УДК 517.51

©2004 р. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ТОЧКОВА РОЗРИВНІСТЬ K_hK-ФУНКЦІЙ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В σ-МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

Доведені теореми про точкову розривність відображень із класу K_hK зі значеннями в σ-метризовних просторах.

The theorems on pointwise discontinuity of K_hK-mappings with values in σ-metrizable spaces are proved.

1. У праці [1] були встановлені теореми про сукупну неперервність K_hC-функцій зі значеннями в σ-метризовних і сильно σ-метризовних просторах, які розвивають результати праці [2] і попередньо були анонсовані в [3]. В [4] була доведена теорема про квазінеперервність K_hK-функцій зі значенням у метризовному просторі. Вона узагальнює один результат Н.Мартіна [5] і сама у свою чергу допускає покращення, що було подане в [6, теорема 3.6.1]. Цей останній результат формулюється так:

Теорема 1. *Нехай X – берівський простір, Y – топологічний простір зі зліченною псевдобазою, Z – метризовний простір і $f \in K_hK(X \times Y, Z)$. Тоді f – квазінеперервне відображення.*

Доведення є нескладною модифікацією доведення відповідної теореми з [4].

Виникає природне запитання: чи переноситься теорема 1 на випадок σ-метризовного простору Z? Основний результат цієї замітки виник у результаті спроб відповісти на поставлене запитання, яке поки що залишилось без відповіді. Для σ-метризовного простору Z при виконанні інших умов теореми 1 вдалося встановити лише точкову розривність відображення f.

2. Нагадаємо означення основних понять.

Нехай X і Y — топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *квазінеперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y і для кожного околу U точки x_0 в X існують точка $x_1 \in U$ і її окіл U_1 в X такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Нехай Z — ще один топологічний простір. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для будь-яких околів W, U і V відповідно точок $z_0 = f(p_0)$, x_0 і y_0 у просторах Z, X і Y існують точка $x_1 \in U$, її окіл U_1 в X і точка $y_1 \in V$ такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. Кажуть, що відображення f *квазінеперервне* чи *горизонтально квазінеперервне*, якщо воно є таким у кожній точці відповідного простору. Сукупність горизонтально квазінеперервних відображень $f : X \times Y \to Z$, які квазінеперервні відносно другої змінної, позначається символом $K_hK(X \times Y, Z)$, а самі такі відображення називаються *K_hK-функціями.*

Як правило, символами $C(f)$ і $D(f)$ позначаються відповідно множини точок неперервності й розриву відображення f. Неперервність відображення, заданого на добутку двох просторів, означає його сукупну неперервність.

Топологічний простір Z називається *σ-метризовним*, якщо його можна подати у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_n, яка називається *вичерпуванням σ-метризовного простору Z.*

Топологічний простір X називається *берівським*, якщо кожна відкрита непорожня множина в X є множиною другої категорії. Відомо, що простір X буде берівським тоді й тільки тоді, коли для кожної послідовності замкнених множин F_n в X, яка покриває простір X, відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} intF_n$ всюди щільна в X.

Система $\mathcal{V}$ відкритих множин простору Y називається *псевдобазою*, якщо кожна відкрита непорожня множина H в Y містить деяку непорожню множину $V \in \mathcal{V}$. Відомо, що добуток берівського простору X і берівського простору Y зі зліченною псевдобазою є берівським простором.

Відображення $f : X \to Y$ буде квазінеперервним тоді й тільки тоді, коли для кожної відкритої в X множини G і кожної підмножини A в X з умови $G \subseteq \overline{A}$ випливає, що $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$.

Відображення $f : X \to Y$ називається *трохи розривним* [7], якщо $D(f)$ — множина першої категорії, і *точково розривним*, якщо $\overline{C(f)} = X$. Якщо простір X берівський, то кожне трохи розривне відображення $f : X \to Y$ буде точково розривним.

3. Добре відомо, що кожне квазінеперервне відображення зі значеннями в метризовному просторі трохи розривне. Зараз ми перенесемо цей результат на відображення зі значеннями у σ-метризовних просторах.

Теорема 2. *Нехай Y — топологічний простір, Z — σ-метризовний простір і $g : Y \to Z$ — квазінеперервне відображення. Тоді:*

а) якщо Y — берівський простір і $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ — вичерпування простору Z, то для кожної непорожньої відкритої в Y множини U існують непорожня відкрита в Y множина V і номер m такі, що $V \subseteq U$ і $g(V) \subseteq Z_m$;

б) g — трохи розривне відображення.

Доведення. а) Нехай $Y_n = g^{-1}(Z_n)$, $F_n = \overline{Y_n}$ і $G_n = intF_n$. Оскільки $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n$, то $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. З беровості простору Y випливає, що відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ всюди щільна в Y. Нехай U — відкрита непорожня множина в просторі Y. Тоді $U \cap G \neq \emptyset$, отже, існує такий номер m, що $V = U \cap G_m \neq \emptyset$. Оскільки множина V відкрита і $V \subseteq F_m = \overline{Y_m}$, то з квазінеперервності g випливає, що

$$g(V) \subseteq \overline{g(Y_m)} \subseteq \overline{Z_m} = Z_m,$$

адже підпростір Z_m замкнений у Z.

б) Для вищевведених відкритих множин G_n будемо мати $G_n \subseteq Y_n$. Тому

$$g(G_n) \subseteq \overline{g(Y_n)} \subseteq \overline{Z_n} = Z_n.$$

Звуження $g_n = g|_{G_n}$ відображає підпростір G_n у підпростір Z_n. Воно залишається квазінеперервним, оскільки множина G_n відкрита в Y. Оскільки підпростір Z_n метризовний, то відображення $g_n : G_n \to Z_n$ трохи розривне, тобто $D(g_n)$ — множина першої категорії в G_n, а значить, і в Y.

Зауважимо, що множина $F_n \setminus G_n$ ніде не щільна для кожного n як межа замкненої множини. Але $Y \setminus G \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus G_n)$, отже, доповнення $Y \setminus G$ — це множина першої категорії. Зрозуміло, що

$$D(g) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} D(g_n)) \cup (D(g) \cap (Y \setminus G)).$$

Звідси випливає, що $D(g)$ — множина першої категорії.

4. Перейдемо до розгляду основного результату. Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$, як звичайно, вважатимемо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — топологічний простір зі зліченною псевдобазою, Z — σ-метризовний простір і $f \in K_hK(X \times Y, Z)$. Тоді:*

а) f — трохи розривне відображення;

б) якщо X і Y — берівські простори, то f — точково розривне.

Доведення. а) Спочатку припустимо, що X і Y — берівські простори. Нехай $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \mathbf{N}\}$ — псевдобаза в Y і $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$ — вичерпування простору Z. Нехай

$$A_{m,n} = \{x \in X : f^x(V_n) \subseteq Z_m\}$$

$U_{m,n}=int\overline{A_{m,n}}$, $O_{m,n}=U_{m,n}\times V_n$, $O=\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty}O_{m,n}$. Покажемо, що $\overline{O}=X\times Y$. Нехай U і V — відкриті непорожні множини в просторах X і Y відповідно і $W=U\times V$. Припустимо, що $I=\{n\in\mathbf{N}:\emptyset\neq V_n\subseteq V\}$ і доведемо, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\in I}A_{m,n}=X$. Нехай $x\in X$. Розглянемо множини $B_m(x)=(f^x)^{-1}(Z_m)$, $H_m(x)=int\overline{B_m(x)}$ і $H(x)=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}H_m(x)$. Оскільки $Z=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}Z_m$, то $Y=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}B_m(x)$. Звідси на основі беровості простору Y ми робимо висновок, що відкрита множина $H(x)$ всюди щільна в Y. Тоді ясно, що $V\cap H(x)\neq\emptyset$. У такому разі існує такий номер m, що $V\cap H_m(x)\neq\emptyset$. У відкритій непорожній множині $V\cap H_m(x)$ обов'язково міститься якийсь непорожній елемент із псевдобази $\mathcal{V}$, тобто існує такий номер n, що $\emptyset\neq V_n\subseteq V\cap H_m(x)$. Тоді $n\in I$, причому $V_n\subseteq\overline{B_m(x)}$. Нехай $B=B_m(x)$. Зрозуміло, що $V_n\subseteq\overline{B}$ і $f^x(B)\subseteq Z_m$. Тоді на основі квазінеперервності відображення f^x і замкнености Z_m будемо мати $f^x(V_n)\subseteq\overline{f^x(B)}\subseteq\overline{Z_m}=Z_m$. Таким чином, $x\in A_{m,n}$, де $m\in\mathbf{N}$, $n\in I$, що й доводить потрібну рівність, оскільки включення в обернений бік очевидне. З доведеної рівності й беровості простору X випливає, що відкрита множина $G=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n\in I}U_{m,n}$ всюди щільна в X, отже, $G\cap U\neq\emptyset$. Тому існують такі номери $m\in\mathbf{N}$ та $n\in I$, що $U_{m,n}\cap U\neq\emptyset$. Оскільки $n\in I$, то $\emptyset\neq V_n\subseteq V$. Тому $W\cap O_{m,n}\supseteq(U\cap U_{m,n})\times(V\cap V_n)=(U\cap U_{m,n})\times V_n\neq\emptyset$, отже, $W\cap O\neq\emptyset$ і рівність $\overline{O}=X\times Y$ доведено.

Оскільки $U_{m,n}\subseteq\overline{A_{m,n}}$ і $f(A_{m,n}\times V_n)\subseteq Z_m$, то на основі горизонтальної квазінеперервності f і леми 2 з [1] $f(O_{m,n})\subseteq\overline{f(A_{m,n}\times V_n)}\subseteq\overline{Z_m}=Z_m$. Розглянемо звуження $g_{m,n}=f|_{O_{m,n}}$. Оскільки $f(O_{m,n})\subseteq Z_m$ і множини $U_{m,n}$ і V_n відкриті, то $g_{m,n}\in K_hK(O_{m,n},Z_m)$. Простір Z_m метризовний, тому з теореми 1 випливає, що відображення $g_{m,n}$ квазінеперервне, а значить, трохи розривне. Таким чином, множина $D(g_{m,n})$ його точок розриву є множиною першої категорії в $O_{m,n}$, а значить, і в $X\times Y$. Оскільки множина $E=(X\times Y)\setminus O$ ніде не щільна в $X\times Y$ і $D(f)=\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty}D(g_{m,n})\cup(E\cap D(f))$, то $D(f)$ — множина першої категорії в $X\times Y$, тобто f трохи розривне.

У загальному випадку ми діємо так само, як і в [1] при доведенні теореми 2, використовуючи теорему Банаха про категорію.

б) Для берівських просторів X і Y добуток $X\times Y$ теж буде берівським, адже Y має зліченну псевдобазу. Тому відображення f буде точково розривним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Шишина О.І.* Горизонтально квазінеперервні відображення зі значеннями в σ-метризовних просторах // Мат. методи і фіз.-мех. поля.— 2002.— **45**, N 1.— C.42—46.

2. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні функції багатьох змінних зі значеннями в σ-метризовних просторах // Нелінійні коливання.— 1999.— **2**, N 3.— C.337—344.

3. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Шишина О.І.* Горизонтально квазінеперервні відображення зі значеннями в σ-метризовних просторах // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання. Тези доп. Міжнар. конф. 27-29 серпня 2001 р.— Київ, 2001.— C.105—106.

4. *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Сукупна неперервність і квазінеперервність горизонтально квазінеперервних відображень // Укр. мат. журн.— 2000.— **52**, N 12.— C.1711—1714.

5. *Martin N.F.G.* Quasi-continuous functions on product spaces // Duke Math. J.— 1961.— **28**.— P.30—44.

6. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук.— Чернівці, 1999.— 345 с.

7. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В.* Точкова розривність функцій багатьох змінних // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— C.70—75.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004 р.