УДК 517:519

©2004 р. П.В. Марко

Інститут регіонального управління і економіки, Кіровоград

СИМЕТРІЙНА РЕДУКЦІЯ СИСТЕМИ $\nabla u_i = F_i(u_1, u_2)$, $i = 1, 2$ ДО СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Проведена симетрійна редукція системи $\nabla u_i = F_i(u_1, u_2)$, $i = 1, 2$, до системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) за підгрупами розширеної групи Пуанкаре. Отримано по 29 систем ЗДР для кожного зі знайдених раніше зображень оператора дилатації D.

The symmetry reduction of the system $\nabla u_i = F_i(u_1, u_2)$, $i = 1, 2$, to the system of the ordinary differential equations (ODE) about the subgroups of the extended Poincare group is carried. The 29 systems of the ODE for each of the 5 earlier discovered representations of the dilatation operator D were obtained.

Математик грає в гру, в якій він сам винаходить правила, в той час коли фізик грає в гру, правила якої пропонує Природа, однак із плином часу стає все очевиднішим, що правила гри, які математик вважає цікавими, збігаються з тими, які обрала Природа [1].

В очах фізиків-теоретиків перевагу має така галузь математики, яка має у своїй основі цікаву групу перетворень. Значення перетворень фундаментальніше, ніж значення рівнянь.

Лінійні перетворення, які зберігають метрику Мінковського $dx_\mu dx^\mu$, утворюють 10-параметричну групу Пуанкаре $P(1,3)$ з генераторами

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad I_{\mu\nu} = q_{\mu\alpha} x_\alpha \partial_\nu - q_{\nu\alpha} x_\alpha \partial_\mu, \qquad (1)$$

де $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $q_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$, $\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3$.

Скрізь мається на увазі сумування від 0 до 3 за повтореними індексами.

$P(1,3)$ задана комутаційними співвідношеннями (КС)

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0, \quad [P_\alpha, I_{\beta\gamma}] = q_{\alpha\beta} P_\gamma - q_{\alpha\gamma} P_\beta, \qquad (2)$$

$$[I_{\alpha\beta}, I_{\mu\nu}] = q_{\alpha\nu} I_{\beta\mu} + q_{\beta\mu} I_{\alpha\nu} - q_{\alpha\mu} I_{\beta\nu} - q_{\beta\nu} I_{\alpha\mu}.$$

Вона є максимальною локальною групою симетрії нелінійного хвильового рівняння

$$\nabla u \equiv u_{x_0 x_0} - \Delta_3 u = F(u) \qquad (3)$$

з довільною гладкою функцією $F(u)$.

У праці [2] дано повне вирішення симетрійної класифікації системи двох дійсних рівнянь

$$\nabla u_j = F_j(u_1, u_2), \quad j = 1, 2, \qquad (4)$$

що допускають розширену оператором дилатації D групу Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, задану КС (3) і

$$[D, I_{\alpha\beta}] = 0, \quad [P_\alpha, D] = P_\alpha, \quad \alpha, \beta = \overline{0,3}, \qquad (5)$$

та конформну групу $C(1,3)$. Класифікація проведена з точністю до лінійних перетворень залежних змінних

$$u_j \to u_j' = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{jk} u_k + \beta_j, \quad j = 1, 2, \qquad (6)$$

де α_{jk}, β_j, $j = 1, 2$ — довільні константи і

$$\det \|\alpha_{jk}\| \neq 0.$$

Теорема 1 [2]. *Система рівнянь у частинних похідних (РЧП) (4) інваріантна щодо розширеної групи Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ тоді й тільки тоді, коли еквівалентна одній із наступних систем (для всіх випадків $F_j = F_j(\omega)$, $j = 1, 2$):*

1. $\nabla u_1 = F_1 u_1^{\frac{b-2}{b}}$, $\nabla u_2 = F_2 u_1^{\frac{a-2}{b}}$, $\omega = u_1^a u_2^{-b}$, $b \neq 0$;

2. $\nabla u_1 = \left\{F_1 + \dfrac{u_1}{u_2}F_2\right\}\exp\left((a-2)\dfrac{u_1}{u_2}\right)$, $\nabla u_2 = F_2\exp\left((a-2)\dfrac{u_1}{u_2}\right)$, $\omega = a\dfrac{u_1}{u_2} - \ln u_2$;

3. $\nabla u_1 = F_1\exp\left(\dfrac{a-2}{b}u_2\right)$, $\nabla u_2 = F_2\exp\left(-\dfrac{2}{b}u_2\right)$, $\omega = au_2 - b\ln u_1$, $b \neq 0$;

4. $\nabla u_1 = \exp\left(\dfrac{-2}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{u_1}{u_2}\right)\{u_2F_1 + u_1F_2\}$,

$$\nabla u_2 = \exp\left(\frac{-2}{b}\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}\right)\{u_2F_2 - u_1F_1\}, \quad (7)$$

$$\omega = b\ln(u_1^2+u_2^2) - 2a\operatorname{arctg}\frac{u_1}{u_2}, \quad b \neq 0;$$

5. $\nabla u_1 = \{F_1 + u_2F_2\}\exp\left(-\dfrac{2}{b}u_2\right)$, $\nabla u_2 = b\exp\left(-\dfrac{2}{b}u_2\right)F_2$, $\omega = 2bu_1 - u_2^2$, $b \neq 0$;

6. $\nabla u_1 = 0$, $\nabla u_2 = 0$, *де* F_1, F_2 *— довільні гладкі функції;* a, b *— довільні константи,* $b \neq 0$.

Суттєво, що базисні генератори P_μ, $I_{\mu\nu}$ даються формулами (1), а генератори відповідних груп масштабних перетворень даються наступними формулами:

$$D_1 = x_\mu\partial_\mu + bu_1\partial_{u_1} + au_2\partial_{u_2};$$

$$D_2 = x_\mu\partial_\mu + a(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + u_2\partial_{u_1};$$

$$D_3 = x_\mu\partial_\mu + au_1\partial_{u_1} + b\partial_{u_2}; \quad (8)$$

$$D_4 = x_\mu\partial_\mu + a(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + b(u_2\partial_{u_1} - u_1\partial_{u_2});$$

$$D_5 = x_\mu\partial_\mu + u_2\partial_{u_1} + b\partial_{u_2};$$

$$D_6 = x_\mu\partial_\mu;$$

всюди $b \neq 0$.

Як добре відомо, знання симетрії системи РЧП дозволяє звести її до системи ЗДР. Оскільки всі зв'язні підгрупи розширеної групи Пуанкаре відомі [3], можна скористатися ними для редукції та побудови інваріантних розв'язків.

Ефективний алгоритм симетрійної редукції хвильового рівняння $\nabla u = F(u)$ описаний у працях [4—7].

Як відомо, $I(,u)$ — інваріант оператора

$$X = \xi^i(x,u)\partial_i + \eta^l(x,u)\partial_{u_l},$$
$$i = \overline{1,n}, \quad l = \overline{1,k},$$

якщо

$$\xi^i(x,u)\frac{\partial I(x,u)}{\partial x_i} + \eta_l(x,u)\frac{\partial I(x,u)}{\partial u_l} = 0.$$

Наведене рівняння еквівалентне системі Ейлера-Лагранжа

$$\frac{dx_1}{\xi^1(x,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi^n(x,u)} =$$

$$= \frac{du_1}{\eta^1(x,u)} = \ldots = \frac{du_k}{\eta^k(x,u)}.$$

Тепер, якщо

$$I_1(x,u) = C_1, \ldots, I_{n+k-1}(x,u) = C_{n+k-1}$$

— незалежні перші інтеграли системи, то $I(x,u) = F(I_1, \ldots, I_{n+k-1})$ — інваріант.

Тут ми пропонуємо розв'язання задачі редукції системи (4) до системи ЗДР, з урахуванням результатів праці [2].

Теорема 2. *Системи ДРЧП (1)—(5) зводяться до наступних систем ЗДР:*

1. $\ddot{\varphi}_1 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_1(f_2 + 2bf_4) + \varphi_1(b(b-1)f_3 + bf_5) = F_1(\omega_0)\cdot\varphi_1^{\frac{b-2}{b}}$; $\ddot{\varphi}_2 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_2(f_2 + 2af_4) + \varphi_2(a(a-1)f_3 + af_5) = F_2(\omega_0)\cdot\varphi_1^{\frac{a-2}{b}}$; $\omega_0 = \dfrac{\varphi_2^b}{\varphi_1^a}$;

2. $\varphi_1 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_1(f_2 + 2af_4) + a\varphi_1\{(a-1)f_3 + f_5\} + 2\dot{\varphi}_2f_4 + \varphi_2\{(2a-1)f_3 + f_5\} = \{F_1(\omega_0) + \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}F_2(\omega_0)\}\cdot e^{(a-2)\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}$; $\ddot{\varphi}_2 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_2(f_2 + 2af_4) + a\varphi_2\{(a-1)f_3 + f_5\} = F_2(\omega_0)\cdot e^{(a-2)\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}$; $\omega_0 = \varphi_2 e^{-a\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}$;

3. $\ddot{\varphi}_1 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_1(f_2 + 2af_4) + a\varphi_1\{(a-1)f_3 + f_5\} = F_1(\omega_0)\cdot e^{\frac{a-2}{b}\varphi_2}$; $\ddot{\varphi}_2 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_2 f_2 + b(f_5 - f_3) = F_2(\omega_0)\cdot e^{-\frac{2}{b}\varphi_2}$;

$$\omega_0 = \varphi_1 e^{-\frac{a}{b}\varphi_2}; \quad (9)$$

4. $\ddot{\varphi}_1 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_1(f_2 + 2af_4) + \varphi_1(af_5 + (a(a-1) - b^2)f_3 + 2\dot{\varphi}_2bf_4 + b\varphi_2(f_5 + (2a-1)f_3) = (F_1(\omega_0)\varphi_2 + F_2(\omega_0)\varphi_1)\cdot e^{-\frac{2}{b}\operatorname{arctg}\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}$; $\ddot{\varphi}_2 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_2(f_2 + 2af_4) + \varphi_2(af_5 + (a(a-

$1) - b^2)f_3) - 2\dot{\varphi}_1 b f_4 - b\varphi_1(f_5 + (2a-1)f_3) = \{\varphi_2 F_2(\omega_0) - \varphi_1 F_1(\omega_0)\} \cdot e^{-\frac{2}{b}\operatorname{arctg}\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}$; $\omega_0^2 = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)e^{-\frac{2a}{b}\operatorname{arctg}\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}$;

5. $\ddot{\varphi}_1 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_1 f_2 + 2\dot{\varphi}_2 f_4 + \varphi_2(f_5 - f_3) + b f_3 = e^{-\frac{2}{b}\varphi_2}\{F_1(\omega_0) + \dfrac{\varphi_2}{b}F_2(\omega_0)\}$; $\ddot{\varphi}_2 \cdot f_1 + \dot{\varphi}_2 f_2 + b(f_5 - f_3) = e^{-\frac{2}{b}\varphi_2} \cdot F_2(\omega_0)$; $\omega_0 = \varphi_1 - \dfrac{\varphi_2^2}{2b}$, *причому заміни змінних задаються формулами:*

1.

$$u_1 = \varphi_1(\omega)A^b; \quad u_2 = \varphi_2(\omega)A^a;$$

2.

$$u_1 = (\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)\ln A)A^a;$$

$$u_2 = \varphi_2(\omega)A^a;$$

3.

$$u_1 = \varphi_1(\omega)A^a; \quad u_2 = \varphi_2(\omega) + b\ln A;$$

4.

$$u_1 = \varphi_1(\omega)A^a \cos\ln A^b + \varphi_2(\omega)A^a \sin\ln A^b;$$

$$u_2 = \varphi_2(\omega)A^a \cos\ln A^b - \varphi_1(\omega)A^a \sin\ln A^b;$$

5.

$$u_1 = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)\ln A + \frac{b}{2}\ln^2 A;$$

$$u_2 = \varphi_2(\omega) + \ln A^b,$$

де $b \neq 0$, a *— довільні сталі;*

$$f_1 = \omega_\mu \omega_\mu A^2; \quad f_2 = \nabla\omega A^2;$$

$$f_3 = A_\mu A_\mu; \quad f_4 = \omega_\mu A_\mu A;$$

$$f_5 = A\nabla A;$$

ω *— інваріант деякої підалгебри розширеної алгебри Пуанкаре* $\tilde{A}(1,3) = < AP(1,3), D >$; A *— вираз, що входить до іншого інваріанта тієї ж підалгебри.*

Перелічені вирази зібрані в таблиці 1.

Позначення мають такий зміст:

$$G1 \equiv I_{0i} - I_{i3}, \quad i = 1, 2;$$

$$I_{\mu\nu} = {}_\mu\partial^\nu - {}_\nu\partial^\mu, \quad \mu = \overline{0,3},$$

тобто

$$I_{12} = {}_1\partial_2 - {}_2\partial_1; \quad I_{13} = {}_1\partial_3 - {}_3\partial_1;$$

$$I_{23} = {}_2\partial_3 - {}_3\partial_2;$$

$$-I_{01} = {}_0\partial_1 + {}_1\partial_0; \quad -I_{02} = {}_0\partial_2 + {}_2\partial_0;$$

$$-I_{03} = {}_0\partial_3 + {}_3\partial_0.$$

Теорема доводиться простою перевіркою.

Примітка. Наведемо для однієї з підалгебр таблиці та одного зі вказаних у теоремі 1 зображень оператора дилатації D процес пошуку підстановки, яка редукує систему (5) до системи ЗДР.

Розглянемо тривимірну підалгебру A_1, утворену операторами $< D, P_0, P_3 >$, де

$$D = x_\mu \partial_\mu + u_2 \partial_{u_1} + b\partial_{u_2},$$

$$P_0 = \partial_{x_0} \equiv \frac{\partial}{\partial x_0},$$

$$P_3 = \partial_{x_3} \equiv \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Для P_0 система характеристичних рівнянь має вигляд:

$$\frac{dx_0}{1} = \frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{0} = \frac{du_1}{0} = \frac{du_2}{0} \rightarrow$$

x_1, x_2, x_3, u_1, u_2 — інваріанти $< P_0 >$.

Для P_3 маємо:

$$\frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{1} = \frac{du_1}{0} = \frac{du_2}{0} \rightarrow$$

x_1, x_2, u_1, u_2 — інваріанти $< P_0, P_3 >$.

Для $D = x_\mu \partial_\mu + u_2 \partial_{u_1} + b\partial_{u_2}$ отримуємо:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{du_1}{u_2} = \frac{du_2}{b} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{x_1}{x_2}, \quad \tilde{\varphi}_1 = 2bu_1 - u_2^2, \quad \varphi_2 = u_2 - b\ln x_1$$

— інваріанти $< P_0, P_3, D >$. Позначимо $x_1 = A$ і покладемо

$$u_1 = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)\ln A + \tfrac{b}{2}\ln^2 A;$$
$$u_2 = \varphi_2(\omega) + \ln A^b.$$

Автор висловлює вдячність професору Жданову Р.З. за незмінну увагу й співпрацю.

Дане дослідження підтримане фондом наукового розвитку КІРУЕ.

Таблиця 1

N	Підалгебра	ω	A	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
1	$< D, P_0, P_3 >$	x_1/x_2	x_1	$-(\omega^2+\omega^4)$	$-2\omega^3$	-1	$-\omega$	0
2	$< D, P_0+P_3, P_1 >$	$x_2/(x_0-x_3)$	x_2	$-\omega^2$	0	-1	$-\omega$	0
3	$< D, P_1, P_3 >$	x_0/x_2	x_0	$\omega^2-\omega^4$	$-2\omega^3$	1	ω	0
4	$< D, I_{12}, P_0 >$	$\dfrac{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}{x_3}$	x_3	$-(1+\omega^2)$	$-(\omega^{-1}+2\omega)$	-1	ω	0
5	$< D, I_{12}, P_3 >$	$\dfrac{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}{x_0}$	x_0	ω^2-1	$2\omega-\omega^{-1}$	1	$-\omega$	0
6	$< D, I_{12}, P_0+P_3 >$	$\dfrac{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}{(x_0-x_3)}$	x_0-x_3	-1	$-\omega^{-1}$	0	0	0
7	$< D, I_{03}, P_1 >$	$\dfrac{(x_0^2-x_3^2)^{1/2}}{x_2}$	x_2	$1-\omega^2$	$\omega^{-1}-2\omega$	-1	ω	0
8	$< D, I_{12}+cI_{03},$ $P_0+P_3 >$	$\ln\dfrac{(x_0-x_3)^2}{x_1^2+x_2^2}+$ $+2c\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}$	$(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	$-4(1+c^2)$	0	-1	2	-1
9	$< D, G_1, P_2 >$	$\dfrac{x_0-x_3}{(x_0^2-x_1^2-x_3^2)^{1/2}}$	x_0-x_3	$-\omega^4$	$-2\omega^3$	0	$-\omega^3$	0
10	$< D, I_{03}, I_{12} >$	$\dfrac{x_0^2-x_3^2}{x_1^2+x_2^2}$	$(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	$4\omega(1-\omega)$	$4(1-\omega)$	-1	2ω	-1
11	$< D, G_1, G_2 >$	$(x_0^2-x_1^2-x_2^2-$ $-x_3^2)^{1/2}/(x_0-x_3)$	x_0-x_3	-1	ω^{-1}	0	ω^{-1}	0
12	$< D, I_{12}, I_{13}, I_{23} >$	$\dfrac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}}{x_0}$	x_0	ω^2-1	$2(\omega-\omega^{-1})$	1	$-\omega$	0
13	$< D, I_{01}, I_{02}, I_{12} >$	$\dfrac{(x_0^2-x_1^2-x_2^2)^{1/2}}{x_3}$	x_3	$1-\omega^2$	$2(\omega^{-1}-\omega)$	-1	ω	0
14	$< I_{12}+\alpha D,$ $P_0, P_3 >$	$2\alpha\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}$ $+\ln(x_1^2+x_2^2)$	$(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	$-4(1+\alpha^2)$	0	-1	-2	-1
15	$< I_{03}+\alpha D,$ $P_1, P_2 >$	$\dfrac{(x_0-x_3)^{\alpha-1}}{(x_0+x_3)^{\alpha+1}}$	$(x_0-x_3)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$	$4(1-\alpha^2)\times$ $\times\omega^{\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}}$	$4(1-\alpha^2)\times$ $\times\omega^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}$	0	$-2\alpha\times$ $\times\omega^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}$	0
16	$< I_{03}+\alpha D,$ $P_0+P_3, P_1 >$	$\dfrac{(x_0-x_3)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{x_2}$	x_2	$-\omega^2$	-2ω	-1	ω	0
17	$< G_1+D,$ $P_0+P_3, P_2 >$	$\dfrac{x_1}{x_0-x_3}+$ $+\ln(x_0-x_3)$	x_0-x_3	-1	0	0	0	0
18	$< I_{03}+\alpha D, I_{12}+$ $+\beta D, P_0+P_3 >$	$\ln\dfrac{(x_0-x_3)^{2\alpha}}{(x_1^2+x_2^2)^{\alpha+1}}-$ $-2\beta\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}$	$(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	$-4(\beta^2+$ $+(\alpha+1)^2)$	0	-1	$2(\alpha+1)$	-1
19	$< I_{03}+\gamma D,$ $G_1, P_2 >$	$(x_0-x_3)^{2\gamma}/(x_0^2-$ $-x_1^2-x_3^2)^{1+\gamma}$	$(x_0^2-x_1^2-$ $-x_3^2)^{1/2}$	$4(1-\gamma^2)$	$-2(1+\gamma)$	1	-2	2
20	$< I_{03}+\alpha D,$ $G_1, G_2 >$	$(x_0-x_3)^{2\alpha}/(x_0^2-$ $-x_1^2-x_2^2-x_3^2)^{\alpha+1}$	$(x_0^2-x_1^2-$ $-x_2^2-x_3^2)^{1/2}$	$4(1-\alpha^2)$	$-4(1+\alpha)$	1	-2	3
21	$< I_{03}+D+P_0+$ $+P_3, P_1, P_2 >$	x_0+x_3+ $+\ln(x_0-x_3)$	$(x_0-x_3)^{1/2}$	4	0	0	1	0
22	$< I_{03}-D+P_0-$ $-P_3, P_0+P_3,$ $P_1 >$	x_0-x_3- $-2\ln x_2$	x_2	-4	-2	-1	2	0
23	$< I_{03}-D+P_0-$ $-P_3, I_{12}+\alpha(P_0-$ $-P_3), P_0+P_3 >$	x_0-x_3- $\ln(x_1^2+x_2^2)-$ $-2\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$	$(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	$-4(1+\alpha^2)$	0	-1	2	-1
24	$< I_{03}-D, I_{12}+$ $+P_0-P_3,$ $P_0+P_3 >$	x_0-x_3- $-2\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$	$(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$	-4	0	-1	0	-1

N	Підалгебра	ω	A	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
25	$< I_{03} - 2D,$ $G_1 + P_0 - P_3,$ $P_2 >$	$((x_0 - x_3)^2 -$ $-4x_1)^{3/2}/(6(x_0 + x_3) -$ $-6x_1(x_0 - x_3) + (x_0 - x_3^3))$	$(x_0 - x_3)^2 -$ $-4x_1$	$144(e^\omega - 1)$	$48 + 72^\omega$	-16	-48	0
26	$< I_{03} - 2D,$ $G_1 + P_0 - P_3,$ $P_0 + P_3 >$	$((x_0 - x_3)^2 -$ $-4x_1)/x_2$	x_2	$-16 - \omega^2$	-2ω	-1	ω	0
27	$< I_{03} - D,$ $G_1 + P_2,$ $P_0 + P_3 >$	$x_0 - x_3$	$x_1 +$ $+x_2(x_0 -$ $-x_3)$	0	0	$-(\omega^2 +$ $+1)$	0	0
28	$< I_{03} + D + P_0 +$ $+P_3, G_1, P_2$	$(x_0^2 - x_1^2 -$ $-x_3^2)/(x_0 - x_3) +$ $+ \ln(x_0 - x_3)$	$(x_0 - x_3)^{1/2}$	4	2	0	1	0
29	$< I_{03} + D + P_0 +$ $+P_3, G_1, G_2$	$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 -$ $-x_3^2)/(x_0 - x_3) +$ $+ \ln(x_0 - x_3)$	$(x_0 - x_3)^{1/2}$	4	4	0	1	0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dirac P.A.M.* The relation between mathematics and physics // Proceedings of the Royal Society. Edinburgh. A.— 1938-1939.— **59**.— P.122—129.

2. *Zhdanov R.Z., Fushchych W.I., Marko P. V.* New scale-invariant nonlinear equations for a complex scalar field // Physica D 95.— 1996.— P.158—162.

3. *Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.— К.: Наук. думка, 1991.— 304 с.

4. *Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И.* Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики.— К.: Наукова думка, 1989.— 336 с.

5. *Баранник Л.Ф.* О симметрийной редукции и точных решениях нелинейного уравнения Даламбера // Симметрия и точные решения уравнений мат. физики.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1989.— С.11—13.

6. *Фущич В.И., Баранник А.Ф.* О точных решениях нелинейного уравнения Д'Аламбера в пространстве Минковского $R_{1,n}$ // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— N 6.— С.31—34.

7. *Фущич В.И., Баранник А.Ф.* Максимальные подалгебры ранга $n-1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. 1. // Укр. математ. журн.— 1990.— **42**, N 11.— С.1250—1256.

Стаття надійшла до редколегії 10.12.2003