УДК 519.21

©2004 р. С.Л. Роголь

Акціонерне товариство "Рінужі", Рига (Латвія)

СТІЙКІСТЬ СТОХАСТИЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА ПРИ ДИФУЗІЙНОМУ НАПЛИВІ ФАЗИ НА ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС

Одержано необхідні та достатні умови асимптотичної стохастичної стійкості стохастичного осцилятора, розглянуто особливості впливу дифузійного напливу фази на параметричний резонанс.

The necessary and sufficient conditions of asymptotic stochastic stability of stochastic oscillator are obtained in this article. The features of influence of the diffusion phase flow on parametric resonance are considered.

1. Вступ. Якісний аналіз стохастичних осциляторів проводили багато авторів [1, 3, 5, 6, 8, 9, 11—13]. Так, у праці [1] авторами за допомогою показників Ляпунова проведено якісний аналіз гармонічного осцилятора з випадковими збуреннями дифузійного типу.

Кулініч Г.Л. у праці [6] розглянув зображення на фазовій площині згасаючого гармонічного осцилятора з тертям при випадкових збуреннях уздовж вектора фазової швидкості, а також дослідив поведінку амплітуди, фази та повної енергії згасаючого осцилятора.

Моделі гармонічного осцилятора при випадкових збуреннях тільки другої компоненти вектора фазової швидкості досліджувались у працях [11—13].

У даній статті розглянуто особливості впливу дифузійного напливу фази на параметричний резонанс та досліджено стійкість з імовірністю одиниця стохастичного осцилятора.

2. Постановка задачі. Розглянемо рівняння стохастичного осцилятора у вигляді [3, 4]

$$\ddot{x} + 2\varepsilon^2\delta\dot{x} + (\omega^2 + h(\vec{\xi}(t)))x = 0, \qquad (1)$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр,

$$h(\vec{\xi}(t)) = \sum_{k=1}^{m} h_k \cos\xi_k(t), \qquad (2)$$

а марковські процеси $\xi_k(t)$ є дифузійними процесами вигляду

$$\xi_k(t) = \nu_k(t) + \sigma_k w_k(t), \quad \sigma_k > 0, \quad \nu_k > 0,$$

на відрізку $S \equiv [0, 2\pi]$ з незалежними процесами броунівського руху [9], тобто

$$d\xi_k = \nu_k dt + \sigma_k dw_k(t) \pmod{2\pi}. \qquad (3)$$

C — інфінітезимальний оператор Q марковського процесу $\vec{\xi}(t)$, заданий на двічі неперервно диференційовних 2π-періодичних функціях векторного аргументу $\vec{y} \in S^m$ рівністю [4]

$$Qv(\vec{y}) = \frac{1}{2}(\sigma^2\nabla, \nabla)v(\vec{y}) + (\vec{\nu}, \nabla)v(\vec{y}), \qquad (4)$$

де ∇ — вектор градієнта в $\mathbb{R}^m$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$, $\sigma^2 = \mathrm{diag}\{\sigma_k^2\}_{k=1}^m$, $\vec{\nu} = \mathrm{colon}\{\sigma_k\}_{k=1}^m$. При $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_m = 0$ рівняння (1) є моделлю для вивчення явища параметричного резонансу. Це явище полягає в тому, що при досить малому розкиді частот

$$\min_{1\le k\le m} |\nu_k^2 - 4\omega^2| = O(\varepsilon) \qquad (5)$$

і малому $\varepsilon > 0$ існують розв'язки (1), що експоненціально зростають при $t \to \infty$, яке б велике не було число δ. Наявність випадкових збурень $\sigma_k w_k(t)$, які називаються дифузійним напливом фази [13], приводить до відсутності вищеописаного явища резонансу навіть у випадку, коли вираз (5) дорівнює нулеві і σ_k малі, тобто якщо $\delta > 0$ досить велике [14]. Тоді всі розв'язки (1) експоненціально прямують до нуля з імовірністю одиниця при $t \to \infty$. Доведенню цього твердження й присвячена дана праця. Також тут будуть одержані необхідні й достатні умови асимптотичної стохастичної стійкості [7] осцилятора (1) у вигляді нерівності, що пов'язує параметри системи (1)—(3).

3. Основні результати. Для дослідження середньоквадратичної стійкості осцилятора (1) перепишемо його рівняння у вигляді системи в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = B\vec{x} + \varepsilon h(\vec{\xi}(t))H + 2\varepsilon^2\delta G, \qquad (6)$$

де

$$B \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ x \end{pmatrix}.$$

У відповідності до алгоритму для дослідження експоненціальної стійкості тривіального розв'язку в середньому квадратичному [14] використаємо квадратичну форму в $\mathbb{R}^2$ з матрицею

$$q^{(\varepsilon)}(\vec{y}) = \frac{1}{\varepsilon^2}q + \frac{1}{\varepsilon}q_1(\vec{y}) + q_0(\vec{y}),$$

де $\vec{y} \in S^m$ (m-вимірний тор), а симетрична матриця $q \in M_2(\mathbb{R})$ є розв'язком рівняння

$$B^T q + qB = 0.$$

З цього рівняння матрицю q можна знайти з точністю до довільної константи C у вигляді

$$q = C\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер необхідно знайти матрицю $q_1(\vec{y})$ з рівняння

$$B^T q_1(\vec{y}) + q_1(\vec{y})B + (Qq_1)(y) =$$
$$= -h(\vec{y})[H^T q + qH], \qquad (7)$$

а після цього перевірити умову нормальної розв'язності рівняння

$$B^T q_0(\vec{y}) + q_0(\vec{y})B + (Qq_0)(y) = -2\delta[G^T q +$$
$$+ qG] - h(\vec{y})[H^T q_1(y) + q_1(y)H] - I, \qquad (8)$$

де $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, оператор Q визначений формулою (4). Звідси визначається константа C, і тоді тільки при $C > 0$ тривіальний розв'язок (6) експоненціально стійкий у середньому квадратичному, оскільки тільки в цьому випадку $q \in \dot{\mathbb{K}}$ [10],

$$\dot{K} \equiv \{q \in V \mid \inf_{\substack{y\in\mathbb{Y} \\ \|x\|=1}} (q(y)x, x) > 0\},$$

де V — простір симетричних неперервних обмежених матричних функцій з нормою $\|q\| = \sup_{y\in\mathbb{Y}} |(q(y)x, x)|$ [10]. Слід також переконатися в нормальній розв'язності рівняння (7). Для цього потрібно визначити ядро $N(Q^*)$ оператора Q^*, що діє в просторі матричнозначних мір. Легко зрозуміти, що в силу умови $\sigma_1 > 0$, ..., $\sigma_m > 0$ ядро оператора Q^* складається з елементів вигляду $p \cdot \mu(d\vec{y})$, де $p = \begin{pmatrix} (2\omega^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$, а $\mu(d\vec{y})$ — інваріантна міра марковського процесу на торі S^m, тобто міра Лебега, нормована константою $(2\pi)^{-m}$; p знаходиться з рівняння

$$Bp + pB^T = 0$$

за умови нормування $S_p pq = I$. Умова ортогональності правої частини рівняння (7) ядру оператора Q^* [2] виконується, оскільки

$$\int_{S^m} h(\vec{y})d\vec{y} = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^m \cos y_k dy_1 \ldots dy_m = 0.$$

Розв'язок (7) шукаємо у вигляді лінійної комбінації

$$q_1(y) = \sum_{k=1}^m [\alpha_k \cos y_k + \beta_k \sin y_k], \qquad (9)$$

де матриці α_k і β_k підлягають визначенню після підстановки (9) в (7). Маємо для цих матриць систему рівнянь

$$\begin{cases} B^T\alpha_k + \alpha_k B + \nu_k\beta_k - \dfrac{1}{2}\sigma_k^2\alpha_k = \\ \qquad = ch_k\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ B^T\beta_k + \beta_k B + \nu_k\alpha_k - \frac{1}{2}\sigma_k^2\beta_k = 0, \\ \qquad k = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{10}$$

або

$$\alpha_k = \frac{1}{\nu_k}\left(B_0 - \frac{1}{2}\sigma_k^2 I\right)\beta_k, \tag{11}$$

$$\beta_k = c\nu_k h_k\left[\left(B_0 - \frac{1}{2}\sigma_k^2 I\right)^2 + \nu_k^2\right]^{-1} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а оператор B_0 в просторі симетричних матриць з $M_2(\mathbb{R})$ визначається рівністю $B_0 q = B^T q + qB$.

Цей оператор має спектр $\sigma(B_0) = [-2\omega i, 0, 2\omega i]$ і тому

$$\sigma\left(\left(B_0 - \frac{1}{2}\sigma_k I\right)^2\right) =$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\sigma_k^2 + 2\omega i\right)^2 \frac{1}{4}\sigma_k^4, \left(\frac{1}{2}\sigma_k^2 - 2\omega i\right)^2\right\},$$

тобто оператори $\left(B_0 - \dfrac{1}{2}\sigma_k I\right)^2 + \nu_k^2 I$ оборотні. Підставимо розв'язок (11)—(12) до правої частини рівняння (8) і перевіримо умову нормальної розв'язності

$$-\left(\frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{2}\right) - 2\delta c S_p\left\{\left[G^T\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} G\right]\begin{pmatrix} \omega^{-2} & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}\right\} - \frac{1}{2}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^m h_k S_p\left\{(H^T\alpha_k + \alpha_k H)\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\right\} = 0.$$

Після відшукання матриць (11), (12) та їх підстановки до попереднього рівняння знаходимо

$$C = \left(\frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{2}\right)\left[2\delta - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4\omega^2}\sum_{k=1}^m h_k^2 \frac{\nu_k^2\sigma_k^2 + 4\sigma_k^2\omega^2 + \frac{1}{4}\sigma_k^6}{\nu_k^2\sigma_k^4 + \left(4\omega^2 + \frac{1}{4}\sigma_k^4 - \nu_k^2\right)^2}\right]^{-1}.$$

Отже, одержано наступний результат.

Теорема 1. *Для того, щоб стохастичний осцилятор (1) був експоненціально стійкий у середньому квадратичному, необхідно й досить, щоб*

$$\delta > \frac{1}{8\omega^2}\sum_{k=1}^m h_k^2 \frac{\nu_k^2\sigma_k^2 + 4\sigma_k^2\omega^2 + \frac{1}{4}\sigma_k^6}{\nu_k^2\sigma_k^4 + \left(4\omega^2 + \frac{1}{4}\sigma_k^4 - \nu_k^2\right)^2}. \tag{13}$$

Наслідок 1. *З умови (13) випливає, що навіть при наявності головного демультиплікаційного резонансу $\nu_k^2 = 4\omega^2$ і малому σ_k^2 осцилятор або стійкий у середньому квадратичному або ні (рівності з розгляду слід виключити внаслідок довільної малості $\varepsilon > 0$).*

Однак може статися, що осцилятор не є стійкий у середньому квадратичному (тобто (13) не виконується), але розв'язки (1) прямують до нуля з імовірністю одиниця. Тому для аналізу явища резонансу потрібно замість (13) проаналізувати необхідну та достатню умову асимптотичної стохастичної стійкості тривіального розв'язку (1). Як було показано в [14], асимптотична стохастична стійкість еквівалентна експоненціальній p-стійкості при всіх досить малих $p > 0$. Нижче наведено аналіз цієї стійкості у випадку $m = 1$.

Зробивши в (1) заміну за формулами

$$x = r\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \dot{x} = -r\omega\sin\frac{\varphi}{2},$$

отримаємо систему рівнянь

$$\frac{dr}{dt} = r\left\{\varepsilon\frac{h_1\cos\xi_1(t)}{2\omega}\sin\varphi - \right.$$

$$-\delta\varepsilon(1-\cos\varphi)\Big\}, \qquad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\omega + \frac{\varepsilon h_1 \cos\xi_1(t)}{2\omega}(1+\cos\varphi)- \\ -\delta\varepsilon^2 \sin\varphi, \qquad (15)$$

а після цього перейдемо від r до змінної $z = r^p$ при $p > 0$

$$\frac{dz}{dt} = z\Big\{p\varepsilon\frac{h_1\cos\xi_1(t)\sin\varphi(t)}{2\omega}- \\ -p\delta\varepsilon^2(1-\cos\varphi(t))\Big\}. \qquad (16)$$

Очевидно, що

$$\inf\Big\{1, \frac{1}{\omega^2 p}\Big\}(x^2+\dot{x}^2)^p \le r^{2p} \le \\ \le (x^2+\dot{x}^2)^p \sup\Big\{1, \frac{1}{\omega^2 p}\Big\}$$

і тому експоненціальна p-стійкість осцилятора (1) еквівалентна експоненціальній стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку (16), з коефіцієнтами, що залежать від марковського процесу $\{\xi_1(t), \varphi(t)\}$ на S^2, де $\varphi(t)$ задовольняє (15), а $\xi_1(t)$ задається формулою (3) (при $k = 1$). Інфінітезимальний оператор цього процесу на $C(S^2)$ набуває вигляду

$$(Qv)(y,\varphi) \equiv \\ \equiv \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[\mathbb{E}_{y,\varphi} v(\xi_1(t), \varphi(t) - v(y,\varphi))] = \\ = (Q_0 v)(y,\varphi) + \varepsilon(Qv)(y,\varphi) + \varepsilon^2(Q_2 v)(y,\varphi),$$

де

$$(Q_0 v)(y,\varphi) = 2\omega\frac{\partial v(y,\varphi)}{\partial\varphi}+ \\ +\nu_1\frac{\partial v(y,\varphi)}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 v(y,\varphi)}{\partial y^2},$$

$$(Q_1 v)(y,\varphi) = \frac{h_1}{\omega}\cos y(1+\cos\varphi)\frac{\partial v(y,\varphi)}{\partial\varphi}, \qquad (17)$$

$$(Q_2 v)(y,\varphi) = -2\delta\sin\varphi\frac{\partial v(y,\varphi)}{\partial\varphi}. \qquad (18)$$

Для дослідження стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку (16) можна застосувати описану вище методику. Функція Ляпунова в даному випадку має вигляд $z^2 q^{(\varepsilon)}(y,\varphi)$, де

$$q^{(\varepsilon)}(y,\varphi) = \frac{1}{\varepsilon^2}q + \frac{1}{\varepsilon}q_1(y,\varphi) + q_0(y,\varphi). \qquad (19)$$

Для відшукання q, функцій $q_1(y,\varphi)$ та $q_0(y,\varphi)$ матимемо рівняння [14]

$$(Q_0 q_1)(y,\varphi) = -\Big(\frac{ph_1}{\omega}\cos y\sin\varphi + Q_1\Big)q, \qquad (20)$$

$$(Q_0 q_2)(y,\varphi) = -\Big(\frac{ph_1}{\omega}\cos y\sin\varphi + Q_1\Big)\times \\ \times q_1(y,\varphi) - (-2p\delta(1-\cos\varphi) + Q_2)q - 1. \qquad (21)$$

Оскільки за означенням $Q_0 q = 0$, з рівняння (20) знаходимо $q_1(y,\varphi)$ (з урахуванням рівності $Qq = 0$) у формі

$$q_1(y,\varphi) = \frac{ph}{2\omega}\{\alpha\sin(y+\varphi) + b\cos(y+\varphi)+ \\ +\hat{a}\sin(\varphi - y) + \hat{b}\cos(\varphi - y)\}$$

і підставляємо цей розв'язок у (21). Після цього перевіряємо умову нормальної розв'язності рівняння (21), тобто умову ортогональності правої частини цього рівняння ядру оператора Q^*. У нашому випадку ортогональність означає рівність нулеві інтеграла від правої частини (21) за множиною S^2, оскільки $\sigma_1^2 > 0$ і тому нуль є ізольованою точкою спектра операторів Q_0 і Q_0^* кратності одиниця, а власним вектором оператора Q_0^* у просторі $C(S^2)$ є міра Лебега на S^2, нормована константою $(4\pi^2)^{-1}$. Таким чином, умова нормальної розв'язності (21) має вигляд

$$-I + q\Big(2p\delta - \frac{p(p+1)h_1^2}{8\omega^2}\cdot\frac{a+\hat{a}}{2}\Big) = 0.$$

Підставляючи до цієї рівності параметри a і $\hat{a}$, що знайдені при розв'язанні (20) (з урахуванням ортогональності цього розв'язку ядру оператора Q^*), отримуємо умову $q > 0$

експоненціальної $2p$-стійкості тривіального розв'язку (1) у формі

$$\delta > \frac{h_1^2\sigma_1^2(p+1)}{16\omega^2}\times$$

$$\times\frac{4\omega^2+\nu_1^2+\frac{1}{4}\sigma_1^4}{\nu_1^2\sigma_1^2+\left(4\omega^2-\nu_1^2+\frac{1}{4}\sigma_1^4\right)^2}. \qquad (22)$$

Зауважимо, що при $p=1$ одержуємо умову експоненціальної стійкості в середньому квадратичному (13) (при $m=1$). Якщо при $p=0$ (22) виконується, то вона виконується при всіх досить малих $p>0$. Отже, одержано наступне твердження.

Теорема 2. *Для того, щоб стохастичний осцилятор (1) у випадку $m=1$ був асимптотично стохастично стійкий, досить, щоб виконувалася умова (22) з $p=0$.*

Наслідок 2. *Як видно з виразу (22), резонансних явищ при $\nu_1^2=4\omega^2$ у даному випадку також не спостерігається.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Arnold L., Papanicolaou Gr., Wihstutz V.* Asymptotic analysis of the Lyapunov exponent and rotation number of the random oscillator and applications // SIAM J. Appl. Math.— 1986.— **46**.— PP.427—450.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1967.— 624 с.
3. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и мех.— 1960.— **24**, вып. 5.— С.809—823.
4. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы.— М.: Наука, 1979.— 184 с.
5. *Хрисанов С.М., Погребецкая Т.А.* Моментные уравнения и траекторные показатели Ляпунова.— Рукоп. деп. ВИНИТИ, N 8439-1387, 1987.— 26 с.
6. *Кулініч Г.Л.* Якісний аналіз впливу на гармонічний осцилятор з тертям випадкових збурень типу "білого шуму" вздовж вектора фазової швидкості // Укр. матем. журн.— 1997.— **49**, N 1.— С.35—46.
7. *Царьков Е.Ф.* Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с марковскими коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— N 2.— С.10—15.
8. *Korolyuk V.S.* Averaging and stability of dynamical systems with Markov switchings // Sweden Univ. of Umea.— S—90187.— 1991.— Febr.— 15 p.
9. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— К.: Наук. думка, 1987.— 328 с.
10. *Крейн М.Г., Рутман М.А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук.— 1947.— **3**, вып. 1.— С.3—95.
11. *Kulinich G.L.* Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator // Random Operators and Stochastic Equations.— 1995.— **3**, N 2.— P.141—152.
12. *Kulinich G.L.* On the limiting behaviour of a harmonic oscillator with random external disturbance // J. Applied Math. and Stoch. Anal.— 1995.— **8**, N 3.— P.265—274.
13. *Стратанович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961.— 558 с.
14. *Роголь С.Л.* Стійкість лінійних диференціальних рівнянь при малих дифузійних збуреннях. Дис. ... канд. фіз.-мат. наук.— Чернівці, 1993.— 121 с.

Стаття надійшла до редколегії 26.12.2003