УДК 517.51

©2004 р. В.В. Михайлюк, О.В. Собчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

# БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ І ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ЗЛІЧЕННОГО ЧИСЛА КООРДИНАТ

Доведено, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є першого класу Бера, якщо $X$ — сепарабельний простір і $Y$ — лінделефовий псевдокомпактний простір або якщо $X$ задовольняє умову $(II_{\aleph_0})$, а $Y$ — довільний компакт Валдівіа.

It is proved that any separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ is Baire one if $X$ is a separable space and $Y$ is a Lindelöf pseudocompact or $X$ satisfies condition $(II_{\aleph_0})$ and $Y$ is a Valdivia compact.

**1.** У дослідженнях берівської класифікації нарізно неперервних відображень, тобто відображень, неперервних відносно кожної змінної зокрема, що беруть свій початок з класичної праці Лебега [1], особливе місце займає вивчення нарізно неперервних функцій на добутку двох множників, один із яких задовольняє умову типу компактності.

Так, у [2] показано, що для компакту $X$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, де $Y$ – довільний компакт, належить до першого класу Бера тоді й тільки тоді, коли $X$ задовольняє умову зліченності ланцюжків.

З результатів праці [3] випливає, що для цілком регулярного простору $X$ з умовою зліченності ланцюжків і довільного компакту $Y$ вимірність за Бером нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ рівносильна належності функції $f$ до першого класу Бера.

У даній статті ми, використовуючи залежність функцій від зліченної кількості координат, дістанемо певний розвиток згаданих вище результатів. А саме, ми покажемо, що нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є першого класу Бера, якщо $X$ – сепарабельний і $Y$ – лінделефовий псевдокомпактний простір або коли $X$ задовольняє умову $(II_{\aleph_0})$, яка є певним підсиленням умови зліченності ланцюжків, а $Y$ – довільний компакт Валдівіа.

**2.** Спочатку нагадаємо основні означення, введемо позначення й доведемо допоміжне твердження.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$, визначена на топологічному просторі $X$, називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково на $X$ збігається до функції $f$.

Нехай $\alpha > 1$ – не більш ніж зліченний ординал. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається функцією $\alpha$-го класу Бера, якщо існує послідовність $(f_n)$ функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ класу Бера, меншого ніж $\alpha$, яка поточково на $X$ збігається до функції $f$. Функція $\alpha$-го класу Бера на $X$ для деякого не більш ніж зліченного ординалу $\alpha$ називається вимірною за Бером.

Топологічний простір $X$ має *властивість зліченності ланцюжків*, якщо довільна система попарно неперетинних відкритих в $X$ непорожніх множин має не більш ніж зліченну потужність.

Для сім'ї $(A_i : i \in I)$ потужність $|I|$ ми називатимемо потужністю цієї сім'ї.

Сім'я $(A_i : i \in I)$ підмножин простору $X$ називається *точково скінченною*, якщо для кожного $x \in X$ множина $I_x = \{i \in I : x \in A_i\}$ скінченна.

Казатимемо, що топологічний простір $X$ має *властивість* $(II_{\aleph_0})$, якщо довільна точково скінченна сім'я відкритих в $X$ непорожніх множин має не більш ніж зліченну потужність. З відповідних означень випливає, що властивість $(II_{\aleph_0})$ сильніша, ніж властивість зліченності ланцюжків.

**Твердження 1.** *Нехай $X$ – берівський простір із властивістю зліченності ланцюжків. Тоді $X$ має властивість $(II_{\aleph_0})$.*

**Доведення.** Нехай $(U_i : i \in I)$ – точково скінченна сім'я непорожніх відкритих в $X$ множин $U_i$. Для кожного $x \in X$ нехай $I_x = \{i \in I : x \in U_i\}$. Позначимо $X_n = \{x \in X : |I_x| \le n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Оскільки всі множини $I_x$ скінченні, то $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Тому множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, де $G_n = \mathrm{int}(\overline{X_n})$ – внутрішність замикання множини $X_n$, щільна в берівському просторі $X$.

Для кожного $i \in I$ знайдемо таке $n_i \in \mathbb{N}$, що $U_i \cap G_{n_i} \ne \emptyset$ і вважатимемо $V_i = U_i \cap G_{n_i}$. Оскільки множина $X_{n_i}$ щільна в $G_{n_i}$, то для довільної скінченної множини $J \subseteq I$ з $|J| = n_i + 1$ маємо $\bigcap\limits_{j \in J} U_j = \emptyset$, зокрема $\bigcap\limits_{j \in J} V_j = \emptyset$. Тому для кожного $i \in I$ існує така максимальна скінченна множина $A_i \subseteq I$, що $i \in I$ та $W_i = \bigcap\limits_{j \in A_i} V_j \ne \emptyset$.

Нехай $i, j \in I$ такі, що $W_i \cap W_j \ne \emptyset$. Тоді з максимальності множин $A_i$ та $A_j$ випливає, що $A_i = A_j$. Тому $W_i = W_j$. Отже, система $\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$ складається з попарно неперетинних множин. Отже, $\mathcal{W}$ не більш ніж зліченна. Для кожного $W \in \mathcal{W}$ припустимо, що $I_W = \{i \in I : W_i = W\}$. Оскільки $A = A_i = A_j$, якщо $W_i = W_j$, причому $i, j \in A$, то $I_{W_i} \subseteq A_i$. Тому всі множини $I_W$ скінченні і

$$|I| = \left| \bigcup_{W \in \mathcal{W}} I_W \right| \le \aleph_0 \cdot |\mathcal{W}| \le \aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Отже, $X$ має властивість $(II_{\aleph_0})$.

Регулярний простір $X$ називається *ліндельофовим*, якщо з довільного відкритого покриття простору $X$ можна виділити не більш ніж зліченне підпокриття, і *псевдокомпактним*, якщо $X$ – цілком регулярний і кожна неперервна на $X$ функція обмежена.

Нехай $X$, $T$, $Z$ – довільні множини, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ і $f : X \times Y \to Z$. Тоді говоритимемо, що $f$ *залежить від зліченної кількості координат відносно змінної* $y$, якщо існує не більш ніж зліченна множина $S \subseteq T$ така, що $f(x, y') = f(x, y'')$ для довільних $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ з $y'_{|S} = y''_{|S}$.

Компактний простір $Y$ є *компактом Вальдівіа*, якщо $Y$ гомеоморфний деякому компактному простору $Z \subseteq \mathbb{R}^T$ такому, що множина $\{z \in Z : |\mathrm{supp}\, z| \le \aleph_0\}$ є щільною в $Z$, де $\mathrm{supp}\, z = \{t \in T : z(t) \ne 0\}$.

**3.** Тепер перейдемо до викладу основних результатів.

**Лема 2.** *Нехай $X$, $Y$, $Z$ – топологічні простори, $\varphi : Y \to Z$ – неперервне відображення, $g : X \times Z \to \mathbb{R}$ – функція першого класу Бера. Тоді функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = g(x, \varphi(y))$ також першого класу Бера.*

**Доведення.** Оскільки $g$ – першого класу Бера, то існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_n : X \times Z \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до функції $g$. Нехай

$$f_n(x, y) = g_n(x, \varphi(y)), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Функції $f_n$, $n = 1, 2, \dots$ неперервні, як композиції неперервних функцій і

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x, y) = \lim_{n \to \infty} g_n(x, \varphi(y)) =$$

$$= g(x, \varphi(y)) = f(x, y)$$

в кожній точці $(x, y) \in X \times Y$. Отже, $f$ – першого класу Бера. Лему 2 доведено.

**Теорема 3.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$– псевдокомпактний простір, причому $Y \subseteq \mathbb{R}^T$, де $T$ – деяка множина, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, яка залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $y$. Тоді $f$ – першого класу Бера.*

**Доведення.** Оскільки функція $f$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $y$, то існує не більш ніж зліченна множина $S \subseteq T$ така, що $f(x, y') = f(x, y'')$ для довільних $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ з $y'_{|S} = y''_{|S}$. Визначимо функцію $\varphi : Y \to \mathbb{R}^S$, поклавши $\varphi(y) = y_{|S}$. Зрозуміло, що функція $\varphi$ – неперервна, а простір $Z = \varphi(Y)$ – метризовний і сепарабельний. Далі, означимо функцію $g : X \times Z \to \mathbb{R}$ наступним чином: $g(x,z) = f(x,y)$, де $\varphi(y) = z$. Дане означення є коректним, оскільки з того, що $\varphi(y') = \varphi(y'') = z$, випливає, що $f(x,y') = f(x,y'') = g(x,z)$.

Покажемо, що функція $g$ нарізно неперервна. Неперервність функції $g$ відносно змінної $x$ випливає з неперервності функції $f$ відносно змінної $x$. Нехай $x_0 \in X$ і $z_0 \in Z$. Припустимо, що для деякого $\varepsilon > 0$ існує послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $z_n \in Z$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ і $|g(x_0,z_n) - g(x_0,z_0)| > \varepsilon$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Для кожного такого $n$ виберемо деяку точку $y_n \in Y$ так, що $\varphi(y_n) = z_n$. Зафіксуємо деяку метрику на просторі $Z$, яка породжує його топологічну структуру. Позначимо через $W_n$ відкриту в $Z$ кулю з центром у точці $z_n$ і радіусом $\frac{1}{n}$. Оскільки функція $f^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$, $f^{x_0}(y) = f(x_0,y)$, неперервна, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує відкритий окіл $\widetilde{V_n}$ точки $y_n$ в $Y$ такий, що $|f(x_0,y) - f(x_0,y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $y \in \widetilde{V_n}$. Зауважимо, що тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ і $y \in \widetilde{V_n}$ виконується нерівність

$$|f(x_0,y) - g(x_0,z_0)| \geq |g(x_0,z_n) - g(x_0,z_0)| -$$

$$|f(x_0,y) - f(x_0,y_n)| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $V_n = \widetilde{V_n} \cap \varphi^{-1}(W_n)$ при $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $Y$ псевдокомпактний простір, то, згідно з [4, с.311], послідовність $(V_n : n \in \mathbb{N})$ не є локально скінченною в $Y$. Виберемо точку $y_0 \in Y$ таку, що довільний окіл $V$ точки $y_0$ в $Y$ перетинається з нескінченною кількістю множин $V_n$. Тоді $f(x_0,y_0) \in \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} f^{x_0}(V_n)}$, зокрема $|f(x_0,y_0) - g(x_0,z_0)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

З іншого боку, довільний окіл $W$ точки $\varphi(y_0)$ в $Z$ перетинається з нескінченною кількістю $\varphi(V_n)$. Оскільки $V_n \subseteq \varphi^{-1}(W_n)$, то $\varphi(V_n) \subseteq W_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що, згідно з вибором множин $W_n$, точка $z_0$ – єдина точка простору $Z$ така, що довільний її окіл перетинається з нескінченною кількістю множин $W_n$. Тому $z_0 = \varphi(y_0)$ і $f(x_0,y_0) = g(x_0,z_0)$.

Таким чином, ми прийшли до суперечності. Значить, функція $g$ неперервна відносно змінної $z$.

Згідно з теоремою Рудіна [5], функція $g$ першого класу Бера. Тоді, згідно з лемою 2, функція $f$ також першого класу Бера. Теорему 3 доведено.

**Наслідок 4.** *Нехай $X$ – сепарабельний топологічний простір, $Y$ – цілком регулярний лінделефовий псевдокомпактний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді $f$ – першого класу Бера.*

**Доведення.** Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $Y \subseteq \mathbb{R}^T$, де $T$ – деяка множина. Оскільки $X$ – сепарабельний, а $Y$ – лінделефовий простори, то кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $y$. Тепер залишилось використати теорему 3.

Аналогічно з означення компакту Валдівіа і теореми 3 випливає наступний результат.

**Наслідок 5.** *Нехай $X$ – топологічний простір з властивістю $(II_{\aleph_0})$, $Y$ – компакт Валдівіа і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді $f$ – першого класу Бера.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Lebesgue H.* Sur les fonctions représentables analitiquement // Journ. de Math., ser.2.— 1905.— **1**.— P.139—216.

2. *Moran W.* Separate continuity and support of measures // J. London Math. Soc.— **44**.— 1969.— P.320—324.

3. *Vera G.* Baire measurability of separately continuous functions // Quart. J. Math. Oxford(2).— **39**, N 153.— 1988.— P.109—116.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

5. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and Aplications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78.— Academic Press, 1981.— P.741—747.



Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004