УДК 517.95+511.2

©2004 р. О.М. Медвідь, М.М. Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Досліджено коректність задачі з інтегральними умовами для псевдодиференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

The correctness of the problem with integral conditions for pseudodifferential equations is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of an estimations of small denominators of the problem are proved.

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними вивчались у різних аспектах в роботах [1, 5, 8—11]. Зокрема, в [1, 8—10] встановлено класи коректності задач з інтегральними умовами (з різними ваговими функціями під знаком інтеграла) за часовою змінною та умовами зростання на нескінченності за іншими координатами для еволюційних систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами. У [5, § 7.4; 11, § 2.3] встановлено, що для гіперболічних рівнянь розв'язність задач з інтегральними умовами в класах функцій, майже періодичних за просторовими змінними, пов'язана із проблемою малих знаменників; при цьому доведено коректність таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких складені з коефіцієнтів рівняння та параметрів області.

У даній роботі встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі з інтегральними умовами (2) за виділеною змінною t для псевдодиференціальних рівнянь (1) другого порядку за змінною t в класах періодичних за $x_1, ..., x_p$ функцій. Вперше для рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами встановлено коректність розглядуваної задачі для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_1 \in (0, T]$, які є значеннями верхньої межі інтегрування в умовах (2). У роботі запропоновано метод доведення метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі з інтегральними умовами для рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами. Цей метод базується на встановленій у пункті 5 лемі про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху. В останньому пункті роботи виділено клас рівнянь (1), для яких відсутня проблема малих знаменників при дослідженні задачі (1), (2). Окремі результати роботи анонсовано в [4].

1. Використовуватимемо такі позначення: $\operatorname{mes} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$; Ω_p — p-вимірний тор, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \le x_j \le 2\pi, j = 1, ..., p\}$, $Q_p = (0,T) \times \Omega_p$; $x = (x_1, ..., x_p) \in \Omega_p$, $k = (k_1, ..., k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + ... + |k_p|$; $(k, x) = k_1x_1 + ... + k_px_p$; $G(k) : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ — така додатна функція, що $G(k) \ge 1$, $k \in \mathbb{Z}^p$, і для деяких невід'ємних сталих λ, μ, які одночасно не дорівнюють нулеві, ряд $\sum\limits_{|k|\ge 0} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k))$ є збіжним. Зазначеним умовам задовольняють, наприклад, такі функції: 1) $G(k) = (1 + |k|)$ $(\lambda > p, \mu \ge 0)$, 2) $G(k) = \ln(3 + |k|)$ $(\lambda \ge 0, \mu > p)$.

За функцією $G(k)$ визначимо простори $W_{\alpha,\beta}(G)$, $\alpha, \beta \ge 0$, отримані в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik,x)$ за нормою

$$\|\varphi(x); W_{\alpha,\beta}(G)\| = \sqrt{\sum_{|k\geq 0|} |\varphi_k|^2 w^2(k;\alpha,\beta)},$$

$$w(k;\alpha,\beta) \equiv G^{\alpha}(k)\exp(\beta G(k)).$$

Через $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ позначатимемо простір функцій $u(t,x)$ (зі значеннями із простору $W_{\alpha,\beta}(G)$) n разів неперервно диференційовних за t на $[0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ задамо формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))\| =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; W_{\alpha,\beta}(G) \right\|.$$

Через $S^n(G)$, $n = 0,1,\ldots$ позначатимемо множину псевдодиференціальних операцій $A(t,D)$, $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, дія яких на функцію $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x)$ задається формулою

$$A(t,D)u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} A(t,k)u_k(t)\exp(ik,x),$$

де $A(t,k) \in C^n([0,T]; \mathbb{R})$,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^p} \left\{ \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \frac{|A^{(j)}(t,k)|}{G(k)} \right\} < \infty.$$

2. Розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} +$$

$$+A(t,D)u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_p, \qquad (1)$$

$$\int_0^{t_1} u(t,x)dt = \varphi_1(x),$$

$$\int_0^{t_1} tu(t,x)dt = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_p,$$

$$t_1 \in [T_0, T], \quad T_0 > 0, \qquad (2)$$

де $A(t,D)$ — псевдодиференціальна операція з класу $S^0(G)$.

Якщо рівняння (1) описує деякий процес, а t — часова змінна, то задача (1), (2) полягає у знаходженні цього процесу, коли відомі його "усереднені" значення (2) на деякому проміжку часу $[0,t_1] \subset [0,T]$.

3. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t)\exp(ik,x). \qquad (3)$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої задачі:

$$\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + A(t,k)u_k(t) = 0, \qquad (4)$$

$$\int_0^{t_1} u_k(t)dt = \varphi_{1,k}, \quad \int_0^{t_1} tu_k(t)dt = \varphi_{2,k},$$

$$T_0 \leq t_1 \leq T, \qquad (5)$$

де $\varphi_{1,k}$, $\varphi_{2,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ відповідно.

Нехай $\{f_1(t,k), f_2(t,k)\}$ — така фундаментальна система розв'язків на відрізку $[0,T]$ рівняння (4), що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $j = 1,2$, де $\delta_{j,q}$ — символ Кронекера; $H_k(t,\tau)$ — функція, визначена в трикутнику $\{(t,\tau) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \tau \leq t \leq T\}$ рівністю

$$H_k(t,\tau) = f_1(\tau,k)f_2(t,k) - f_2(\tau,k)f_1(t,k). \qquad (6)$$

Легко перевірити, що для довільного фіксованого τ: $0 \leq \tau < t$, виконуються співвідношення:

$$L\left(\frac{d}{dt}, k\right)H_k(t,\tau) = 0, \quad \lim_{t\to\tau+0} H_k(t,\tau) = 0,$$

$$\lim_{t\to\tau+0} \frac{\partial H_k(t,\tau)}{\partial t} = 1. \qquad (7)$$

Тому з теореми про єдиність розв'язку задачі Коші [3, с.84], формули (7) та означення функції $f_2(t,k)$ випливає, що

$$H_k(t,\tau) = f_2(t-\tau,k), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T. \qquad (8)$$

Розв'язок задачі (4), (5) з класу $C^2[0,T]$ зображається формулою

$$u_k(t) = C_{k,1}f_1(t,k) + C_{k,2}f_2(t,k), \qquad (9)$$

де сталі $C_{k,1}$, $C_{k,2}$ визначаються із системи рівнянь

$$C_{k,1}\int_0^{t_1} t^{j-1}f_1(t,k)dt + C_{k,2}\int_0^{t_1} t^{j-1}f_2(t,k)dt = $$
$$= \varphi_{j,k}, \quad j=1,2, \qquad (10)$$

визначник якої позначимо через $\Delta(k,t_1)$:

$$\Delta(k,t_1) = \begin{vmatrix} \int_0^{t_1} f_1(t,k)dt & \int_0^{t_1} f_2(t,k)dt \\ \int_0^{t_1} tf_1(t,k)dt & \int_0^{t_1} tf_2(t,k)dt \end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Теорема 1. *Нехай $A(t,D) \in S^0(G)$. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k,t_1) \neq 0. \qquad (12)$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 4.1 у [5, § 4].

4. Надалі вважатимемо, що умова (12) справджується. Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ система (7) має єдиний розв'язок, і на підставі (3) та (10) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} \frac{\exp(ik,x)}{\Delta(k,t_1)} \left[\varphi_{2,k}\int_0^{t_1} H_k(t,\tau)d\tau - \right.$$
$$\left. -\varphi_{1,k}\int_0^{t_1} \tau H_k(t,\tau)d\tau\right]. \qquad (13)$$

Збіжність ряду (13), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k,t_1)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауваження 1. Якщо справджується умова (12), і $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in \mathcal{T}(\mathcal{T}')$, (де $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ — простори тригонометричних поліномів та формальних тригонометричних рядів відповідно [2, розділ 2, § 6.2]), то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить до класу $C^2([0,T];\mathcal{T})$ $(C^2([0,T];\mathcal{T}'))$.

Позначимо: $A = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\{(1 + \max\limits_{t\in[0,T]}|A(t,k)|^2)^{1/2}/G(k)\}$. Нижче в роботі фігурують додатні сталі C_j, $j=1,...,12$, які не залежать від k.

Теорема 2. *Нехай $A(t,D) \in S^0(G)$, справджується умова (12) і нехай для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*

$$|\Delta(k,t_1)| > G^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k)), \quad \gamma,\delta \in \mathbb{R}. \qquad (14)$$

Якщо $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in W_{\alpha_1,\beta_1}(G)$, $\alpha_1 \geq \alpha+\gamma+1$, $\beta_1 \geq \beta+\delta+AT$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з класу $C^2([0,T];W_{\alpha,\beta}(G))$, який зображається рядом (13) і неперервно залежить від функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Доведення. З теореми про оцінки розв'язку задачі Коші [3, с.27—29] випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]}|f_q^{(j)}(t,k)| \leq C_1(1+\delta_{j,2}G(k))\times$$
$$\times\exp(ATG(k)), \quad j=0,1,2, \quad q=1,2. \qquad (15)$$

З нерівностей (15) та формули (8) отримуємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}\int_0^{t_1} H_k(t,\tau)d\tau\right| \leq C_2(1+\delta_{j,2}G(k))\times$$
$$\times\exp(ATG(k)), \quad j=0,1,2, \qquad (16)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}\int_0^{t_1} \tau H_k(t,\tau)d\tau\right| \leq C_3(1+\delta_{j,2}G(k))\times$$
$$\times\exp(ATG(k)), \quad j=0,1,2. \qquad (17)$$

З нерівностей (14), (16)—(17) та формули (13) випливає, що

$$\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(q)}(t)| \leq C_4\sum_{j=1}^{2}|\varphi_{j,k}|w(k;\gamma{+}1,\delta{+}2AT),$$

$$q = 0, 1, 2. \tag{18}$$

Враховуючи елементарні співвідношення

$$w(k;\alpha,\beta)w(k;\gamma+1,\delta+2AT) =$$

$$= w(k;\alpha+\gamma+1,\beta+\delta+2AT) \leq w(k;\alpha_1,\beta_1)$$

та нерівність трикутника для норм, із формул (3), (18) дістаємо оцінку

$$\|u(t,x); C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))\| \leq$$

$$\leq \sum_{q=0}^{2} \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} \max_{t\in[0,T]} |u_k^{(q)}(t)|^2 w^2(k;\alpha,\beta)} \leq$$

$$\leq C_5 \sum_{j=1}^{2} \Bigg(\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_{j,k}|^2 w^2(k;\alpha+\gamma+1,$$

$$\beta+\delta+2AT) \Bigg)^{1/2} \leq C_5 \sum_{j=1}^{2} \|\varphi_j; W_{\alpha_1,\beta_1}(G)\|,$$

з якої випливає доведення теореми.

5. Нижче нам знадобиться таке допоміжне твердження.

Лема. *Нехай функція $f \in C^3([a,b];\mathbb{R})$ є такою, що кількість нулів на (a,b) її другої похідної $f''(t)$ не перевищує N, а в кожній точці $t \in [a,b]$ виконується нерівність*

$$\max\{|f''(t)|, |f'''(t)|\} > \delta, \quad \delta > 0. \tag{19}$$

Нехай $E(f,\varepsilon) = \{t \in (a,b) : |f(t)| < \varepsilon\}$. Тоді для довільного $\varepsilon \in (0,\delta)$

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon) \leq C_6(N+2) \cdot \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{\delta}},$$

де C_6 — додатна стала, що не залежить від f, ε, δ.

Доведення. Для кожного $\alpha \in (0,\delta)$ розіб'ємо (a,b) на дві неперетинні підмножини:

$$A(\alpha) = \{t \in (a,b) : |f''(t)| < \alpha\},$$

$$B(\alpha) = \{t \in (a,b) : |f''(t)| \geq \alpha\}.$$

Із доведення леми в [6] випливає, що при $\alpha < \delta$ множина $A(\alpha)$ може складатися з не більш ніж $(N+2)$ попарно неперетинних інтервалів $I_j(\alpha) = (\xi_j(\alpha), \eta_j(\alpha))$, $j = 1, ..., m$, $m \leq N+2$, довжина кожного з яких не перевищує $\frac{2\alpha}{\delta}$. Тому, $\operatorname{mes} A(\alpha) \leq 2(N+2)\dfrac{\alpha}{\delta}$, а, отже, й

$$\operatorname{mes}(A(\alpha) \cap E(f,\varepsilon)) \leq 2(N+2)\frac{\alpha}{\delta}, \tag{20}$$

коли $\alpha < \delta$.

Зауважимо, що $\overline{I_j(\alpha)} \cap \overline{I_{j+1}(\alpha)} = \emptyset$ для всіх $j = 1, ..., m-1$, коли $\alpha < \delta$. Припустимо протилежне, тобто що для деякого j_0 правий кінець $\eta_{j_0}(\alpha)$ інтервалу $I_{j_0}(\alpha)$ співпадає з лівим кінцем $\xi_{j_0+1}(\alpha)$ інтервалу $I_{j_0+1}(\alpha)$. Із максимальності (див. доведення леми в [6]) інтервалу $I_{j_0}(\alpha)$ випливає, що $|f''(\eta_{j_0})| = \alpha$. Оскільки $\alpha < \delta$, то з нерівності (19) випливає, що $|f'''(\eta_{j_0})| > \delta$. Тому в деякому (досить малому) околі $U(\eta_{j_0})$ точки $t = \eta_{j_0}$ функція $|f''(t)|$ є строго монотонною. Таким чином, $|f''(t)| > \alpha$ для всіх $t \in U^+(\eta_{j_0}) = \{t \in U(\eta_{j_0}) : t > \eta_{j_0}\}$ (коли $|f''(t)|$ зростає) або $|f''(t)| > \alpha$ для всіх $t \in U^-(\eta_{j_0}) = \{t \in U(\eta_{j_0}) : t < \eta_{j_0}\}$ (коли $|f''(t)|$ спадає). Отримані нерівності суперечать тому, що $I_{j_0}(\alpha) \subset A(\alpha)$, $I_{j_0+1}(\alpha) \subset A(\alpha)$.

Із зробленого зауваження випливає, що множина $B(\alpha)$ є об'єднанням проміжків $J_j(\alpha)$, $j = 1, ..., l$, кількість l яких не перевищує $N+2$. За лемою 2 із [7] $\operatorname{mes}(J_j(\alpha) \cap E(f,\varepsilon)) \leq C_7\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\alpha}}$ для всіх $j = 1, ..., l$, а, отже,

$$\operatorname{mes}(B(\alpha) \cap E(f,\varepsilon)) \leq C_7(N+2)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}. \tag{21}$$

З нерівностей (20), (21) випливає, що для довільного $\alpha \in (0,\delta)$

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon) \leq 2(N+2)\frac{\alpha}{\delta} + C_7(N+2)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}}. \tag{22}$$

Якщо $\varepsilon < \delta$, то $\alpha_0 = \sqrt[3]{\varepsilon\delta^2} \in (0,\delta)$. Покладаючи в нерівності (22) $\alpha = \alpha_0$, дістанемо, що

$$\operatorname{mes} E(f,\varepsilon) \leq C_8(N+2)\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \quad C_8 = 2 + C_7.$$

Лема доведена.

6. З'ясуємо, наскільки "багата" множина задач, для яких виконується оцінка (14).

Теорема 3. *Нехай $A(t,D) \in S^0(G)$. Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_1 \in [T_0,T]$ нерівність (14) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma \geq 3\lambda + 3/2$, $\delta \geq 3\mu + AT$.*

Доведення. Будемо розглядати визначник $\Delta(k,t_1)$ як функцію змінної t_1. Диференціюючи визначник $\Delta(k,t_1)$ за t_1, із формули (11) дістанемо, що

$$\frac{d\Delta(k,t_1)}{dt_1} = \int\limits_0^{t_1} (t_1-\tau) f_2(t_1-\tau,k)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} u f_2(u,k)du. \qquad (23)$$

Із рівності (23) випливає, що

$$\frac{d^2\Delta(k,t_1)}{dt_1^2} = t_1 f_2(t_1,k). \qquad (24)$$

Тоді

$$\begin{cases} f_2(t_1,k) = \dfrac{1}{t_1}\dfrac{d^2\Delta(k,t_1)}{dt_1^2}, \quad t_1 \in [T_0,T], \\ f_2'(t_1,k) = \dfrac{1}{t_1}\dfrac{d^3\Delta(k,t_1)}{dt_1^3} - \\ \qquad -\dfrac{1}{t_1^2}\dfrac{d^2\Delta(k,t_1)}{dt_1^2}, \quad t_1 \in [T_0,T]. \end{cases} \qquad (25)$$

Зі співвідношень (25) випливає, що в кожній точці $t_1 \in [T_0,T]$ виконується нерівність

$$\max\{|f_2(t_1,k)|, |f_2'(t_1,k)|\} \leq$$

$$\leq 2C_9 \max\left\{\left|\frac{d^2\Delta(k,t_1)}{dt_1^2}\right|, \left|\frac{d^3\Delta(k,t_1)}{dt_1^3}\right|\right\}, \qquad (26)$$

де $C_9 = \max\left\{\dfrac{1}{T_0}, \dfrac{1}{T_0^2}\right\}$. Із формули Ліувілля для вронскіана та оцінок (15) одержуємо, що

$$1 = |f_1(t_1,k)f_2'(t_1,k) - f_2(t_1,k)f_1'(t_1,k)| \leq$$

$$\leq 2C_1 \exp(ATG(k)) \max\{|f_2(t_1,k)|, |f_2'(t_1,k)|\},$$

$$t_1 \in [0,T]. \qquad (27)$$

Тоді з нерівностей (26), (27) маємо, що в кожній точці $t_1 \in [T_0,T]$ виконується нерівність

$$\max\left\{\left|\frac{d^2\Delta(k,t_1)}{dt_1^2}\right|, \left|\frac{d^3\Delta(k,t_1)}{dt_1^3}\right|\right\} \geq$$

$$\geq C_{10}\exp(-ATG(k)), \qquad (28)$$

де $C_{10} = (4C_1C_9)^{-1}$.

Із формули (24) видно, що кількість нулів функції $\dfrac{d^2\Delta(k,t_1)}{dt_1^2}$ на відрізку $[T_0,T]$ співпадає з кількістю нулів на цьому відрізку функції $f_2(t_1,k)$. Оскільки $|A(t,k)| \leq AG(k)$, $t \in [0,T]$, то за теоремою порівняння Штурма [3] функція $f_2(t_1,k)$ може мати на $[T_0,T]$ не більше $C_{11}\sqrt{G(k)}$ нулів, $C_{11} = C_{11}(A,T_0,T)$.

Розглянемо такі множини:

$$E_{\gamma,\delta}(k) = \{t_1 \in [T_0,T] :$$

$$|\Delta(k,t_1)| < G^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k))\}, \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Оскільки $\Delta(k,t_1) \in C^4([T_0,T];\mathbb{R})$, а $\dfrac{d^2\Delta(k,t_1)}{dt_1^2}$ має не більше $C_{11}\sqrt{G(k)}$ нулів на $[T_0,T]$, то з нерівності (28), на підставі твердження леми, отримуємо, що при $\gamma \geq 3\lambda + 3/2$, $\delta \geq 3\mu + AT$

$$\operatorname{mes} E_{\gamma,\delta}(k) \leq$$

$$\leq C_{12}\sqrt{G(k)}\sqrt[3]{\frac{G^{-\gamma}(k)\exp(-\delta G(k))}{\exp(-ATG(k))}} =$$

$$= C_{12}G^{\frac{3-2\gamma}{6}}(k)\exp\left(\frac{AT-\delta}{3}G(k)\right) \leq$$

$$\leq C_{12}G^{-\lambda}(k)\exp(-\mu G(k)), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (29)$$

З нерівності (29) випливає, що ряд $\sum\limits_{|k|\geq 0} \operatorname{mes} E_{\gamma,\delta}(k)$ є збіжним, коли $\gamma \geq 3\lambda + 3/2$, $\delta \geq 3\mu + AT$. За лемою Бореля-Кантеллі [5, с.17] міра Лебега в $\mathbb{R}$ множини тих чисел t_1, які належать до нескінченної кількості множин $E_{\gamma,\delta}(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $\gamma \geq 3\lambda + 3/2$, $\delta \geq 3\mu + AT$, дорівнює нулеві. Теорема доведена.

З теорем 2, 3 випливає наступне твердження про розв'язність задачі (1), (2) для майже всіх чисел $t_1 \in [T_0, T]$.

Теорема 4. *Нехай* $A(t, D) \in S^0(G)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in W_{\alpha+3\lambda+3/2,\beta+3\mu+AT}(G)$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in [T_0, T]$ *існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору* $C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$, *який неперервно залежить від* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

7. Розглянемо частковий випадок задачі (1), (2), коли для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ $A(t,k) = -B'(t,k) - B^2(t,k)$, $t \in [0,T]$, де $B(t,k) \in C^1([0,T];\mathbb{R})$.

Теорема 5. *Якщо для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ $A(t,k) = -B'(t,k) - B^2(t,k)$, *де* $B(t,k) \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, *то задача (1), (2) в класі* $C^2([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G))$ *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Враховуючи теорему 1, досить показати, що виконується умова (12). Легко перевірити, що для функції $f_2(t,k)$ справедливе наступне зображення:

$$f_2(t,k) = \exp(b(t,k)) \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\exp(2b(\tau,k))},$$

$$b(t,k) = \int\limits_0^t B(\tau,k)d\tau. \qquad (30)$$

Очевидно, що функція (30) є додатною при $t \in (0,T]$. Тоді з (23) маємо, що $\dfrac{d\Delta(k,t_1)}{dt_1} > 0$ при $t_1 \in (0,T]$. Оскільки $\Delta(k,t_1)|_{t_1=0} = 0$, то з останньої нерівності випливає, що $\Delta(k,t_1) > 0$ при $t_1 \in (0,T]$.

Теорема 6. *Нехай для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ $A(t,k) = -B'(t,k) - B^2(t,k)$, *де* $B(t,k) \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, *і нехай для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ $\max\limits_{t\in[0,T]} B(t,k) \le bG(k)$, $b \ge 0$, $\min\limits_{t\in[0,T]} B(t,k) \ge 0$. *Тоді для довільного* $t_1 \in [T_0,T]$, *для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$\Delta(k,t_1) \ge \frac{1}{2} T_0^2 (t_1 - T_0)^2 \exp(-bTG(k)). \quad (31)$$

Доведення. Для визначника $\Delta(k,t_1)$ із формул (11), (23) випливає наступне зображення:

$$\Delta(k,t_1) = \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{\xi} u f_2(u,k) du d\xi. \qquad (32)$$

Змінюючи порядок інтегрування у повторному інтегралі у формулі (32), одержимо, що

$$\Delta(k,t_1) = \int\limits_0^{t_1} u f_2(u,k) \int\limits_u^{t_1} d\xi du =$$

$$= \int\limits_0^{t_1} u(t_1 - u) f_2(u,k) du. \qquad (33)$$

Із формули (30) та умов теореми 6 випливає, що для всіх $t \in [T_0, T]$ виконується нерівність

$$f_2(t,k) \ge T_0 \exp(-bTG(k)). \qquad (34)$$

Тому з (33), (34) отримуємо, що при $t_1 \in [T_0, T]$

$$\Delta(k,t_1) \ge \int\limits_{T_0}^{t_1} u(t_1-u) f_2(u,k) du \ge$$

$$\ge T_0^2 \exp(-bTG(k)) \int\limits_{T_0}^{t_1} (t_1 - u) du =$$

$$= \frac{1}{2} T_0^2 (t_1 - T_0)^2 \exp(-bTG(k)).$$

Теорема доведена.

Встановлена оцінка (31) означає, що проблема малих знаменників відсутня у задачі з інтегральними умовами (2) для рівнянь (1), таких, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ $A(t,k) = -B'(t,k) - B^2(t,k)$, де $B(t,k) \in C^1([0,T];\mathbb{R})$, $B(t,k) \ge 0$.

Зауваження 2. Результати роботи можна перенести на випадок задачі з інтегральними умовами вигляду

$$\int\limits_0^{t_1} g_j(t,D) u(t,x) dt = \varphi_j(x), \quad j = 1, 2,$$

де $g_j(t,D) \in S^2(G)$, $j=1,2,$ — такі псевдодиференціальні операції, що їхні символи $g_j(t,k)$, $j=1,2$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язками таких задач Коші:

$$g_j^{''}(t,k) + B(t,k)g_j(t,k) = 0, g_j^{(q-1)}(0,k) = \delta_{j,q},$$

$$j = 1,2, \quad B(t,k) \in C([0,T];\mathbb{R}).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Виленц И.Л.* Классы единственности решения общей краевой задачи в слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН УССР. Сер.А.— 1974.— N 3.— С.195—197.

2. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка, 1984.— 284 с.

3. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.— М.: Наука, 1980.— 288 с.

4. *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з інтегральними умовами для псевдодиференціальних рівнянь // Міжнародн. наук. конф. "Шості Боголюбовські читання" (26—30 серпня 2003 р.). Тези доп.— К.: Ін-т математики НАН України, 2003.— С.150.

5. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.— К.: Наук. думка, 2002.— 416 с.

6. *Симотюк М.М.* Задача з двоточковими умовами для рівнянь з псевдодиференціальними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 2000.— **43**, N 1.— С.29—35.

7. *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 1999.— **42**, N 4.— С.90—95.

8. *Фардигола Л.В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, N 11.— С. 1546—1551.

9. *Фардигола Л.В.* Свойства T-устойчивости интегральной краевой задачи в слое // Теория функций, функц. анализ и их приложения.— 1991.— N 55.— С.78—80.

10. *Фардигола Л.В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика.— 1993.— N 7.— С.51—58.

11. *Штабалюк Л.И.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1984.— 146 с.

Стаття надійшла до редколегії 26.08.2003