УДК 517.51

©2004 р. В.К. Маслюченко, В.В. Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО МНОЖИНИ ТОЧОК МАЙЖЕ НЕПЕРЕРВНОСТІ ТА ІНШІ ПОСЛАБЛЕННЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ

Дано опис множини точок майже неперервності, ледь неперервності і майже квазінеперервності.

It is characterized sets of the almost continuity, the nearly continuity and almost quasicontinuity.

1. Добре відомо, що множина точок неперервності будь-якого відображення із значеннями в метризовному просторі є множиною типу G_δ. Тип і опис множин точок неперервності, квазінеперервності, кліковості і ледь неперервності відображень досліджувався у працях [1-3].

У даній статті буде дано опис множини точок майже неперервності, ледь неперервності і майже квазінеперервності. Нехай X та Y — топологічні простори, $f : X \to Y$ — відображення і $x_0 \in X$. Відображення f називається майже неперервним у точці $x_0 \in X$, якщо для будь-якого околу V точки y_0 в Y існує множина A в X така, що $\overline{A}$ — окіл точки x_0 в X і $f(A) \subseteq V$. Відображення f називається майже квазінеперервним у точці $x_0 \in X$, якщо для будь-яких околів V і U точок y_0 і x_0 відповідно в Y та X існує множина A в X така, що $int\overline{A}$ — непорожня в X, $A \subseteq U$ і $f(A) \subseteq V$. Відображення f називається ледь неперервним у точці $x_0 \in X$, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y існує відкрита непорожня множина U в X така, що $f(U) \subseteq V$. Якщо відображення f є майже неперервним, майже квазінеперервним чи ледь неперервним у кожній точці $x \in X$, то відображення f називається майже неперервним, майже квазінеперервним чи ледь неперервним відповідно.

2. **Теорема 1.** *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний сепарабельний простір і $f : X \to Y$ — відображення. Тоді множина точок майже неперервності є залишковою множиною.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Нехай множина точок майже неперервності не є залишковою, тобто множина M точок, в яких f не є майже неперервною, є множиною другої категорії. Зафіксуємо метрику $|\cdot - \cdot|$ в просторі Y, яка породжує його топологію. Символом $\mathcal{U}_x$ позначимо множину всіх околів точки x в просторі X, а символом $\mathcal{T}^*(E)$ — систему всіх непорожніх відкритих в X множин, які містяться в множині E.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ вважатимемо

$A_n = \{x \in M : (\forall U \in \mathcal{U}_x)(\exists H \in \mathcal{T}^*(U))(\forall u \in H)(|f(u) - f(x)| \geq \frac{1}{n})\}$. Легко бачити, що $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Оскільки множина M другої категорії, то існує номер n_0 такий, що A_{n_0} — множина другої категорії.

У просторі Y для кожного $\varepsilon > 0$ існує зліченна ε-сітка. Візьмемо таку сітку $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ для $\varepsilon = \frac{1}{3n_0}$. Нехай $V_\varepsilon(y_0) = \{y \in Y : |y - y_0| < \varepsilon\}$. Кулі $V_i = V_{\frac{1}{3n_0}}(y_i)$, $i = 1, 2, ...$ покривають простір Y. Для множин $E_i = A_{n_0} \cap f^{-1}(V_i), i = 1, 2, ...$, маємо $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = A_{n_0}$. Тому існує такий номер i_0, що множина $E = E_{i_0}$ є другої категорії. Зрозуміло, що $|f(x') - f(x'')| \leq \frac{2}{3n_0} < \frac{1}{n_0}$ для будь-яких $x', x'' \in E$.

Через те, що E — множина другої категорії, існує відкрита непорожня множина G в X така, що $G \subseteq \overline{E}$. Візьмемо точку $x_0 \in G \cap E$. Оскільки $x_0 \in E$, а $E \subseteq A_{n_0}$, то існує відкрита непорожня множина H в X така, що $H \subseteq G$ і для кожної точки $u \in H$ маємо $|f(x_0) - f(u)| \geq \frac{1}{n_0}$. Але $G \subseteq \overline{E}$, отже, існує точка $x_1 \in H \cap E$. Тоді $|f(x_0) - f(x_1)| < \frac{1}{n_0}$, адже $x_0, x_1 \in E$, що приводить до суперечності. Отже, множина точок майже неперервності є залишковою множиною.

Доведемо обернену теорему.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — гаусдорфовий топологічний простір із збіжною послідовністю різних точок, A — залишкова множина в X. Тоді існує відображення $f : X \to Y$ таке, що множина його точок майже неперервності — це множина A.*

Доведення. Візьмемо точку $a \in Y$ і послідовність (a_n) в Y такі, що $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $a_i \neq a$, для довільних $i, j \in \mathbb{N}$ і $a_n \to a$ при $n \to \infty$. Оскільки множина A залишкова в X, то існує диз'юнктна послідовність ніде не щільних в X множин A_n така, що $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Нехай $f(x) = a$, якщо $x \in A$ і $f(x) = a_n$, якщо $x \in A_n$.

Нехай $x_0 \in A$. Тоді $f(x_0) = a$. Візьмемо довільний окіл V точки a в Y. Оскільки послідовність (a_n) збігається до a, то поза околом V є лише скінченна кількість елементів послідовності (a_n). Таким чином, $f^{-1}(V)$ є всюди щільною множиною в X, бо доповнення до $f^{-1}(V)$ будучи скінченним об'єднанням тих множин A_n, що $a_n \notin V$, є ніде не щільною множиною. Отже, f є майже неперервним у точці x_0.

Нехай $x_0 \notin A$. Тоді існує номер n_0 такий, що $x_0 \in A_{n_0}$ і $f(x_0) = a_{n_0}$. Оскільки $a \neq a_{n_0} \neq a$, то існують околи V точки a і V_0 точки a_{n_0} в Y такі, що $V \cap V_0 = \emptyset$. Через те, що $a_n \to a$ при $n \to \infty$, існує номер N такий, що для всіх $n > N$ маємо $a_n \in V$. Оскільки $a_{n_0} \neq a_n$ для $n \neq n_0$, то існують околи V_n точки a_{n_0} такі, що $a_n \notin V_n$. Зрозуміло, що $G = V_0 \cap (\bigcap\limits_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{N} V_n)$ є околом точки a_{n_0} і $a_n \notin G$ для $n \neq n_0$. Тому $f^{-1}(G) = A_{n_0}$ — ніде не щільна множина. Отже, відображення f не є майже неперервним у точці x_0.

Наступний приклад показує, що умова сепарабельності на простір Y в теоремі 1 є істотною.

Приклад. Нехай T - система всіх непорожніх підмножин натурального ряду і $e_\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - характеристична функція множини $\tau \in T$. Добре відомо, що існує бієкція $x \to \tau_x$ числової прямої $\mathbb{R}$ на множину T. Позначимо через V_τ кулю радіуса $\frac{1}{3}$ з центром у точці e_τ в банаховому просторі l_∞. Розглянемо відображення $f : \mathbb{R} \to l_\infty$, яке діє за правилом $f(x) = e_{\tau_x}$. Тоді для кожного $x \in \mathbb{R}$ маємо $f^{-1}(V_{\tau_x}) = \{x\}$. Оскільки одноточкова множина в просторі $\mathbb{R}$ є ніде не щільною множиною, то відображення f не є майже неперервним у жодній точці $x \in \mathbb{R}$.

3. У [3] було показано, що множина точок ледь майже неперервності будь-якого відображення із значеннями в просторі, що задовольняє другу аксіому зліченності, є залишковою. Аналогічними міркуваннями, як і в [3], ми покажемо, що і множина точок майже квазінеперервності є залишковою.

Теорема 3. *Нехай X і Y — топологічні простори, що задовольняють другу аксіому зліченності і $f : X \to Y$ — довільне відображення. Тоді множина S всіх тих точок $x \in X$, в яких f майже квазінеперервне, є залишковою в X.*

Доведення. Покажемо, що доповнення $A = X \setminus S$ є множиною першої категорії в X. Нехай $\mathcal{U}$ і $\mathcal{V}$ — не більш ніж зліченні бази відкритих непорожніх множин в X і Y відповідно. Для кожної точки $x \in A$ існують множини $U_x \in \mathcal{U}$ і $V_x \in \mathcal{V}$ такі, що $x \in A_x = U_x \cap f^{-1}(V_x)$ і множина A_x ніде не щільна в X. Система

$$\mathcal{W} = \{U_x \times V_x : x \in A\}$$

не більш ніж зліченна і для кожного $W = U_x \times V_x \in \mathcal{W}$ множина $A(W) = A_x = U_x \cap f^{-1}(V_x)$ ніде не щільна в X. При цьому

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} A_x = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} A(W).$$

Тому A є множиною першої категорії.

4. **Лема.** *Нехай X і Y - топологічні простори, відображення $f : X \to Y$ ледь неперервне в точці $a \in X$ і $f(a) = f(b)$, де $b \in X$. Тоді відображення f є ледь неперервним у точці b.*

Доведення. Візьмемо довільний окіл V точки $f(b)$ в Y. Оскільки $f(b) = f(a)$ і відображення f ледь неперервне в точці a, то існує відкрита непорожня множина U в X така, що $f(U) \subseteq V$. Це означає, що f ледь неперервне в точці b.

Теорема 4. *Нехай A — довільна підмножина числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді існує відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таке, що A є множиною точок ледь неперевності f.*

Доведення. Прикладом відображення, в якого множина точок ледь неперервності є порожньою, є функція Діріхле.

Візьмемо довільну непорожню множину A в $\mathbb{R}$ і точку $a \in A$. Побудуємо шукане відображення так: нехай $f(x) = 0$, якщо $x \in A$, $f(x) = x - a$, якщо $x \in ((\mathbb{Q} \cap (a, +\infty)) \cup ((-\infty, a) \setminus \mathbb{Q})) \setminus A$ і $f(x) = a - x$, якщо $x \in ((\mathbb{Q} \cap (-\infty, a)) \cup ((a, +\infty) \setminus \mathbb{Q})) \setminus A$.

Спочатку покажемо, що відображення f є ледь неперервним у точці a. Зрозуміло, що $f(a) = 0$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Тоді для всіх x, які задовольняють умову $|x - a| < \varepsilon$, маємо, $|f(x)| < \varepsilon$. Це означає, що відображення f є навіть неперервним у точці a. Згідно з лемою відображення f є ледь неперервним у кожній точці з множини A.

Візьмемо $x_0 \notin A$. Нехай спочатку $x_0 \in \mathbb{Q}$. Легко бачити, що тоді $y_0 = f(x_0) > 0$. Візьмемо $0 < \varepsilon < y_0$ і вважатимемо, що $V_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \varepsilon\}$. Зрозуміло, що кожна точка з V_ε більша за нуль. Оскільки множина ірраціональних точок числової прямої є всюди щільною в $\mathbb{R}$ і відображення f в ірраціональних точках набуває недодатних значень, то не існує відкритої множини в $\mathbb{R}$, образ якої при відображенні містився би в околі V_ε. Аналогічні міркування проводяться і для $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Таким чином, відображення f не є ледь неперервним для $x \notin A$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Borsík J.* Points of continuity, quasicontinuity and cliquishness // Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 26.— 1994.— 1-2, P.5—20.

2. *Ewert J., Lipinski J.* On points of continuity, quasi-continuity and cliquishness of real functions // Real. Anal. Exech.— 1983.— 8.— P.473—478.

3. *Вітренко О.В., Маслюченко В.К.* Про нарізно ледь неперевні функції // Мат. Студії.— 1996.— 6.— С.113—118.

Стаття надійшла до редколегії 26.11.2003