta x(\tau^\lambda, x^0+\tilde{x}, \varphi^0+\tilde{\varphi}, \xi^0+\tilde{\xi}), \xi^0+\tilde{\xi}\Big),$$

$$f^* = f\Big(\bar{x}(\tau^1, x^0, \xi^0) + \frac{\partial\bar{x}(\tau^1, x^0, \xi^0)}{\partial x^0}\tilde{x}+$$
$$+\frac{\partial\bar{x}(\tau^1, x^0, \xi^0)}{\partial \xi^0}\tilde{\xi}, ..., \bar{x}(\tau^\lambda, x^0, \xi^0)+$$
$$+\frac{\partial\bar{x}(\tau^\lambda, x^0, \xi^0)}{\partial x^0}\tilde{x} + \frac{\partial\bar{x}(\tau^\lambda, x^0, \xi^0)}{\partial \xi^0}\tilde{\xi}, \xi^0+\tilde{\xi}\Big),$$
$$\Delta x(\tau, y, \psi, \zeta, \varepsilon) = x(\tau, y, \psi, \zeta, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, y, \zeta).$$

З нерівностей (12),(18) випливає оцінка

$$\|f - f^*\| \le \lambda(c_4 c_1(\|\tilde{x}\| + \|\tilde{\xi}\|)^2 + \mu). \quad (20)$$

Запровадимо позначення

$$\tilde{d} = (\tilde{x}, \tilde{\xi}), \quad d^0 = (x^0, \xi^0), \quad d = (x, \xi)$$

і розкладемо функцію f^* в ряд Тейлора в околі точки $z^0 \equiv (\bar{x}(\tau^1, d^0), \bar{x}(\tau^2, d^0), ..., \bar{x}(\tau^\nu, d^0), \xi^0)$. Враховуючи позначення з припущення б), перепишемо першу рівність із (19) у вигляді:

$$(f - f^*) + A(d^0)\tilde{d} + \tilde{R} = 0, \quad (21)$$

де

$$\tilde{R} = \int_0^1 \left[\frac{\partial f(z^0+th)}{\partial z} - \frac{\partial f(z^0)}{\partial z}\right] dth,$$

$$h = \left(\frac{\partial\bar{x}(\tau^1, d^0)}{\partial d^0}\tilde{d}, ..., \frac{\partial\bar{x}(\tau^\lambda, d^0)}{\partial d^0}\tilde{d}, \tilde{\xi}\right).$$

Для оцінки норми $\tilde{R}$ використаємо першу з нерівностей (14) і оцінку

$$\left\|\frac{\partial\bar{x}(\tau, y, \zeta)}{\partial y}\right\| \le n e^{\sigma_2}. \quad (22)$$

Оскільки $\frac{\partial f}{\partial z_\nu}$, $\nu = \overline{1, \lambda}$, – неперервні в точці z_0, то для довільного $\mu_1 \in (0,1)$ існує таке досить мале $\delta(\mu_1) > 0$, що для всіх $\|h\| < \delta, t \in [0,1]$ виконується нерівність

$$\left\|\frac{\partial f(z^0+th)}{\partial z} - \frac{\partial f(z^0)}{\partial z}\right\| < \mu_1,$$

яка разом із (22) веде до оцінки

$$\|\tilde{R}\| < \mu_1\|h\| \le \mu_1\left(\lambda e^{\sigma_2}(n+\sigma_2)+1\right)\|\tilde{d}\|. \quad (23)$$

Перепишемо рівняння (21) у вигляді

$$\tilde{d} = F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon), \quad (24)$$

де

$$F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon) \equiv A^{-1}(d^0)\left(f^* - f - \tilde{R}\right). \quad (25)$$

З припущень б),в) і неперервності B_ν, $\frac{\partial f}{\partial z_\nu}$, $\nu = \overline{1, \lambda}$, випливає існування такої сталої c_2, що виконуються нерівності

$$\|A^{-1}(d^0)\| \le c_2, \quad \|B^{-1}\| \le c_2,$$
$$\|B_\nu(z_1, ..., z_\lambda, \zeta)\| \le c_2,$$
$$(z_1, ..., z_\lambda, \xi) \in \mathbb{D}^\lambda \times Q, \quad \nu = \overline{1, \lambda}.$$

Тоді на підставі умов (14), (20), (22), (23) та рівняння (25) дістанемо нерівності

$$\|F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon)\| \le c_2\Big(c_1 c_4 \lambda\|\tilde{d}\|^2 + \lambda\mu+$$
$$+\mu_1(\lambda e^{\sigma_2}(n+\sigma_2)+1)\|\tilde{d}\|\Big),$$
$$\left\|\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}F(\tilde{d}, \tilde{\varphi}, \varepsilon)\right\| \le \lambda c_1 \mu. \quad (26)$$

З першої з нерівностей (26) випливає, що F відображає множину $M_\mu = \{\tilde{d} : \tilde{d} \in R^{n+s}, \|\tilde{d}\| \le c_5\mu\}$ в себе при

$$\mu_1 \le \frac{1}{3c_2\left(\lambda e^{\sigma_2}(n+\sigma_2)+1\right)},$$

$$\mu \le \min\left\{\frac{1}{3\lambda c_1 c_2 c_4 c_5}, \frac{c_3}{c_5}\right\}, \quad c_5 = 3c_2\lambda.$$

Для встановлення оцінки норми $\frac{\partial}{\partial \tilde d}F(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon)$ перепишемо (25) у вигляді

$$F(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon) = -A^{-1}(d^0)\left(f - A(d^0)\tilde d\right).$$

Тоді

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde d} = -A^{-1}(d^0)\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde x};\frac{\partial f}{\partial \tilde\xi}\right) - A(d^0)\right\} =$$

$$= -A^{-1}(d^0)\Bigg(\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\frac{\partial(x_\nu-\bar x_\nu)}{\partial x^0}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\frac{\partial(\bar x_\nu-\bar x_\nu^0)}{\partial x^0}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\lambda}\left[\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\frac{\partial \bar x_\nu^0}{\partial x^0}-\frac{\partial f(z^0)}{\partial z_\nu}\frac{\partial \bar x_\nu^0}{\partial x^0}\right];$$

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\frac{\partial(x-\bar x)}{\partial \xi^0}+\sum_{\nu=1}^{\lambda}\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\frac{\partial(\bar x-\bar x^0)}{\partial \xi^0}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\lambda}\left[\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\frac{\partial \bar x_\nu^0}{\partial \xi^0}-\frac{\partial f(z^0)}{\partial z_\nu}\frac{\partial \bar x_\nu^0}{\partial \xi^0}\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial f}{\partial \xi^0}-\frac{\partial f(z^0)}{\partial \xi^0}\right]\Bigg),$$

де

$$x_\nu = x(\tau^\nu, x^0+\tilde x, \varphi^0+\tilde\varphi, \xi^0+\tilde\xi, \varepsilon),$$

$$\bar x_\nu = \bar x(\tau^\nu, x^0+\tilde x, \xi^0+\tilde\xi), \quad \bar x_\nu^0 = \bar x(\tau^\nu, x^0, \xi^0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \frac{\partial f(z^0+\tilde h)}{\partial z_\nu},\ \ \frac{\partial f}{\partial \xi^0} = \frac{\partial f(z^0+\tilde h)}{\partial \xi^0},$$

$$\tilde h = \left((x_1-\bar x_1)+\bar x_1-\bar x_1^0, ..., (x_\lambda-\bar x_\lambda)+\bar x_\lambda-\bar x_\lambda^0, \tilde\xi\right),$$

$$\|\tilde h\| \le \lambda(\mu+\bar c_4\|\tilde d\|)+\|\tilde\xi\|.$$

На підставі неперервності $\frac{\partial f}{\partial z_\nu}$, $\nu=\overline{1,\lambda}$, в точці z^0 для довільного $\delta_1\in(0,1)$ існує таке досить мале $\delta_2(\delta_1)>0$, що для всіх $\tilde d,\mu$ таких, що $\lambda(\mu+\bar c_4\|\tilde d\|)+\|\tilde d\|<\delta_2$ справджуються оцінки

$$\left\|\frac{\partial f(z^0+\tilde h)}{\partial \xi^0}-\frac{\partial f(z^0)}{\partial \xi^0}\right\| < \delta_1,$$

$$\left\|\frac{\partial f(z^0+\tilde h)}{\partial z_\nu}-\frac{\partial f(z^0)}{\partial z_\nu}\right\| < \delta_1, \quad \nu=\overline{1,\lambda}.$$

Крім того,

$$\frac{\partial \bar x(\tau, d^0+\tilde d)}{\partial \tilde d} = \frac{\partial \bar x(\tau, d^0)}{\partial d^0}+\bar R(\tau,\tilde d),$$

де

$$\|\bar R(\tau,\tilde d)\| \le c_6\|\tilde d\|, \quad \tau\in[0,L], \quad c_6=\mathrm{const},$$

тому, враховуючи нерівності (12), (14), (18), одержимо

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \tilde d}F(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon)\right\| \le$$

$$\le c_2\left(2\lambda c_1(\mu+c_6\|\tilde d\|)+\lambda\delta_1 e^{\sigma_2}(n+\sigma_2)+\delta_1\right).$$

Оскільки $\tilde d\in M_\mu$, то виконуються оцінки

$$\|\tilde d\| \le c_5\mu,$$

$$\mu \le \min\left\{\frac{\delta_2}{\lambda+\lambda\bar c_4 c_5+c_5}, \frac{1}{3\lambda c_1c_2c_4c_5}, \frac{c_3}{c_5}\right\}. \tag{27}$$

У звязку з цим

$$\left\|\frac{\partial}{\partial \tilde d}F(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon)\right\| \le c_7\delta_1+c_8\delta_2(\delta_1) \le \frac{1}{2} \tag{28}$$

при

$$c_7 = c_2(\lambda e^{\sigma_2}(n+\sigma_2)+1),\ \delta_1\le\frac{1}{4c_7},\ \delta_2\le\frac{1}{4c_8},$$

$$c_8 = 2\lambda c_1c_2(1+c_5c_6)(\lambda+\lambda\bar c_4c_5+c_5)^{-1}.$$

Отже, на підставі теореми про нерухому точку для кожних фіксованих $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\tilde\varphi\in R^m$ рівняння (24) має єдиний розв'язок $\tilde d = \tilde d(\tilde\varphi,\varepsilon)\in M_\mu$.

Розв'язок рівняння (24) можна визначити методом послідовних наближень:

$$\tilde d(\tilde\varphi,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} y_k(\tilde\varphi,\varepsilon), \quad y_0(\tilde\varphi,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$y_k(\tilde\varphi,\varepsilon) = F(y_{k-1}(\tilde\varphi,\varepsilon),\tilde\varphi,\varepsilon), \quad k\ge 1.$$

Використовуючи оцінки (26), (28), оцінимо частинну похідну k-ого наближення розв'язку:

$$\frac{\partial y_k(\tilde\varphi,\varepsilon)}{\partial\tilde\varphi} = \frac{\partial F}{\partial y_{k-1}}\frac{\partial y_{k-1}}{\partial\tilde\varphi}+\frac{\partial F}{\partial\tilde\varphi},$$

$$\left\|\frac{\partial y_k(\tilde\varphi,\varepsilon)}{\partial\tilde\varphi}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial y_{k-1}(\tilde\varphi,\varepsilon)}{\partial\tilde\varphi}\right\| + c_1\lambda\mu.$$

Звідси знаходимо, що для всіх $k \ge 0, \tilde\varphi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\left\|\frac{\partial y_k(\tilde\varphi,\varepsilon)}{\partial\tilde\varphi}\right\| \le c_9\mu, \quad c_9 = 2c_1\lambda,$$

при виконанні умови (27).

Остання оцінка забезпечує виконання умови Ліпшиця

$$\|\tilde d(\tilde\varphi^1,\varepsilon) - \tilde d(\tilde\varphi^2,\varepsilon)\| \le c_9\mu\|\tilde\varphi^1 - \tilde\varphi^2\| \tag{29}$$

для граничної функції $\tilde d(\tilde\varphi,\varepsilon)$.

Запровадимо позначення

$$x = x(\tau,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon),\ \Delta x_\nu = x_\nu - \bar x_\nu,$$

$$\bar x = \bar x(\tau,x^0+\tilde x,\xi^0+\tilde\xi), \quad \bar x^0 = \bar x(\tau,x^0,\xi^0),$$

$$\varphi_\nu = \varphi(\tau^\nu,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon),$$

$$\bar\varphi_\nu = \bar\varphi(\tau^\nu,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon),$$

$$\bar\varphi^0 = \bar\varphi(\tau,x^0,\varphi^0,\xi^0,\varepsilon), \quad \Delta\varphi_\nu = \varphi_\nu - \bar\varphi_\nu,$$

$$\varphi = \varphi(\tau,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon),$$

$$\bar\varphi = \bar\varphi(\tau,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon), \quad \xi = \xi^0+\tilde\xi.$$

З системи (1) маємо

$$\varphi = \varphi^0 + \tilde\varphi + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau [\omega(t) + \varepsilon b(x,\varphi,\xi)]dt +$$
$$+\varepsilon\sum_{0<\tau_j<\tau} q_j(x(\tau_j,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi,\varepsilon),$$
$$\varphi(\tau_j,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi,\varepsilon),\xi).$$

Розглянемо тепер випадок, коли матриці $B_\nu(z_1,...,z_\lambda,\xi) \equiv B_\nu-$ сталі, $\nu = \overline{1,\lambda}$. Тоді з (19) і останньої рівності одержуємо

$$\varphi^0 + \tilde\varphi = B^{-1}\Bigg(g(x_1,...,x_\lambda,\xi) -$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\lambda}\Bigg(\frac{B_\nu}{\varepsilon}\int_0^{\tau^\nu}[\omega(t)+\varepsilon b(x,\varphi,\xi)]dt +$$
$$+B_\nu\varepsilon\sum_{0<\tau_j<\tau^\nu} q_j(x(\tau_j,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon),$$
$$\varphi(\tau_j,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon),\xi^0+\tilde\xi)\Bigg)\Bigg).$$

Враховуючи (11), дістанемо, що

$$\tilde\varphi = \Phi(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon), \tag{30}$$

$$\Phi(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon) \equiv B^{-1}\Bigg(g(x_1,...,x_\lambda,\xi) - g(\bar x_1^0,...,\bar x_\lambda^0,$$
$$\xi^0) - \sum_{\nu=1}^{\lambda}\Bigg(B_\nu\int_0^{\tau_\nu}[\bar b(\bar x,\xi,t) - \bar b(\bar x^0,\xi^0,t)]dt +$$
$$+\frac{B_\nu}{\theta}\int_0^{\tau^\nu}[\bar q(\bar x,\xi) - \bar q(\bar x^0,\xi^0)]dt - B_\nu\Delta\varphi_\nu)\Bigg)\Bigg).$$

Для оцінки норми $\Phi(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon)$ використаємо оцінки (12), (14), (22) і запишемо нерівність

$$\|x - \bar x^0\| \le \|\Delta x(t,x^0+\tilde x,\varphi^0+\tilde\varphi,\xi^0+\tilde\xi,\varepsilon)\| +$$
$$+\|\bar x - \bar x^0\| \le \mu + \|\tilde d\|(n+\sigma_2)e^{\sigma_2}.$$

Звідси, враховуючи припущення для функції g, одержимо

$$\|\Phi(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon)\| \le$$
$$\le \Bigg[c_1\left(\lambda\mu + \lambda\|\tilde d\|(n+\sigma_2)e^{\sigma_2} + \|\tilde d\|\right) +$$
$$+L\|B\|\left(\sup\|\frac{\partial}{\partial d}\bar b(d,\tau)\| + \frac{1}{\theta}\sup\|\frac{\partial}{\partial d}\bar q(d)\|\right)\times$$
$$\times\left(\lambda\|\tilde d\|(n+\sigma_2)e^{\sigma_2} + \|\tilde d\|\right) + \|B\|\mu\Bigg]\|B^{-1}\|.$$

Отже,

$$\|\Phi(\tilde d,\tilde\varphi,\varepsilon)\| \le c_{10}(\|\tilde d\| + \mu), \tag{31}$$

де

$$c_{10} = \Big[(c_1 + \sigma_1\|B\|L(1+1/\theta))\times$$
$$\times(\lambda(n+\sigma_2)e^{\sigma_2} + 1) + \|B\|\Big]\|B^{-1}\|.$$

З останньої нерівності випливає, що Φ відображає множину $T_\mu = \{\tilde\varphi : \tilde\varphi \in R^m,\ \|\tilde\varphi\| \le c_{11}\mu\}$ в себе при $c_{11} = c_{10}(c_5+1)$.

Припустимо, що $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2$– довільні точки множини T_μ. Використовуючи умову Ліпшиця (29), одержимо нерівності

$$\|\Phi(\tilde{d}(\tilde{\varphi}^1,\varepsilon),\tilde{\varphi}^1,\varepsilon)-\Phi(\tilde{d}(\tilde{\varphi}^2,\varepsilon),\tilde{\varphi}^2,\varepsilon)\| \le$$

$$\le \sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{d}}\right\| \|\tilde{d}(\tilde{\varphi}^1,\varepsilon)-\tilde{d}(\tilde{\varphi}^2,\varepsilon)\| +$$

$$+\sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\varphi}}\right\| \|\tilde{\varphi}^1-\tilde{\varphi}^2\| \le$$

$$\le \left(c_9\mu\sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{d}}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\varphi}}\right\|\right)\left(\|\tilde{\varphi}^1-\tilde{\varphi}^2\|\right).$$

Оскільки

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\varphi}}\right\| \le \sum_{\nu=1}^{\lambda}\left(c_1\left\|\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}\Delta x_\nu\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial\tilde{\varphi}}\left(B_\nu\Delta\varphi_\nu\right)\right\|\right)\times$$

$$\times\|B^{-1}\| \le c_{12}\mu,$$

$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{d}}\right\| \le \sum_{\nu=1}^{\lambda}\left[c_1\left(\left\|\frac{\partial}{\partial\tilde{d}}\Delta x_\nu\right\| + \left\|\frac{\partial\bar{x}_\nu}{\partial d^0}\right\|\right) +\right.$$

$$\left.+\|B_\nu\|L(1+1/\theta)\sigma_1\left\|\frac{\partial\bar{x}_\nu}{\partial d^0}\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial\tilde{d}}\left(B_\nu\Delta\varphi_\nu\right)\right\|\right]\times$$

$$\times\|B^{-1}\| \le \bar{c}_{12}\mu + c_{13},$$

де

$$c_{12} = (c_1\lambda + \|B\|)\,\|B^{-1}\|,\ \bar{c}_{12} = c_{12} + (c_1\lambda c_6 c_5 +$$

$$+\|B\|L(1+1/\theta)c_5c_6\sigma_1)\|B^{-1}\|, \quad c_{13} = [c_1\lambda +$$

$$+\|B\|L(1+1/\theta)\sigma_1)(n+\sigma_2)e^{\sigma_2}]\|B^{-1}\|,$$

то відображення $\Phi : T_\mu \to T_\mu$ є стиснутим для всіх фіксованих $\|\tilde{d}\| \le c_5\mu$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де ε_0 вибирається так, щоб виконувались умова (27) і

$$\mu < \frac{1}{2(c_9\bar{c}_{12} + c_9c_{13} + c_{12})}. \tag{32}$$

Тому при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ система (24),(30) має єдиний розв'язок $(\tilde{d};\tilde{\varphi})$, який задовольняє умови

$$\|\tilde{d}\| \le c_5\mu, \quad \|\tilde{\varphi}\| \le c_{11}\mu.$$

Для доведення єдиності розв'язку крайової задачі (1),(2) розглянемо оператор A_j, який переводить точку $(x,\varphi) \in \mathbb{D}\times R^m$ в іншу точку з $\mathbb{D}\times R^m$ в момент часу τ_j при кожному фіксованому $\xi \in Q$:

$$A_j : (x,\varphi) \to A_j(x,\varphi) = (x,\varphi) + \varepsilon r_j(x,\varphi,\xi). \tag{33}$$

З теореми 2.2 праці [2] випливає, що для єдиності розв'язку початкової задачі для системи (1) досить, щоб відображення (31) було взаємно однозначним. Оскільки, згідно із зробленими припущеннями, функції $r_j(x,\varphi,\xi)$ мають обмежені сталою σ_1 частинні похідні першого порядку за x,φ, то при досить малому ε_0 відображення (31) взаємно однозначне для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Тому розв'язок початкової задачі для системи (1) буде єдиним.

Ми довели, що система (24), (30) має єдиний розв'язок $(\tilde{d};\tilde{\varphi}) \equiv (\tilde{x};\tilde{\xi};\tilde{\varphi})$, тому розв'язок багатоточкової задачі (1),(2) також буде єдиним, причому початкові дані цього розв'язку й параметр лежать у $c_{14}\mu$–околі початкових даних x^0, φ^0 розв'язку й параметру ξ^0 усередненої багатоточкової задачі (6)-(9). Тут $c_{14} \le \max\{c_5, c_{11}\}$.

З нерівностей (12), (14), (22) отримаємо

$$\|x(\tau,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon) - \bar{x}(\tau,x^0,\xi^0)\| +$$

$$+\|\varphi(\tau,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon) -$$

$$-\bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\xi^0,\varepsilon)\| +$$

$$+\|\xi-\xi^0\| \le \|x-\bar{x}\| + \|\varphi-\bar{\varphi}\| +$$

$$+\|\bar{x}-\bar{x}^0\| + \|\bar{\varphi}-\bar{\varphi}^0\| + \|\xi-\xi^0\| \le c_{15}\mu,$$

$$(\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times(0,\varepsilon_0],$$

де $c_{15} = c_{11} + (1 + c_5(n+\sigma_2)e^{\sigma_2})(2 + L\sigma_1(1+\theta^{-1}))$. З останньої нерівності отримаємо оцінку (17) з $\psi(\varepsilon) \equiv 0$, $\eta = c_{15}\mu$.

Малість ε_0 визначається умовами (27), (32) і нерівністю $\mu < \rho/c_{15}$, яка забезпечує належність $x(\tau,x^0+\tilde{x},\varphi^0+\tilde{\varphi},\xi^0+\tilde{\xi},\varepsilon)$ області $\mathbb{D}$ для всіх $(\tau,\varepsilon) \in [0,L]\times(0,\varepsilon_0]$. Твердження 2) теореми доведено.

Для доведення першого твердження теореми позначимо

$$B_\nu = B_\nu(x_1,x_2,...,x_\lambda,\xi)$$

і, враховуючи багатоточкові умови (2), (9), перепишемо праву частину рівняння (30) у вигляді

$$\Phi(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon)\equiv B^{-1}\bigg(g(x_1,...,x_\lambda,\xi)-$$

$$-g(\bar{x}_1^0,...,\bar{x}_\lambda^0,\xi^0)+\sum_{\nu=1}^{\lambda}B_\nu^0\bar{\varphi}_\nu^0-\sum_{\nu=1}^{\lambda}B_\nu\varphi_\nu+B\tilde{\varphi}\bigg).$$

Оскільки

$$\sum_{\nu=1}^{\lambda}B_\nu^0\bar{\varphi}_\nu^0-\sum_{\nu=1}^{\lambda}B_\nu\varphi_\nu=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\lambda}\Big[B_\nu^0(\bar{\varphi}_\nu^0-\bar{\varphi}_\nu)-B_\nu(\varphi_\nu-\bar{\varphi}_\nu)-\bar{\varphi}_\nu(B_\nu-B_\nu^0)\Big],$$

то з (12), (14), (22) і обмежень на функції g, B_ν одержуємо

$$\|\Phi(\tilde{d},\tilde{\varphi},\varepsilon)\|\le c_{16}(\mu+\|\tilde{d}\|)(1+\|\tilde{\varphi}\|+\varepsilon^{-1})$$

з деякою сталою c_{16}. Оскільки $\tilde{d}\in M_\mu$, то Φ відображає множину $\bar{T}=\{\tilde{\varphi}:\tilde{\varphi}\in R^m,\ \|\tilde{\varphi}\|\le 3c_{16}(1+c_5)\mu\varepsilon^{-1}\}$ в себе при

$$3\mu c_{16}(1+c_5)\le 1. \qquad (34)$$

Відображення $\Phi:\bar{T}\to\bar{T}$ неперервне за $\tilde{\varphi}$, тому на підставі теореми Брауера [7] про нерухому точку існує розв'язок $\tilde{\varphi}=\psi(\varepsilon)\in\bar{T}$ рівняння (30). Якщо ε_0 вибирати так, щоб виконувались умови (27), (34), то для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ існує розв'язок

$$\xi=\xi^0+\tilde{\xi}(\psi(\varepsilon),\varepsilon),$$

$$(x;\varphi)=(x(\tau,x^0+\tilde{x}(\psi(\varepsilon),\varepsilon),\varphi^0+\psi(\varepsilon),\varepsilon);$$
$$\varphi(\tau,x^0+\tilde{x}(\psi(\varepsilon),\varepsilon),\varphi^0+\psi(\varepsilon),\varepsilon))$$

багатоточкової задачі (1),(2). Оскільки для швидких змінних виконується нерівність

$$\|\varphi-\bar{\varphi}(\tau,x^0,\varphi^0,\xi^0,\varepsilon)-\psi(\varepsilon)\|\le$$

$$\le\|\varphi-\bar{\varphi}\|+\|\bar{\varphi}-\bar{\varphi}^0-\psi(\varepsilon)\|\le c_{17}\mu,$$

$$c_{17}=\mathrm{const},\quad (\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0],$$

то справджується оцінка (17). Теорему доведено.

Зауваження. У багатоточкових умовах (2) можна було б вважати, що функції f, g, B_ν, $\nu=\overline{1,\lambda}$, залежать і від ε. Твердження теореми залишаться без змін при додаткових обмеженнях:

1)

$$\|B^{-1}\|\le c_2,\quad \|A^{-1}(d^0)\|\le c_2$$

для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ із незалежною від ε сталою c_2;

2) функції f, g, $B_\nu, \nu=\overline{1,\lambda}$ та їх частинні похідні першого порядку за $z_1,z_2,...,z_\lambda,\zeta$ одностайно за $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ рівномірно неперервні за $z_1,z_2,...,z_\lambda,\zeta$ на множині $\mathbb{D}^\lambda\times Q$ і обмежені сталою c_1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340 с.

2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 288 с.

3. *Петришин Р.І., Сопронюк Т.М.* Обгрунтування методу усереднення для багаточастотних імпульсних систем // Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, N 1.— С.55—65.

4. *Сопронюк Т.М.* Коливання імпульсних багаточастотних систем.: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02.— К., 2003.— 158 с.

5. *Петришин Я.Р.* Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами.: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02.— К., 2001.— 131 с.

6. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи // Укр. мат. журн.— 2001.— **53**, N 8.— С.1101—1108.

7. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1974.— 320 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2003