УДК 517.9

©2004 р. А.О. Лопушанський

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕОДНОРІДНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ АБСТРАКТНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ У КОМПЛЕКСНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ШКАЛАХ

Встановлено, що якщо значення неоднорідної частини автономного параболічного лінійного рівняння належать комплексній інтерполяційній шкалі, асоційованій з оператором рівняння, то існує єдиний класичний розв'язок задачі Коші. Цей факт є перенесенням відомого результату Да Прато і Грісварда [1—3], встановленого для неперервних інтерполяційних шкал, на випадок комплексних інтерполяційних шкал.

Is shown that if the values of nonhomogeneous part of autonomous parabolic linear equation belong to complex interpolation scale associated with the operator of this equation that there is unique classical solution of Cauchy problem. This fact is updating on the case of complex interpolation scales of known result of Da Prato and Grisvard [1—3], proved for continuous interpolation scale.

Стаття присвячена дослідженню властивостей розв'язків абстрактної лінійної параболічної задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = Av(t) + f(t), \qquad t \in (0,T] \\ v(0) = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

де оператор A не залежить від змінної $t \in [0,T]$ та є генератором аналітичної півгрупи [4, 5] в деякому банаховому просторі $(V_0, \|\cdot\|)$ із щільною областю визначення $V_1 \subset V_0$.

Відомо існування єдиного класичного розв'язку $v \in C([0,T];V_1) \cap C^1([0,T]);V_0)$ цієї задачі, якщо f задовольняє умову Гельдера або $f \in (C[0,T];V_\theta)$, $\theta \in (0,1)$ (умови Да Прато та Грісварда [1, 2, 3]), де простір V_θ породжений шляхом інтерполяції [6] пари банахових просторів $\{V_0, V_1\}$ дробовими степенями деякого допоміжного оператора. У даній праці останній результат переноситься на випадок комплексних інтерполяційних шкал просторів V_θ, проводиться дослідження властивостей розв'язків задачі (1) та дослідження залежності від параметра $s \geq 0$ розв'язків неоднорідної задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dv_s(t)}{dt} = (A + sX)v_s(t) + f(t), \quad s \geq 0\,, \\ v_s(0) = g \in V_1\,, \end{cases} \tag{2}$$

збуреної необмеженим оператором X над простором V_θ.

Одержані результати застосовні для дослідження властивостей розв'язків задачі (2), коли оператор A породжений регулярною еліптичною задачею в обмеженій області, а збурена задача загалом не є еліптичною.

Позначення. Користуємося термінологією [4, 5]. Нехай $V = \{V_0; V_1\}$ пара банахових просторів $(V_0, \|\cdot\|_0)$ та $(V_1, \|\cdot\|_1)$ над $\mathbb{C}$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$.

Заданому куту $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ зіставимо сектор $\Lambda_0 = \{re^{i\omega} : \omega \in [-\omega_0, \omega_0],\, r > 0\}$ і його замикання $\Lambda = \Lambda_0 \bigcup \{0\}$. Введемо клас $\mathcal{A}$ секторіальних замкнених лінійних операторів A над V_0 з областю визначення V_1 і таких, що $A \in \mathcal{L}(V_1; V_0)$ та $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} \|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty$. Через $\mathcal{L}(\cdot)$ позначається простір лінійних неперервних операторів. Далі $R(\lambda, A) =$

$E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1}$ – резольвента. Оператори класу $\mathcal{A}$ мають від'ємний тип $r(A) = \{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Зафіксуємо деякий оператор $J \in \mathcal{A}$. Для всіх $\vartheta > 0$ функція $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \ni \lambda \longmapsto (-\lambda)^{-\vartheta} = e^{-\vartheta \ln(-\lambda)}$, де $\ln(1) = 0$, аналітична на спектрі J. Тому, користуючись функціональним численням із [4], можна визначати дробові степені оператора $(-J)^{-\vartheta} \in \mathcal{L}(V)$. Оператор $(-J)^{-\vartheta}$ виявляється оборотним та обмеженим одночасно над обидвома просторами пари V. Область визначення V_ϑ замкненого оберненого $(-J)^{\vartheta} = [(-J)^{-\vartheta}]^{-1} : V_\vartheta \longmapsto V_0$ наділяємо нормою графіка $\|x\|_\theta = \|(-J)^{\vartheta} x\|_0$. При $\vartheta = 1$ норма $\|x\|_\vartheta$ еквівалентна заданній на V_1 і вкладення $V_1 \subset V_\vartheta \subset V_0$ неперервні. З того, що ядро оператора $(-J)^{-\vartheta}$ нульове, випливає щільність цих вкладеннь. Рекурентним чином шкала просторів $\{V_\vartheta\}$ може бути визначена для всіх чисел $\vartheta > 0$.

Основний результат. У класі вектор-функцій $[0, T] \ni t \longmapsto v(t) \in V_1$ розглядаємо неоднорідну задачу Коші з нульовими початковими даними (1), де вектор-функція $[0, T] \ni t \longmapsto f(t) \in V_0$ є заданою. Задача є параболічною в сенсі [6].

Теорема. *Нехай задано довільні оператори $A, J \in \mathcal{A}$ та числа $0 < \eta < \vartheta \leq 1$.*

(a) *Якщо $f(t) \in C([0, T]; V_\vartheta)$, то*

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)\, d\tau \in C([0, T]; V_{1+\eta}) \tag{3}$$

та існує така стала $K > 0$, що виконується нерівність

$$\max_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{1+\eta} \leq K \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_\vartheta . \tag{4}$$

(b) *Для будь-якої функції $f(t) \in C([0, T]; V_\vartheta)$ у задачі (1) існує єдиний розв'язок класу*

$$C([0, T]; V_{1+\eta}) \bigcap C^1([0, T]; V_\eta)$$

і цей розв'язок має вигляд (3).

Перше з тверджень встановлює нерівність типу коерцитивності (4) для задачі (1). Друге твердження полягає в перенесенні відомого результату Да Прато і Грісварда на випадок іншої інтерполяційної шкали просторів, а саме просторів $\{V_\vartheta\}$, породжених дробовими степенями деякого фіксованого секторіального оператора від'ємного типу. Цей результат формулює достатні умови розв'язності задачі (1) у класичних просторах вектор-функцій, визначених такими шкалами.

Доведення. Оскільки єдиність розв'язку очевидна, то зосередимося на доведенні його існування та зображення у вигляді (3).

Звуження $J_{|V_2} : V_2 \longmapsto V_1$ над парою $\{V_1; V_2\}$ залишається секторіальним оператором від'ємного типу з таким самим кутом ω_0, як в оператора J. Справді, $(\lambda E_{10} - J)^{-1} : V_1 \longmapsto V_1$, для всіх чисел $\lambda \in \varrho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ та

$$\|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_1; V_2)} =$$
$$= \sup_{\|(-J)^{-1} y\|_0 \leq 1} \|(-J)(\lambda E_{10} - J)^{-1}(-J)^{-1} y\|_1 \leq$$
$$\leq \|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0; V_1)} \|J\|_{\mathcal{L}(V_1; V_0)} \leq$$
$$\leq K(J) \|J\|_{\mathcal{L}(V_1; V_0)} ,$$

де $K(J)$ — стала з означення класу $\mathcal{A}$. Звідси при $0 < b < \min\left\{-r(J); \dfrac{1}{2K(J)}\right\}$ отримуємо оцінку

$$\|[E_{00} - b(\lambda E_{10} - J)^{-1}]^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq$$
$$\leq \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \|b(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_0; V_1)} \leq 2,$$

де E_{00} — одиничний оператор над V_0. Для чисел $a \in [b, -r(J))$ маємо $[0, +\infty) \subset \Lambda_a - b$. Зокрема, для чисел $\lambda \geq 0$ правильна тотожність

$$(\lambda + b) R(\lambda + b, J) = E_{00} + J[(\lambda + b) E_{10} - J]^{-1}, \tag{5}$$

з якої для сталої $C = 1 + K_a(J) \|J\|_{\mathcal{L}(V_1; V_0)}$, маємо

$$\|R(\lambda + b, J)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{C}{\lambda + b}. \tag{6}$$

Далі з тотожності

$$R(\lambda, J) = R(\lambda + b, J)[E_{00} - b(\lambda E_{10} - J)^{-1}]^{-1},$$

для чисел $\lambda \geq 0$ отримуємо наступну оцінку:

$$\|R(\lambda, J)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq 2\|R(\lambda+b, J)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{2C}{\lambda+b}.$$

Або при $\xi = -\lambda$

$$\|R(\xi, (-J))\|_{\mathcal{L}(V_0)} \leq \frac{2C}{|\xi|+b}, \qquad \forall\, \xi \leq 0.$$

Тобто оператор $(-J)$ позитивний в сенсі означення [5, означення 1.14.1]. Дробові степені позитивних операторів $(-J)^{\vartheta}$ породжують інтерполяційну шкалу просторів V_{ϑ}, яка володіє властивостями

$$[V_0, V_1]_{\vartheta} = V_{\vartheta}\,, \qquad [V_1, V_2]_{\vartheta} = V_{1+\vartheta}\,,$$

де через $[\cdot,\cdot]_{\vartheta}$ позначено проміжний простір відповідної пари, породжений комплексним методом інтерполяції [5, теорема 1.15.3]. Згідно з властивостями інтерполяційних шкал, з факту, що для чисел $\lambda \in \Lambda$ оператори належать до класів $(\lambda E_{10} - J)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0; V_1)$ і $(\lambda E_{10} - J)^{-1}_{|V_1} \in \mathcal{L}(V_1; V_2)$, випливає $(\lambda E_{10} - J)^{-1}_{|V_{\vartheta}} \in \mathcal{L}(V_{\vartheta}; V_{1+\vartheta})$ і існує стала $C_{\vartheta} > 0$ така, що

$$\|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta}; V_{1+\vartheta})} \leq$$
$$\leq C_{\vartheta}\, \|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|^{1-\vartheta}_{\mathcal{L}(V_0; V_1)} \times$$
$$\times \|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|^{\vartheta}_{\mathcal{L}(V_1; V_2)}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$. Оцінюючи норми справа, маємо

$$\|(\lambda E_{10} - J)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta}; V_{1+\vartheta})} \leq$$
$$\leq C_{\vartheta}\, K(J)^{1-\vartheta}\, K(J)^{\vartheta} \|J\|^{\vartheta}_{\mathcal{L}(V_1; V_0)} =$$
$$= C_{\vartheta}\, K(J) \|J\|^{\vartheta}_{\mathcal{L}(V_1; V_0)} \tag{7}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$. Таким чином, звуження $J_{|V_{\vartheta}}$ залишається секторіальним оператором від'ємного типу з кутом ω_0 над парою $\{V_{\vartheta}; V_{1+\vartheta}\}$. У результаті чого до оператора $J_{|V_{\vartheta}}$ можемо застосувати функціональне числення із [4], зокрема в просторі $\mathcal{L}(V_{\vartheta}) \bigcap \mathcal{L}(V_{1+\vartheta})$ визначена півгрупа

$$e^{(t-\tau)J} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{(t-\tau)\lambda}\, R(\lambda, J)\, d\lambda, t \geq \tau,$$

де контур $\Gamma_{a,\omega} = \Gamma^{+}_{a,\omega} \bigcup \Gamma^{-}_{a,\omega} \bigcup \Gamma^{0}_{a}$, в якому $\Gamma^{+}_{a,\omega} = \{re^{i\omega} : r \geq a\}$, $\Gamma^{-}_{a,\omega} = \{re^{-i\omega} : r \geq a\}$, $\Gamma^{0}_{a} = \{ae^{i\tau} : \tau \in [\omega, 2\pi - \omega]\}$ визначається додатними числами $0 < a < -r(J_{|V_{\vartheta}})$, $c : \pi/2 < \omega_0 - c < \pi$ та $\omega : \omega_0 - c \leq \omega \leq \omega_0$. Як відомо [4], півгрупа $e^{(t-\tau)J}$ відображає простір V_{ϑ} в простір $V_{1+\vartheta}$. А оскільки область визначення $V_{1+\eta-\vartheta}$ оператора $(-J)^{1+\eta-\vartheta}$ містить підпростір $V_{1+\vartheta}$, то визначеним є добуток

$$(-J)^{1+\eta-\vartheta} e^{(t-\tau)J} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} e^{(t-\tau)\lambda} (-J)^{1+\eta-\vartheta} R(\lambda, J) d\lambda.$$

Знову ж таки відомо [4], що визначена в такий спосіб півгрупа $e^{(t-\tau)J}$ є рівномірно обмежена й сильно неперервна над простором V_{ϑ}, тому інтеграл (3) існує (в сенсі Бохнера). Отже, існує інтеграл

$$(-J)^{1+\eta-\vartheta} v(t) = \int_0^t (\,-\,J)^{1+\eta-\vartheta} e^{(t-\tau)J} f(\tau) d\tau.$$

Звідси у випадку рівності $A = J$ отримуємо

$$(-J)^{1+\eta-\vartheta} v(t) = \int_0^t (-J)^{1+\eta-\vartheta} e^{(t-\tau)J} f(\tau)\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \int_0^t e^{(t-\tau)\lambda} (-J)^{1+\eta-\vartheta} \times$$
$$\times R(\lambda, J) f(\tau) d\tau d\lambda.$$

Остання рівність є наслідком теореми Фубіні, яку можемо застосувати в силу абсолютної збіжності інтеграла. Перевіримо наявність такої збіжності. Для цього до оператора $J_{|V_{\vartheta}}$ застосуємо відому нерівність [6]

$$\|(-J)^{1+\eta-\vartheta} R(\lambda, J)\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta})} =$$
$$= \|R(\lambda, J)\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta}; V_{1+\eta})} \leq \frac{C'}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}}, \quad \lambda \in \Lambda_0,$$

де $C' > 0$ деяка стала. З неї отримуємо

$$\|R(\lambda, J)\, f(\tau)\|_{1+\eta} \leq$$
$$\leq \|R(\lambda, J)\|_{\mathcal{L}(V_{\vartheta}; V_{1+\eta})} \|f(\tau)\|_{\vartheta} \leq$$
$$\leq \frac{C' \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_{\vartheta}}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}}, \quad \lambda \in \Lambda_0.$$

Звідси, враховуючи, що $\cos\omega < 0$, приходимо до оцінок

$$\|v(t)\|_{1+\eta} = \|(-J)^{1+\eta-\vartheta} v(t)\|_{\vartheta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \int\limits_0^t |e^{(t-\tau)\lambda}|\, \|R(\lambda, J)\, f(\tau)\|_{1+\eta} d\tau \times$$

$$\times |d\lambda| \leq \frac{C' \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_{\vartheta}}{2\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \int\limits_0^t e^{(t-\tau)|\lambda|\cos\omega}\, d\tau\, \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}} =$$

$$= \frac{C' \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_{\vartheta}}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{e^{t|\lambda|\cos\omega} - 1}{|\lambda|\cos\omega} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{\vartheta-\eta}} \leq$$

$$\leq \frac{C' \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_{\vartheta}}{-2\pi\cos\omega} \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1+\vartheta-\eta}} =$$

$$= \frac{C' \max\limits_{\tau\in[0,T]} \|f(\tau)\|_{\vartheta}}{-\pi\cos\omega} \left[\int\limits_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{1+\vartheta-\eta}} + \frac{(\pi-\omega)}{a^{1+\vartheta-\eta}} \right] < \infty.$$

Таким чином, інтеграл абсолютно збіжний. Більше того, $v(t) \in V_{1+\eta}$ для всіх $t \in [0, T]$ і, припускаючи, що

$$K = \frac{C'}{-\pi\cos\omega} \Big[\int_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{1+\vartheta-\eta}} + \frac{(\pi-\omega)}{a^{1+\vartheta-\eta}} \Big],$$

приходимо до нерівності коерцитивності (4) у випадку рівних операторів $A = J$.

У випадку довільного оператора $A \in \mathcal{A}$ на області визначення його степені $\mathfrak{D}[(-A)^{\vartheta}]$ задамо норму графіка $\|x\|_{\vartheta,A} = \|(-A)^{\vartheta} x\|_0$. Згідно з властивостями функціонального числення, оператор $(-J)^{-\vartheta}$ залишає інваріантним підпростір V_1, а оператор $(-A)^{\vartheta}$ у своїй області визначення містить V_1. Тому на V_1 визначеним є добуток $(-A)^{\vartheta}(-J)^{-\vartheta}$. Отже,

$$\|x\|_{\vartheta,A} = \|(-A)^{\vartheta}(-J)^{-\vartheta}(-J)^{\vartheta} x\|_0 \leq$$

$$\leq \|(-A)^{\vartheta}\|_{\mathcal{L}\left(\mathfrak{D}[(-A)^{\vartheta}];\, V_0\right)} \|(-J)^{-\vartheta}\|_{\mathcal{L}(V_0; V_{\vartheta})} \|x\|_{\vartheta}$$

для всіх $x \in V_1$. В силу щільності V_1 в V_{ϑ}, наведену нерівність можна за неперервністю розширити до відображення

$$(-A)^{\vartheta}(-J)^{-\vartheta} : V_{\vartheta} \longmapsto \mathfrak{D}[(-A)^{\vartheta}].$$

Це відображення ін'єктивне, бо є композицією оборотних операторів. Замінюючи в попередніх міркуваннях оператор J на A, переконуємося, що обернений оператор $(-J)^{\vartheta}(-A)^{-\vartheta}$ також здійснює неперервне та ін'єктивне відображення $\mathfrak{D}[(-A)^{\vartheta}]$ в V_{ϑ}. Таким чином, має місце наступний ізоморфізм банахових просторів:

$$\mathfrak{D}[(-A)^{\vartheta}] \simeq V_{\vartheta}$$

і в наведеному вище доведенні можемо замінити оператор J на довільний оператор $A \in \mathcal{A}$.

Доведемо (b). Припустимо спочатку, що задовольняється сильніша умова щодо функції $f(t)$, а саме нехай $f(t) \in C([0, T]; V_1)$. З того, що оператор A є генератором півгрупи (див. [4]) при $t - \tau > 0$, маємо

$$\int_\tau^t A e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma =$$

$$= \int_\tau^t \frac{d}{d\varsigma}\, e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma = e^{(t-\tau)A} f(\tau) - f(\tau).$$

Звідки отримуємо

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t f(\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_\tau^t A e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \Big[f(\tau) + A \int_\tau^t e^{(\varsigma-\tau)A} f(\tau)\, d\varsigma \Big] d\tau =$$

$$= \int_0^t \Big[f(\tau) + Av(\tau) \Big] d\tau.$$

Тому $v(t) \in C^1([0, T]; V_1)$, а функція $v(t)$ є розв'язком задачі (1).

Для довільної функції $f(t) \in C([0, T]; V_{\vartheta})$ припустимо, що $f_{\varepsilon}(t) = e^{\varepsilon A} f(t)$. Оскільки півгрупа $e^{\varepsilon A}$ відображає V_{ϑ} в $V_{1+\vartheta}$, то $f_{\varepsilon}(t) \in$

$C([0,T];\,V_{1+\vartheta})$. Тому на підставі нерівності (4) маємо

$$v_\varepsilon(t) := \int_0^t e^{(t-\tau)A} f_\varepsilon(\tau)\,d\tau \in C([0,T];\,V_{1+\eta}). \tag{8}$$

Застосовуючи до оператора A функціональне числення із [4], отримуємо

$$e^{\varepsilon A}\,A^{-\vartheta} - \,A^{-\vartheta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{e^{\varepsilon\lambda}-1}{(-\lambda)^\vartheta}\,R(\lambda,A)\,d\lambda \in \mathcal{L}(V_0)\,.$$

При $b=0$ тотожність (5) і як наслідок нерівність (6) правильні для всіх чисел $\lambda\in\Lambda_0$. Тобто при $J=A$ маємо

$$\|R(\lambda,A)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{C}{|\lambda|}, \qquad \lambda\in\Lambda_0\,.$$

Отже, на контурі $\Gamma_{a,\omega}$ підінтегральна функція задовольняє нерівності

$$\Big\|\frac{e^{\varepsilon\lambda}-1}{(-\lambda)^\vartheta}\,R(\lambda,A)\Big\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{2C_0\,e^{r\varepsilon\,\cos\omega}}{r^{1+\vartheta}}.$$

Враховуючи, що $\cos\omega<0$ при $\lambda=re^{i\omega}\in\Gamma_{a,\omega}$, отримуємо

$$\|e^{\varepsilon A}\,A^{-\vartheta} - A^{-\vartheta}\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le$$

$$\le \frac{C_0}{\pi}\int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{|e^{\varepsilon\lambda}-1|\,|d\lambda|}{r^{1+\vartheta}} \le$$

$$\le \frac{2C_0}{\pi}\Big[\int_a^{+\infty}\frac{dr}{r^{1+\vartheta}} + \frac{\pi-\omega}{a^{1+\vartheta}}\Big] := C_1 < \infty.$$

Звідси приходимо до рівномірних за всіма $t\in[0,T]$ нерівностей

$$\max_{t\in[0,T]}\|f_\varepsilon(t)-f(t)\|_\vartheta =$$

$$= \max_{t\in[0,T]}\|(e^{\varepsilon A}\,A^{-\vartheta}-A^{-\vartheta})A^\vartheta f(t)\|_\vartheta \le$$

$$\le \max_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_\vartheta\,\|e^{\varepsilon A}\,A^{-\vartheta}-A^{-\vartheta}\|_{\mathcal{L}(V_0)}\times$$

$$\times\|A^\vartheta\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta;V_0)} \le C_1\,\max_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_\vartheta\,\|A^\vartheta\|_{\mathcal{L}(V_\vartheta;V_0)}.$$

Тобто рівномірно за всіма $t\in[0,T]$ при $\varepsilon\to 0$ маємо

$$C([0,T];\,V_1)\ni f_\varepsilon(t) \Longrightarrow f(t)\in C([0,T];\,V_\vartheta).$$

З нерівності коерцитивності (4) випливає

$$C([0,T];\,V_{1+\eta})\ni v_\varepsilon(t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow v(t)\in C([0,T];\,V_{1+\eta})$$

рівномірно за всіма $t\in[0,T]$ при $\varepsilon\to 0$. Для кожного $\varepsilon>0$ задовольняється рівняння (1). Тому при $\varepsilon\to 0$ отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]}\|v'_\varepsilon(t)-v'(t)\|_\eta \le$$

$$\le \|A(v_\varepsilon(t)-v(t))\|_\eta + \max_{t\in[0,T]}\|f_\varepsilon(t)-f(t)\|_\eta \le$$

$$\le C_2\,\|v_\varepsilon(t)-v(t)\|_{1+\eta} +$$

$$+ C_3\,\max_{t\in[0,T]}\|f_\varepsilon(t)-f(t)\|_\vartheta \to 0,$$

де стала C_2 характеризує встановлений вище ізоморфізм $\mathfrak{D}[(-A)^{1+\eta}]\simeq V_{1+\eta}$, а стала C_3 є нормою неперервного вкладення $V_\vartheta\subset V_\eta$. Іншими словами, маємо $v(t)\in C^1([0,T];\,V_\eta)$.

Підсумовуючи, приходимо до висновку, що функція $v(t)$ належить до класу

$$C^1([0,T];\,V_\eta)\bigcap C([0,T];\,V_{1+\eta})$$

та є розв'язком задачі (1). Теорема доведена.

Необмежені збурення. Доведена теорема може бути застосована до дослідження залежності від параметра $s\ge 0$ розв'язків $[0,T]\ni t\longmapsto v_s(t)\in V_1$ неоднорідної задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dv_s(t)}{dt} = (A+sX)v_s(t)+f(t), \quad s\ge 0\,, \\ v_s(0)=g\in V_1\,, \end{cases} \tag{9}$$

збуреної необмеженим оператором X над простором V_0. Припускаємо, що область визначення збурюючого оператора X належить шкалі V_α при $0<\alpha<1$. Тоді областю визначення збуреного оператора $A+sX$ залишається простір V_1. Для доведення наступних тверджень належить повторити міркування з праці [7] з тією різницею, що, замість посилань на результат Да Прато і Грісварда, належить використати доведену вище теорему.

Наслідок 1. *Нехай задано числа* $0 < \vartheta \le 1$ *та* $0<\alpha<1$ *і оператори* $A \in \mathcal{A}$ *та* $X \in \mathcal{L}(V_\alpha; V_0)$.

(a) *Для будь-якої функції* $f(t) \in C([0,T];\, V_\vartheta)$ *у класі*

$$C([0,T];\, V_1)\bigcap C^1([0,T];\, V_0)$$

існує єдиний розв'язок задачі (9) і для всіх $s \ge 0$ *його можна зобразити у вигляді*

$$v_s(t) = e^{t(A+sX)}g + \int_0^t e^{(t-\tau)(A+sX)}f(\tau)\, d\tau.$$

(b) *За умови* $f(t) \in C([0,T];\, V_\vartheta)$ *розв'язок* $v_s(t)$ *задачі (9) як функція параметра*

$$[0,+\infty) \ni s \longmapsto v_s(t) \in V_1\,, \qquad \forall\, t \in [0,T],$$

буде рівномірно (по всіх $t\in[0,T]$*) неперервною в нулі за нормою простору* V_ϑ *(а тому і нормою простору* V_0*), тобто*

$$\lim_{s\to+0}\max_{t\in[0,T]}\|v_s(t)-v(t)\|_\vartheta = 0.$$

Наслідок 2. *Нехай задано число* $0<\alpha<1$ *і оператори* $A \in \mathcal{A}$ *та* $X \in \mathcal{L}(V_\alpha; V_0)$. *Якщо виконується умова* $f(t)\in C([0,T];\, V_1)$, *то існує стала* $K>0$ *така, що розв'язок* $v_s(t)$ *задачі (9) задовольняє нерівності*

$$\max_{t\in[0,T]}\|v_s(t)\|_1 \le K\,,$$

де стала K *не залежить від параметра* $s \ge 0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Grisvard P.* Équations operationnelles abstraites et problémes aux limites dans des domaines non réguliers // Actes. Congrés Intern. Math.— 1971.— V. 2.— P.731—736.

2. *Da Prato G., Grisvard P.* Sommes d'opŕateurs non linéares et équations differentielles opérationelles // J. Math. Pures Appl.— 1979.— V. 54.— P.305—387.

3. *Da Prato G., Grisvard P.* Equations d'évolotion abstraites non linéaire de type parabolique // Ann. Mat. Pure Appl.— 1979.— **120**, N 4.— P.329—396.

4. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы.— М.: Мир, 1992.— 345 с.

5. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1980.— 234 с.

6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М.: Мир, 1985.— 332 с.

7. *Лопушанський А.О.* Сильно неперервні півгрупи збурень абстрактних параболічних рівнянь // Мат. методи і фіз.-мех. поля.— 1999.— **42**, N 3.— С.75—82.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.2003