УДК 517.51

©2004 р. Л.А. Піддубна, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ НЕАСИМПТОТИЧНИХ КОРЕНІВ КВАЗІПОЛІНОМІВ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Досліджено алгоритм знаходження неасимптотичних коренів матричних квазіполіномів для диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу, що базується на апроксимації диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь.

The approximation algorithm of nonasymptotic quasipolinomial's roots of differential-difference equations by neutral type, which based on approximation by system of ordinary differential equations, is investigated in this article.

Вступ. Розміщення коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь має важливе значення при дослідженні стійкості та осциляції розв'язків, в задачах стабілізації й керування. Систематичному вивченню властивостей квазіполіномів присвячено праці [1, 2] та інші. При цьому для коренів з великими модулями (асимптотичні корені) побудовані ефективні асимптотичні формули.

Основний вплив на динамічні властивості квазіполіномів мають його неасимптотичні корені. Зокрема, якщо всі корені квазіполінома лежать у лівій півплощині, то це є необхідною й достатньою (за винятком виключних випадків) умовою асимптотичної стійкості нульового розв'язку відповідного диференціально-різницевого рівняння.

Для знаходження коренів многочленів розроблено багато універсальних алгоритмів, що включені в базове програмне забезпечення сучасних ЕОМ.

Однак для знаходження коренів квазіполіномів немає ефективних обчислювальних алгоритмів. У працях [3, 4] побудовані алгоритми знаходження неасимптотичних коренів скалярних квазіполіномів, в яких використовується схема апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [5, 6] системою звичайних диференціальних рівнянь.

У даній праці цей підхід використовується для наближення неасимптотичних коренів матричних квазіполіномів для диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

Відзначимо, що випадок диференціально-різницевих рівнянь запізнюючого типу розглядався в праці [7].

1. Схема апроксимації. Розглянемо лінійне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу

$$(x(t) - Cx(t-\tau))' = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad (1)$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де A, B, C - сталі $n \times n$ матриці, $x \in R^n$, $\tau > 0$, $\varphi(t)$ – абсолютно неперервна на $[-\tau, 0]$ функція.

Визначимо функції

$$y_j(t) = \begin{pmatrix} y_{1j}(t) \\ y_{2j}(t) \\ \vdots \\ y_{nj}(t) \end{pmatrix},$$

$$j = \overline{0, m}, \; m \in N,$$

як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y_0' &= Ay_0 + \mu C y_{m-1} + (B - \mu C) y_m, \\ y_j' &= \mu(y_{j-1} - y_j), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mu = \frac{m}{\tau}, \quad j = 1, ..., m \ , \quad m \in N,$$

з початковими умовами

$$y_j(0) = \varphi(-\frac{j\tau}{m}), \ j = \overline{0, m}. \tag{4}$$

Наближена заміна рівняння (1) системою звичайних диференціальних рівнянь (3) досліджувалась у працях [8, 9]. Зокрема, якщо власні значення матриці C лежать в одиничному крузі, тоді задача Коші (3)—(4) апроксимує початкову задачу (1)—(2) і мають місце співвідношення

$$\left| x(t - j\frac{\tau}{m}) - y_j(t) \right| \leq Q_j \omega(x(t), \frac{\tau}{m}),$$

$$t \in [0, T], \quad T > 0,$$

де $Q_j, \quad j = \overline{0, m}$ - додатні сталі, а $\omega(x, \frac{\tau}{m})$ – модуль неперервності функції $x(t)$ на $[-\tau, T]$.

2.**Наближення квазіполінома.** Квазіполіном для диференціально-різницевого рівняння (1) має вигляд

$$\Phi(\lambda) = \det(A - \lambda E + Be^{-\lambda\tau} + \lambda Ce^{-\lambda\tau}). \tag{5}$$

Випишемо характеристичний многочлен для системи звичайних диференціальних рівнянь (3)

$$\Psi_m(\lambda) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} A - \lambda E & 0 & \dots & \mu C & B - \mu C \\ \mu E & -(\mu + \lambda)E & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu E & -(\mu + \lambda)E \end{pmatrix}, \tag{6}$$

Лема 1. *Для характеристичного многочлена апроксимуючої системи (2) має місце співвідношення*

$$\Psi_m(\lambda) = \det \left(A - \lambda E + \frac{\mu^m}{(\mu + \lambda)^m} B + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu^m}{(\mu + \lambda)^m} \lambda C \right) (\mu + \lambda)^{mn}. \tag{7}$$

Доведення. Розіб'ємо визначник $\Psi_m(\lambda)$ на чотири блоки $\overline{A}, \overline{B}, C, D$, поклавши:

$$\overline{A} = (A - \lambda E), \quad \overline{B} = (0, \ 0, \ \dots, \ \mu C, \ B - \mu C),$$

$$C = \begin{pmatrix} \mu E \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_m = \begin{pmatrix} -(\mu + \lambda)E & \dots & 0 \\ \mu E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -(\mu + \lambda)E \end{pmatrix}.$$

Тут $\overline{A}, \ D_m$ - квадратні матриці і, очевидно, $\det(D_m) = (-1)^{mn}(\mu + \lambda)^{mn}$. Обчислимо визначник Ψ_m, використавши властивості блочних матриць [10] аналогічно як у випадку рівняння із запізненням[5] :

$$\Psi_m(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ C & D_m \end{pmatrix} =$$

$$= \det(\overline{A} - \overline{B} D_m^{-1} C) \cdot \det(D_m), \tag{8}$$

де D_m^{-1} - обернена матриця до матриці D_m.

Представимо D_m^{-1} у вигляді:

$$D_m^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ d_{31} & d_{32} & \dots & d_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix}.$$

Підрахуємо добуток матриць:

$$\overline{B} D_m^{-1} C = (0, \ 0, \ \dots, \ \mu C, \ B - \mu C) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m1} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu E \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu C \cdot d_{m-1,1} + (B - \mu C) d_{m1}) \mu E =$$

$$= \mu^2 C d_{m-1,1} + \mu(B - \mu C) d_{m1}. \tag{9}$$

Знайдемо блоки d_{m1}, $d_{m-1,1}$ оберненої матриці D_m^{-1}. Для цього розіб'ємо матрицю D_m на чотири блоки $D_{m-1}, \overline{0}, C$і K, вважаючи, що

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \mu E \end{pmatrix},$$

$$K = -(\mu+\lambda)E \quad , \quad \overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_m = \begin{pmatrix} D_{m-1} & \overline{0} \\ C & K \end{pmatrix}.$$

Тепер маємо $D_m^{-1} = \begin{pmatrix} D_{m-1}^{-1} & 0 \\ U & K^{-1} \end{pmatrix}$, де $K^{-1} = -\frac{1}{(\mu+\lambda)}E$.

Знайдемо блок U , використавши рівність

$$DD_m^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ CD_{m-1}^{-1} + KU & E \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$U = -K^{-1}CD_{m-1}^{-1} = \frac{1}{(\mu+\lambda)}ECD_{m-1}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{(\mu+\lambda)}(\mu d_{m-1,1}\ \mu d_{m-1,2} \quad \dots \quad \mu d_{m-1,m-1}).$$

Прирівнюючи перші компоненти векторів, знаходимо, що

$$d_{m1} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}d_{m-1,1} = \dots$$

$$= \frac{\mu^{m-1}}{(\mu+\lambda)^{m-1}}d_{1,1} = -\frac{\mu^{m-1}}{(\mu+\lambda)^m}E. \qquad (10)$$

Підставляючи (9), (10) у співвідношення (8), одержуємо

$$\Psi_m(\lambda) = \det\Bigg(A - \lambda E + \frac{\mu^m C}{(\mu+\lambda)^{m-1}} +$$

$$+\frac{\mu^m(B-\mu C)}{(\mu+\lambda)^{mn}}\Bigg)(\mu+\lambda)^{mn} =$$

$$= \det\Bigg(A - \lambda E + \frac{\mu^m B}{(\mu+\lambda)^m} +$$

$$+\frac{\mu^m}{(\mu+\lambda)^m}\lambda C\Bigg)(\mu+\lambda)^{mn}.$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Для фіксованих $\lambda \in Z$ послідовність функцій*

$$\overline{\Psi}_m(\lambda) = \frac{\Psi_m(\lambda)}{(\mu+\lambda)^{mn}}, \qquad m \in N,$$

збігається при $m \to \infty$ до квазіполінома (5).

Доведення. Розглянемо фіксоване $\lambda \in Z$. Тоді $\lambda \neq \frac{m}{\tau}$ за можливим винятком одного значення m. Отже, функція $\overline{\Psi}_m(\lambda)$ визначена для всіх $m \in N$ за можливим винятком одного $m \in N$.

Враховуючи позначення $\mu = \frac{m}{\tau}$ і рівність (7), маємо

$$\overline{\Psi}_m(\lambda) = \det\Big(A - \lambda E + \frac{m^m}{(m+\lambda\tau)^m}B +$$

$$+\frac{m^m}{(m+\lambda\tau)^m}\lambda C\Big). \qquad (11)$$

На підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}(\frac{m}{m+\lambda\tau})^m = e^{-\lambda\tau},$$

одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}(A - \lambda E + (\frac{m}{(m+\lambda\tau)})^m B +$$

$$+(\frac{m}{(m+\lambda\tau)})^m\lambda C) = A - \lambda E + Be^{-\lambda\tau} + \lambda Ce^{-\lambda\tau}.$$

Отже, переходячи в рівності (11) до границі при $m \to \infty$, для фіксованого $\lambda \in Z$ одержимо

$$\lim_{m\to\infty}\overline{\Psi}_m(\lambda) = \det(A - \lambda E + Be^{-\lambda\tau} + \lambda Ce^{-\lambda\tau}).$$

Лема 2 доведена.

Зауваження. Функція $\overline{\Psi}_m(\lambda)$, визначена співвідношенням (11), апроксимує при $m \to \infty$ квазіполіном (5). Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома (5). Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $\overline{\Psi}_m(\lambda)$, згідно з рівністю (7), збігаються, то корені характеристичного рівняння (6) можна брати як наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома (5).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Пинни Е.* Обыкновенные дифференциально разностные уравнения.— М.: ИЛ, 1961.— 248 с .

2. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

3. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // ПММ.— 1965.– N 2.— С.226—235.

4. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання.— 1999.— N 1.— С.42—50.

5. *Бернік В.О., Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Алгоритм знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. праць.— К.: Ін-т математики НАН України, 1997.— С.30—35.

6. *Черевко І.М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування.— К.: Ін-т математики НАН України, 1992.— С.74—84.

7. *Піддубна Л.А.* Наближене знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Системи еволюційних рівнянь з післядією.— К.: Ін-т математики НАН України, 1994.— С.89—97.

8. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Алгоритм апроксимації диференціально-різницевих рівнянь її моделювання процесів електродинаміки // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки.— 1999.— Вип. 2.— С.111—118.

9. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація системи диференціально-різницевих рівнянь із багатьма запізненнями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.50—54.

10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1988.— 552 с.

Стаття надійшла до редколегії 20.12.2003