УДК 517.51

©2004 р. О.В. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ЕКВІКОМПАКТНІ ПРОСТОРИ

Простір X називатимемо еквікомпактним, якщо замикання довільної відносно псевдокомпактної в X множини є компактною множиною в X. Позначимо через $SC_p(X,Y)$ простір всіх нарізно неперервних відображень $f : X = \prod_{i=1}^{d} X_i \to Y$ з топологією поточкової збіжності. Нехай X — добуток зліченно повних за Чехом просторів $X_1,\dots, X_d$ і Y — метризовний простір. Ми доводимо, що $SC_p(X,Y)$ еквікомпактний. Ми також доводимо, що для кожного T_1-простору X існує деякий еквікомпактний T_1-простір $\mu X \supseteq X$ такий, що $\overline{X} = \mu X$ і кожне неперервне відображення з X у довільний цілком регулярний еквікомпактний простір Y неперервно продовжується на μX

We call a spaces X equicompact if a closure of any relatively pseudocompact subset of X is compact. Denote by $SC_p(X,Y)$ a space of all separately continuous mappings $f : X = \prod_{i=1}^{d} X_i \to Y$ with the poinwise convergent topology. Let X be the product of countable Ĉech complete spaces $X_1,\dots, X_d$ and Y be a metrizable space. We prove that $SC_p(X,Y)$ is equicompact. We also prove that for each T_1-space X there exists an equicompact T_1-space $\mu X \supseteq X$ such that $\overline{X} = \mu X$ and any continuous mapping from X to an completely regular equicompact space Y admits a continuous extention on μX.

1. Поняття еквікомпактного простору. Множину E називатимемо *відносно псевдокомпактною* в топологічному просторі X, якщо кожна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ обмежена на E. Топологічний простір називатимемо *еквікомпактним*, якщо кожна його відносно псевдокомпактна підмножина є відносно компактною.

Твердження 1. *Кожний паракомпакт, зокрема, кожний метризовний простір, є еквікомпактним.*

Доведення. Нехай E — деяка відносно псевдокомпактна підмножина паракомпакту X. Оскільки X нормальний [1, с.445], то замикання $F = \overline{E}$ є псевдокомпактом (навіть зліченно компактним). Крім того, зрозуміло, що F — паракомпакт. Тоді, оскільки в псевдокомпакті кожна локально скінченна система відкритих множин скінченна [1, с.311], то F — компакт.

Твердження 2. *Добуток довільної сім'ї еквікомпактних просторів є еквікомпактним.*

Доведення. Нехай $X = \prod_{s\in S} X_s$, де X_s — еквікомпактні при $s \in S$. Нехай E — відносно псевдокомпактна підмножина X. Тоді її проекції $E_s = \mathrm{pr}_s(E)$ відносно псевдокомпактні в X_s, $s \in S$. Отже, множини $F_s = \overline{E}_s$ компактні. Тоді, за теоремою Тихонова [1, с.217], множина $F = \prod_{s\in S} F_s$ також компактна. Залишилось врахувати, що $E \subseteq F$.

Оскільки повні за Дьєдонне простори — це в точності замкнені підпростори добутків метризовних просторів [1, с.677], а повні за Гьюіттом — це замкнені підпростори $\mathbb{R}^{\aleph}$ [1, с.321], то з попередніх тверджень випливає

Твердження 3. *Повні за Дьєдонне і повні за Гьюіттом простори є еквікомпактними.*

З теореми Гротендіка-Асанова-Величка [2, с.119] випливає, що для довільного зліченно компактного простору X простір $C_p(X)$ буде еквікомпактним. Оскільки число Сусліна $C_p(X)$ завжди зліченне, то повнота за Дьєдонне $C_p(X)$ рівносильна його повноті за Гьюітом [1, с.679], яка, у свою чергу, еквівалентна [2, с.74] тому, що слабка функціональна тіснота X зліченна. Нехай W — простір ординалів $\leq \omega_1$. Оскільки функція $f = \chi_{\{\omega_1\}}$ розривна, а її звуження на кожну зліченну підмножину неперервне, тому функціональна тіснота $t_R(X) = \aleph_1 > \aleph_0$. Отже, $C_p(W)$ — еквікомпактний простір, який не є повним за Дьєдонне.

Твердження 4. *Перетин довільної сім'ї еквікомпактних підпросторів деякого гаусдорфового простору є еквікомпактним.*

Доведення. Нехай X_s, $s \in S$ — еквікомпактні підпростори Y і $X = \bigcap_{s\in S} X_s$. Візьмемо відносно псевдокомпактну в X множину E. Тоді E буде відносно псевдокомпактною, а значить, і відносно компактною в кожному X_s, $s \in S$. Тоді компакт $F = \overline{E} \subseteq X_s$ для $s \in S$. Отже, $F \subseteq X$.

2. Еквікомпактність простору нарізно неперервних функцій. Зараз ми дещо узагальнимо теорему Гротендіка-Асанова-Величка. Нехай $X = \prod_{i=1}^{d} X_i$. Простір нарізно неперервних функцій $f : X \to Y$ наділений топологією поточкової збіжності позначатимемо $SC_p(X, Y)$. Нагадаємо, що простір X називається зліченно повним за Чехом, якщо існує така послідовність відкритих покриттів $\mathcal{U}_n$ простору X, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ для довільної спадної послідовності непорожніх замкнених множин F_n таких, що $F_n \subseteq U_n$ для деякого $U_n \in \mathcal{U}_n$.

Теорема 1. *Нехай X — добуток зліченно повних за Чехом просторів $X_1, \dots, X_d$, а Y — метризовний простір. Тоді простір $SC_p(X, Y)$ еквікомпактний.*

Доведення. Визначимо для кожного індексу $i = 1, \dots, d$ простір Z_i як пряму суму просторів $\{(x_1, \dots, x_{i-1})\} \times X_i \times \{(x_{i+1}, \dots, x_d)\}$, де $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d) \in \prod_{j\neq i} X_j$. Зрозуміло, що Z_i — зліченно повні за Чехом. Оскільки $C(Z_i, Y)$ складається з функцій $f : X \to Y$, які неперервні відносно i-ої змінної, то $SC_p(X, Y) = \bigcap_{i=1}^{d} C_p(Z_i, Y)$. Тому, внаслідок твердження 4, досить перевірити еквікомпактність $C_p(Z_i, Y)$. Отже, досить розглянути випадок $d = 1$.

Таким чином, нехай X — зліченно повний за Чехом. Доведемо, що $C_p(X, Y)$ еквікомпактний. Розглянемо деяку відносно псевдокомпактну в $C_p(X, Y)$ множину E. Тоді E буде такою ж і в ширшому просторі Y^X. Але з тверджень 1 і 2 випливає, що Y^X — еквікомпактний. Тому замикання F множини E у просторі Y^X є компактом. Залишилось довести, що $F \subseteq C_p(X, Y)$. Нехай це не так, і існує функція $f \in F$, яка розривна в деякій точці $x_0 \in X$. Тоді існує така множина $A \subseteq X$, що $x_0 \in \overline{A}$, але $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$. Візьмемо такі відкриті в Y множини G і H, що $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$, але $f(x_0) \in G$ і $f(A) \subseteq H$. Оскільки X зліченно повний за Чехом, то існує така послідовність канонічно замкнених околів U_n точки x_0 що $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ для довільної спадної послідовності непорожніх замкнених множин $F_n \subseteq U_n$. Тоді, зокрема, кожна послідовність точок $x_n \in U_n$ має граничну точку.

Зараз ми індуктивно визначимо послідовність точок $a_n \in A$, функцій $f_n \in E$ і відкритих околів $V_n \subseteq U_n$ точки x_0 такі, що $\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n$, $f_n(V_n) \subseteq G$, а $f_{n+1}(a_i) \in H$ при $i \leq n$ та $a_n \in V_n$.

Оскільки f належить поточковому замиканню E і $f(x_0) \in G$, то існує $f_1 \in E$ така, що $f_1(x_0) \in G$. Нехай $V_1 = f_1^{-1}(G) \cap \mathrm{int} U_1$. Тоді V_1 — відкритий окіл x_0. Але $x_0 \in \overline{A}$. Отже, існує $a_1 \in V_1 \cap A$. Далі, оскільки $f(x_0) \in G$ і $f(a_1) \in H$, то існує $f_2 \in E$ така, що $f_2(x_0) \in G$ і $f_2(a_1) \in H$. Але f_2 неперервна, тому існує відкритий окіл $V_2 \subseteq U_2$ точки x_0 такий, що $\overline{V}_2 \subseteq V_1$ і $f(V_2) \subseteq G$. Візьмемо $a_2 \in V_2 \cap A$. Продовжуючи побудову аналогічним чином, одержимо шукані послідовності.

Оскільки $a_n \in V_n \subseteq U_n$, то за вибором U_n послідовність (a_n) має граничну точку a_∞, причому, оскільки $\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n$, то $a_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Тоді $f_n(a_\infty) \in G$ для кожного n. Вважатимемо $X_0 = \{a_\infty\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Оскільки відображення звуження $\pi : C_p(X, Y) \to C_p(X_0, Y)$ неперервне й послідовність (f_n) відносно псевдокомпактна в $C_p(X, Y)$, то такою ж є послідовність функцій $g_n = \pi(f_n) = f_n|_{X_0}$ в метризовному просторі $C_p(X_0, Y)$. Тому, згідно з твердженням 1, множина $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ відносно компактна в $C_p(X_0, Y)$, зокрема, послідовність (g_n) має граничну точку $g_\infty \in C_p(X_0, Y)$. Оскільки $g_n(a_i) = f_n(a_i) \in H$ при $n > i$, то $g_\infty(a_i) \in \overline{H}$ для довільного i. Отже, за неперервністю, $g_\infty(a_\infty) \in \overline{H}$. З іншого боку, $g_n(a_\infty) = f_n(a_\infty) \in G$ для кожного n, отже, $g_\infty(a_\infty) \in \overline{G}$. А це неможливо, бо $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$.

3. Існування максимального еквікомпактного розширення. Зараз ми, подібно до компактифікації Стоуна-Чеха βX чи розширення Гьюіта-Нахбіна νX, доведемо існування еквікомпактного розширення μX з подібними властивостями. Для топологічного простору X позначатимемо через $T_3(X)$ множину всіх точок $x \in X$, в яких замкнені околи утворюють базу.

Теорема 2. *Нехай X — T_1-простір. Тоді існує еквікомпактний T_1-простір μX, який містить X як усюди щільний підпростір (причому $T_3(X) \subseteq T_3(\mu X)$ і μX цілком регулярний, якщо X цілком регулярний) і для довільного цілком регулярного еквікомпактного простору Y кожне неперервне відображення $f : X \to Y$ має неперервне продовження на весь μX.*

Доведення. Нехай ωX — розширення Волмена [1, с.272] (якщо X — цілком регулярний, то замість ωX слід розглядати компактифікацію Стоуна-Чеха βX). Легко бачити, що $T_3(X) \subseteq T_3(\omega X)$.

Нехай $\mathcal{E}$ — система всіх еквікомпактних підпросторів $E \supseteq X$ простору ωX. Зрозуміло, що $\omega X \in \mathcal{E}$. Нехай $\mu X = \bigcap \mathcal{E}$. З твердження 4.3.5 випливає, що $\mu X \in \mathcal{E}$. Залишилось довести, що виконується властивість продовження. Нехай Y — деякий цілком регулярний еквікомпактний простір і $f : X \to Y \subseteq \beta Y$ неперервне відображення. Внаслідок [1, с.272] існує його неперервне продовження $F : \omega X \to \beta Y$. Перевіримо, що $F(\mu X) \subseteq Y$. Для цього досить довести, що $E = F^{-1}(Y) \in \mathcal{E}$. По-перше, оскільки $F|_X = f$, то $X \subseteq E$. З'ясуємо, що E — еквікомпактний. Нехай A — відносно псевдокомпактна в E множина. Тоді $F(A)$ відносно псевдокомпактна в Y, а значить, і відносно компактна в Y. Отже, $B = \overline{F(A)}$ — компактна підмножина Y. Але F — неперервне і B — замкнена в βY. Тому $F^{-1}(B)$ замкнена в компактному просторі ωX і $A \subseteq F^{-1}(B) \subseteq E$. Отже, A — відносно компактна в E.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

2. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций.— М.: Изд-во Московск. ун-та, 1989.— 222 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004