УДК 517.95

©2004 р. **Г.П. Лопушанська, О.Ю. Чмир**

Львівський національний університет ім. І.Франка, Львів

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ СПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ ГРІНА ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Вивчаються спряжені оператори Гріна нормальної $2b$-параболічної крайової задачі у класах функцій з особливостями на межі області. Виведені оцінки похідних відповідних інтегралів.

Here the conjugated Green's operators of the normal $2b$-parabolic boundary value problem in the classes of the functions with specialities on the boundary of domain have been studied. The estimates of the derivatives of their corresponding integrals have been derived.

При дослідженні крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь, коли задані на межі області функції є узагальненими, використовуються спряжені оператори Гріна у класах функцій, які мають степеневу поведінку біля межі області. Дослідження операторів Гріна в класах функцій з точковими особливостями проведено в [1], а спряжених операторів Гріна в подібних класах функцій – у [2]. Тут ми одержуємо оцінки похідних композиції спряжених ядер Гріна у класах функцій, які можуть мати особливості на параболічній межі області.

Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею S класу $\mathbb{C}^\infty$, $Q_0 = \Omega_0 \times (0,T]$, $Q_1 = S \times (0,T]$, $\Omega_0 ega_1 = S$, $0 < T < +\infty$.

Розглянемо нормальну крайову задачу для $2b$-параболічної системи рівнянь [3, 4]

$$(Lu)(x,t) \equiv (D_t - A(x,t,D_x))u(x,t) =$$
$$= F_0(x,t),\ \ (x,t) \in Q_0, \qquad (1)$$
$$B_j u\,|_{Q_1} \equiv \sum_{|\alpha| \le r_j} b_{j\,\alpha}(x,t) D_x^\alpha u|_{Q_1} =$$
$$= F_j(x,t),\ \ (x,t) \in \overline{Q}_1,$$
$$0 \le r_j \le 2b-1,\ \ 1 \le j \le m, \qquad (2)$$
$$u|_{t=0} = F_{m+1},\ \ m = bN, \qquad (3)$$

де u – вектор-функція (стовпець висоти N), $A(x,t,D_x) = \sum\limits_{|\alpha| \le 2b} a_\alpha(x,t) D_x^\alpha$, $a_\alpha(x,t)$ – квадратні порядку N матриці з нескінченно диференційовними елементами, $b_{j\,\alpha}$ – матриці-рядки довжини N; F_0, F_{m+1} – матриці-стовпці висоти N. Система крайових диференціальних виразів B_j є нормальною на Q_1 [4] і задовольняє умову Лопатинського.

У $[4-7]$ досліджено матрицю Гріна $G = (G_0, G_1, ..., G_m)$ задачі $(1)-(3)$, оператори Гріна

$$(\mathcal{G}_i\varphi)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0 ega_{(i)}} G_i(x,t;y,\tau)\times$$
$$\times\varphi(y,\tau)\,dy$$

та спряжені оператори Гріна

$$(\widehat{\mathcal{G}}_i\varphi)(y,\tau) = \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} \varphi(x,t)\times$$
$$\times G_i(x,t;y,\tau)\,dx, \quad 0 \le i \le m,$$
$$(\widehat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi)(y) = (\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(y,0),$$
$$(i) = \begin{cases} 0, & i=0\ i=m+1, \\ 1, & 1 \le i \le m. \end{cases}$$

Для зручності далі використовуватимемо позначення $P = (x,t)$, $P_0 = (x_0,t_0)$, $M = (y,\tau)$, $r_0 = r_{m+1}+$, а також такі позначення [3, 6]: $d(P,M) = |PM| = d(x,t;y,\tau) = (|x-y|^2 + |t-\tau|^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{2}}$, де $|x-y|$ – евклідова відстань в R^n, $E_c(z,t) = exp\{-cz^{\frac{2b}{2b-1}} t^{-\frac{1}{2b-1}}\}$, $\Phi_c^k(z,t) =$

$(z^k+1)E_c(z,t)$, $\tilde{\Phi}_c^k(z,t)=z^kE_c(z,t)$, $k\in\mathbb{R}$, $z>0$, $t>0$, $c>0$, $\rho(x,t)=\min[\rho(x),\ \sqrt[2b]{t}]$, де $\rho(x)$– невід'ємна нескінченно диференційовна в $\overline{Q_0}$ функція порядку відстані $d(x)$ від точки x до $\overline{Q_1}$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n,\alpha_0)=(\alpha,\alpha_0)$, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$, $|\overline{\alpha}|=|\alpha|+2b\alpha_0$, $D^{\overline{\alpha}}_{x,t}=\frac{\partial^{|\overline{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot\partial x_n^{\alpha_n}\cdot\partial t^{\alpha_0}}$.

Лема 1.

$$D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau}\int\limits_{Q_0}\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)G_0(x,t;y,\tau)\,dxdt=$$

$$=\begin{cases}\widehat{C}_1E_c\{\varrho(y),\tau\}\times\\ \times([\varrho(y)]^{k+1-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}+1),\\ \qquad\qquad d(y)\le\ \sqrt[2b]{\tau},\\ \widehat{C}_2e^{-c}[\tau^{\frac{k+r_0-|\overline{\alpha}|}{2b}}+1],\\ \qquad\qquad d(y)>\ \sqrt[2b]{\tau}\end{cases}$$

для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}$, $k>-n-2b$, $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ *– додатні сталі.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли $|\overline{\alpha}|<2b$. Далі через C_j, $j=\overline{0,24}$, позначатимемо додатні сталі. Знайдемо оцінку інтеграла

$$\mathcal{I}(y,\tau)=\int\limits_{Q_0}\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)\times$$
$$\times|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau}G_0(x,t;y,\tau)|\,dxdt.\qquad(4)$$

У [4, 6] доведено, що

$$|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau}G_0(x,t;y,\tau)|\le C_0E_c(|MP|,$$
$$|t-\tau|)\,|MP|^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}.\qquad(5)$$

Тоді інтеграл (4) оцінюється так:

$$\mathcal{I}(y,\tau)\le C_0\int\limits_{Q_0}\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)E_c(|MP|,$$
$$|t-\tau|)\,|MP|^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\,dxdt.$$

Як у [3, с.40], [6], безпосереднім обчисленням доводяться нерівності

$$E_c\{|x-x_0|,\ |t-t_0|\}\cdot E_c\{|y-x|,$$
$$|\tau-t|\}\le E_c\{|y-x_0|,\ |\tau-t_0|\},$$
$$E_c\{d(x,t;\xi,\beta),\ |t-\beta|\}\cdot E_c\{d(\xi,\beta;y,\tau),$$
$$|\beta-\tau|\}\le E_c\{d(x,t;y,\tau),|t-\tau|\},$$

а також

$$E_c\{\varrho(x,t),\ |t-t_0|\}\cdot E_c\{|MP|,|t-\tau|\}\le$$
$$\le E_c\{\varrho(y,\tau),\ |\tau-t_0|\}.\qquad(6)$$

Отже,

$$\mathcal{I}(y,\tau)\le C_0E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\int\limits_{Q_0}\varrho^k(x,t)\times$$
$$\times|MP|^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\,dxdt.\qquad(7)$$

Далі використовуватимемо нерівності

$$M_1\,d(y)\le\varrho(y)\le M_2\,d(y),\ y\in\Omega_0,\qquad(8)$$

де M_1, M_2 – додатні числа.

Розіб'ємо область Q_0 на дві підобласті, а саме:
$Q_0^1=\{(x,t)\in Q_0:\ d(x)\le\ \sqrt[2b]{t}\}$,
$Q_0^2=\{(x,t)\in Q_0:\ d(x)>\ \sqrt[2b]{t}\}$. Відповідно $\mathcal{I}(y,\tau)\mathcal{I}_1(y,\tau)+\mathcal{I}_2(y,\tau)$, в $\mathcal{I}_1(y,\tau)$ інтегрування здійснюватиметься по області Q_0^1, а в $\mathcal{I}_2(y,\tau)$ — по Q_0^2 для довільних $(y,\tau)\in Q_0$. В свою чергу для довільної точки $(y,\tau)\in Q_0$ область Q_0^1 розбиваємо на такі три підобласті:
$Q_0^{11}=\{(x,t)\in Q_0^1:\ d(x)<\frac{1}{2}d(y)\}$,
$Q_0^{12}=\{(x,t)\in Q_0^1:\ |MP|<\frac{1}{2}d(y)\}$,
$Q_0^{13}=Q_0^1\backslash\{Q_0^{11}\cup Q_0^{12}\}$. Відповідно $\mathcal{I}_1=\mathcal{I}_{11}+\mathcal{I}_{12}+\mathcal{I}_{13}$. Розглянемо окремо кожний із доданків.

1) Нехай $P=(x,t)\in Q_0^{11}$, $d(x)=|x-x_0|$, $x_0\in S$. Тоді $|x-y|\ge|y-x_0|-|x-x_0|\ge d(y)-d(x)\ge\frac{1}{2}\,d(y)$. Тому

$$\mathcal{I}_{11}(y,\tau)\le C_1E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$
$$\times\int\limits_{Q_0^{11}}[d(y)]^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\varrho^k(x)\,dxdt.$$

Враховуючи (8), матимемо

$$\mathcal{I}_{11}(y,\tau)\le C_2[\varrho(y)]^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\times$$
$$\times E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\int\limits_{Q_0^{11}}d^k(x)\,dxdt$$
$$=C_2[\varrho(y)]^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial Q_0^{11}\cap S} dSdt\int\limits_0^{\frac{1}{2}d(y)}\xi^k\,d\xi = C_3E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times[\varrho(y)]^{k+1-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}.$$

Отже, $\mathcal{I}_{11}(y,\tau)$ оцінюється таким чином:

$$\mathcal{I}_{11}(y,\tau) \le C_3[\varrho(y)]^{k+1-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\times$$

$$\times E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\},\ (y,\tau)\in Q_0. \qquad (9)$$

2) Нехай $P=(x,t)\in Q_0^{12}$. Тоді $d(x)\ge |y-x_0|-|x-y|\ge d(y)-\frac{1}{2}d(y)=\frac{1}{2}d(y)$.

Тоді, враховуючи (8), матимемо

$$\mathcal{I}_{12}(y,\tau) \le C_4\varrho^k(y)E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times\int\limits_{Q_0^{12}}|MP|^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\,dxdt.$$

Нехай $M_0=(y_0,\tau)$, де $|y-y_0|=d(y)$. Зробимо заміну $\xi_i=\frac{x_i-y_{0_i}}{|MM_0|}=\frac{x_i-y_{0_i}}{d(y)}$, $i=\overline{1,n}$, $\xi_{n+1}=\frac{t-\tau}{[d(y)]^{2b}}$. У нових змінних $P=\overline{\xi}=(\xi_1,...,\xi_{n+1})$, $M=\overline{s}=(s_1,...,s_{n+1})$, де $s_i=\frac{y_i-y_{0_i}}{d(y)}$, $i=\overline{1,n}$, $s_{n+1}=0$, а тоді $|\overline{s}|=1$, $d(\overline{\xi},\overline{s})=\frac{|PM|}{d(y)}$; Q_0^{12} перейде в $\Psi=\{\overline{\xi}:d(\overline{\xi},\overline{s})<\frac{1}{2}\}$, $dxdt=[d(y)]^{n+2b}\,d\overline{\xi}$.

Після проведення цієї заміни змінних матимемо

$$\mathcal{I}_{12}(y,\tau) \le C_5\varrho^k(y)E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times\int\limits_{\Psi}[d(\overline{\xi},\overline{s})]^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}[d(y)]^{r_0-|\overline{\alpha}|}\,d\overline{\xi}.$$

З формули [9, ст. 588] відомо, що для області $\Theta=\{(t_1,...t_n,t_{n+1}):\overline{\theta}=(\frac{t_1}{\alpha_1})^{\beta_1}+...+(\frac{t_{n+1}}{\alpha_{n+1}})^{\beta_{n+1}}\le 1\}$

$$\int\limits_{\Theta} f(\overline{\theta})\prod_{k=1}^{n+1}t_k^{\nu_k-1}\,dt$$

$$=\Gamma\left[\begin{array}{c}\frac{\nu_1}{\beta_1},...,\frac{\nu_{n+1}}{\beta_{n+1}}\\ \frac{\nu_1}{\beta_1}+...+\frac{\nu_{n+1}}{\beta_{n+1}}\end{array}\right]\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\alpha_k^{\nu_k}}{\beta_k}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 f(t)t^{\frac{\nu_1}{\beta_1}+...+\frac{\nu_{n+1}}{\beta_{n+1}}-1}\,dt.$$

Вибираючи $\beta_1=...=\beta_n=2$, $\beta_{n+1}=\frac{1}{b}$, $\alpha_1=...=\alpha_{n+1}=1$, $\nu_1=...=\nu_{n+1}=1$, $f(t)=t^{\frac{p}{2}}$, одержуємо, що інтеграл $\int\limits_{|\overline{\xi}|<1}|\overline{\xi}|^p\,d\overline{\xi}=\int\limits_{|\overline{\xi}|<1}[\xi_1^2+...+\xi_n^2+\xi_{n+1}^{\frac{1}{b}})]^{\frac{p}{2}}\,d\overline{\xi}$ збігається при $p>-n-2b$.

Тоді

$$\mathcal{I}_{12}(y,\tau)\le C_6E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\times$$

$$\times\varrho^{k+r_0-|\overline{\alpha}|}(y)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}q^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\times$$

$$\times q^{n+2b-1}\,dq = C_6\varrho^{k+r_0-|\overline{\alpha}|}(y)\times$$

$$\times E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}q^{r_0-|\overline{\alpha}|-1}\,dq.$$

В останній рівності інтеграл обчислюється, і ми отримаємо

$$\mathcal{I}_{12}(y,\tau)\le C_7[\varrho(y)]^{k+r_0-|\overline{\alpha}|}\times$$

$$\times E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\},\ (y,\tau)\in Q_0. \qquad (10)$$

3) Нехай $P=(x,t)\in Q_0^{13}$. Це означає, що $d(x)\ge\frac{1}{2}d(y)\ge\frac{1}{2M_2}\varrho(y)$ і $|MP|\ge\frac{1}{2}d(y)\ge\frac{1}{2M_2}\varrho(y)$. Тоді підінтегральний вираз в інтегралі $\mathcal{I}_{13}$ обмежений і тому

$$\mathcal{I}_{13}(y,\tau)\le C_8E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\},$$

$$(y,\tau)\in Q_0. \qquad (11)$$

Зауважимо, що $E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}=\exp\{-c(\min[\varrho(y),\tau^{\frac{1}{2b}}])^{\frac{2b}{2b-1}}\tau^{-\frac{1}{2b-1}}\}=\exp\{-c[\varrho(y)]^{\frac{2b}{2b-1}}\tau^{-\frac{1}{2b-1}}\}=E_c(\varrho(y),\tau)$, $d(y)\le\sqrt[2b]{\tau}$. Отже, із (9), (10), (11) випливає, що

$$\mathcal{I}_1(y,\tau)\le\widehat{C}_3E_c\{\varrho(y),\tau\}\times$$

$$\times([\varrho(y)]^{k+1-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}+1),$$

$$(y,\tau)\in Q_0, \qquad (12)$$

де $\widehat{C}_3$ – додатна стала.

Тепер розглянемо інтеграл $\mathcal{I}_2(y,\tau)$. Зауважимо, що $E_c\{\varrho(y,\tau),\tau\}=\exp\{-c\tau^{\frac{1}{2b-1}}\tau^{-\frac{1}{2b-1}}\}=e^{-c}$, $d(y)>\sqrt[2b]{\tau}$.

Розіб'ємо область Q_0^2 на такі підобласті: $Q_0^{21} = \{(x,t) \in Q_0^2 : \, |MP| < \frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}\}$, $Q_0^{22} = Q_0^2 \backslash Q_0^{21}$. Відповідно $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_{21} + \mathcal{I}_{22}$. Розглянемо окремо ці доданки.

1) Оскільки $G_0 = 0$ при $t < \tau$, $|MP| < \frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}$, а отже $t - \tau < \frac{1}{4^b}\tau$ і $|x-y| < \frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}$, то інтегрування здійснюватиметься по області $Q_0^{21\,\tau} = \{(x,t) \in Q_0^2 : \tau < t < M_3\tau, |x-y| < \frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}\}$, де $M_3 = (1 + (\frac{1}{4})^b)$.

Тоді

$$\mathcal{I}_{21}(y,\tau) \le C_9 e^{-c} \int\limits_{\tau}^{M_3\tau} t^{\frac{k}{2b}}\, dt \times$$

$$\times \int\limits_{|x-y|<\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}} |x-y|^{-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}\, dx \le$$

$$\le C_{10} e^{-c} \tau^{\frac{k+r_0-|\overline{\alpha}|}{2b}}, \; (y,\tau) \in Q_0. \tag{13}$$

2)При $P = (x,t) \in Q_0^{22}$ маємо $|MP| > \frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}$. А це означає, що підінтегральний вираз обмежений і тому

$$\mathcal{I}_{22}(y,\tau) \le C_{11} e^{-c}, \; (y,\tau) \in Q_0. \tag{14}$$

Отже, із (13), (14) випливає, що

$$\mathcal{I}_2(y,\tau) \le \widehat{C}_4 e^{-c} [\tau^{\frac{k+r_0-|\overline{\alpha}|}{2b}} + 1], \quad (y,\tau) \in Q_0, \tag{15}$$

де $\widehat{C}_4$ – додатна стала.

З (12) та (15) випливає твердження леми 1 при $|\overline{\alpha}| < 2b$.

Розглянемо випадок $|\overline{\alpha}| \ge 2b$. Знову подаємо інтеграл

$$\mathcal{I}(y,\tau) = D_{y,\tau}^{\overline{\alpha}} \int\limits_{Q_0} \tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t) \times$$

$$\times G_0(x,t;y,\tau)\, dxdt, \; (y,\tau) \in Q_0 \tag{16}$$

як суму інтегралів відповідно до розбиття області Q_0.

1) Якщо $P = (x,t) \in Q_0^{11}$, то P не збігається з точкою M. Тоді інтеграл (16) записуємо у вигляді

$$\mathcal{I}_{11}(y,\tau) = \int\limits_{Q_0^{11}} \tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t) \times$$

$$\times |D_{y,\tau}^{\overline{\alpha}} G_0(x,t;y,\tau)|\, dxdt$$

і проводимо оцінку, як і у випадку $|\overline{\alpha}| < 2b$. Одержуємо

$$\mathcal{I}_{11}(y,\tau) \le C_5 [\varrho(y)]^{k+1-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|} \times$$

$$\times E_c\{\varrho(y),\tau\}, \; (y,\tau) \in Q_0. \tag{17}$$

2) Якщо $P = (x,t) \in Q_0^{12}$, то точка P може збігатися з точкою M. Оскільки $G_0 = 0$ при $t < \tau$, то інтегруємо по $Q_0^{12\tau} = \{(x,t) \in Q_0^{12} : \tau \le t \le T\}$. $\mathcal{I}_{12}(y,\tau)$ оцінюємо як відповідні інтеграли у [2], використовуючи те, що

$$D_{y,\tau}^{\overline{\alpha}} \int\limits_{Q_0^{12\tau}} \tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t) G_0(x,t;y,\tau)\, dxdt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\overline{\beta}| \le |\overline{\alpha}|} C_{\alpha\beta} \int\limits_{Q_0^{12\tau,\varepsilon}} D_{x,t}^{\overline{\beta}} (\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)) \times$$

$$\times (D_{y,\tau} + D_{x,t})^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}\, G_0(x,t;y,\tau)\, dxdt +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\substack{|\overline{\beta}| \le |\overline{\alpha}|, \\ |\gamma| \le |\beta|}} C_{\alpha\beta\gamma} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} D_t^{\beta_0} (\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)) \times$$

$$\times \nu^{\gamma} (-D_x)^{\beta-\gamma} (D_{y,\tau} +$$

$$+ D_{x,t})^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}} G_0(x,t;y,\tau)\, dxdt$$

$$= R_1(y,\tau) + R_2(y,\tau), \tag{18}$$

де $Q_0^{12\tau,\varepsilon} = Q_0^{12\tau} \backslash \{P : |PM| < \varepsilon\}$, $\Gamma_\varepsilon = \{P : |PM| = \varepsilon\}$. Зауважимо, що оператори $(D_{y,\tau} + D_{x,t})^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}$ не збільшують порядок особливості функції G_0. Розглянемо кожну границю окремо. Використовуючи оцінки похідних матриці Гріна та властивість (6), одержуємо

$$R_1(y,\tau) \le C_{12} E_c\{\varrho(y),\tau\} \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{Q_0^{12\tau,\,\varepsilon}} \varrho^{k-|\overline{\alpha}|}(x,t) |MP|^{-n-2b+r_0}\, dxdt.$$

При аналогічній заміні змінних, як і в інтегралі $\mathcal{I}_{12}(y,\tau)$ при $|\overline{\alpha}| < 2b$, $Q_0^{12\tau,\varepsilon}$ перейде в $\Psi_1 = \{\overline{\xi} : \frac{\varepsilon}{d(y)} \le d(\overline{\xi},\overline{s}) < \frac{1}{2}\}$ і одержимо

$$R_1(y,\tau) \le C_{13} [\varrho(y)]^{k-|\overline{\alpha}|} E_c\{\varrho(y),\tau\} \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Psi_1}[d(\overline{\xi},\overline{s})]^{-n-2b+r_0}[d(y)]^{r_0}\,d\overline{\xi}.$$

Використовуючи формулу [9, с.588], матимемо

$$R_1(y,\tau)\le C_{14}[\varrho(y)]^{k+r_0-|\overline{\alpha}|}\times$$

$$\times E_c\{\varrho(y),\tau\}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{d(y)}}^{\frac{1}{2}} q^{-n-2b+r_0}\times$$

$$\times q^{n+2b-1}\,dq\le C_{14}[\varrho(y)]^{k+r_0-|\overline{\alpha}|}\times$$

$$\times E_c\{\varrho(y),\tau\}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{d(y)}}^{\frac{1}{2}} q^{r_0-1}\,dq.$$

В останній рівності інтеграл обчислюється, отже

$$R_1(y,\tau)\le C_{15}[\varrho(y)]^{k+r_0-|\overline{\alpha}|}\times$$

$$\times E_c\{\varrho(y),\tau\}.$$

Розглянемо $R_2(y,\tau)$. Оскільки в локальній системі координат $D_x^{\beta-\gamma}G_0(x,t;y,\tau)=\sum\limits_{|\eta|=0}^{2b-1}\tilde{B}_l(\xi,D'_\xi)(\frac{\partial}{\partial\nu})^{|\eta|}G_0(x,t;y,\tau)$, де $\tilde{B}_l(\xi,D'_\xi)$ – дотичні диференціальні оператори порядку $l=|\beta-\gamma-\eta|-r_0$, то

$$R_2(y,\tau)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}}\sum_{|\eta|=0}^{2b-1}C_{\alpha\beta\gamma}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}D_t^{\beta_0-(|\beta|-|\gamma|-|\eta|-r_0)}(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t))\times$$

$$\times\nu^\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Big)^{|\eta|}G_0(x,t;y,\tau)\,dSdt.$$

Використовуючи оцінки похідних матриці Гріна та властивість (6), одержуємо

$$R_2(y,\tau)\le C_{16}E_c\{\varrho(y),\tau\}\times$$

$$\times\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}}\sum_{|\eta|=0}^{2b-1}[\varrho(y)]^{k-|\overline{\beta}|+|\gamma|+|\eta|+r_0}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}|MP|^{-n-2b+r_0-|\eta|}\,dSdt\le$$

$$\le C_{16}E_c\{\varrho(y),\tau\}\times$$

$$\times\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}}\sum_{|\eta|=0}^{2b-1}[\varrho(y)]^{k-|\overline{\beta}|+|\gamma|+|\eta|+r_0}\times$$

$$\times\varepsilon^{-n-2b+r_0-|\eta|}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}dSdt\le$$

$$\le C_{16}\sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}}\sum_{|\eta|=0}^{2b-1}[\varrho(y)]^{k-|\overline{\beta}|+|\gamma|+|\eta|+r_0}\times$$

$$\times\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{r_0-1-|\eta|}E_c\{\varrho(y),\tau\}.$$

Оскільки $r_0-1-|\eta|\ge 0$, то $R_2(y,\tau)$ — скінченна величина.

Отже,

$$\mathcal{I}_{12}(y,\tau)\le C_{17}E_c\{\varrho(y),\tau\}\times$$

$$\times([\varrho(y)]^{k+r_0-|\overline{\alpha}|}+1),\ (y,\tau)\in Q_0. \qquad (19)$$

3) При $P=(x,t)\in Q_0^{13}$, як і у випадку при $|\overline{\alpha}|<2b$, підінтегральний вираз в $\mathcal{I}_{13}$ обмежений, і тому

$$\mathcal{I}_{13}(y,\tau)\le C_{18}E_c\{\varrho(y),\tau\},$$

$$(y,\tau)\in Q_0. \qquad (20)$$

Отже, із (17), (19), (20) випливає, що

$$\mathcal{I}_1(y,\tau)\le\widehat{C}_5E_c\{\varrho(y),\tau\}\times$$

$$\times([\varrho(y)]^{k+1-n-2b+r_0-|\overline{\alpha}|}+1),$$

$$(y,\tau)\in Q_0, \qquad (21)$$

де $\widehat{C}_5$ – додатна стала.

Тепер розглянемо інтеграл $\mathcal{I}_2(y,\tau)$. Знову подаємо його як суму інтегралів відповідно до розбиття області Q_0^2 і розглядаємо окремо ці доданки.

1) Використовуючи (18), записуємо

$$D_{y,\tau}^{\overline{\alpha}}\int\limits_{Q_0^{21\tau}}\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)G_0(x,t;y,\tau)\,dxdt$$

$$=R_3(y,\tau)+R_4(y,\tau),$$

де $Q_0^{21\tau} = \{(x,t) \in Q_0^2 : \tau \le t \le M_3\tau, \varepsilon < |x-y| < \frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}\}$. Розглянемо кожну границю окремо.

$$R_3(y,\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|} C_{\alpha\beta}\times$$

$$\times \int\limits_{Q_0^{21\tau,\,\varepsilon}} D_{x,t}^{\overline{\beta}}(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t))\times$$

$$\times(D_{y,\tau}+D_{x,t})^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}\,G_0(x,t;y,\tau)\,dxdt,$$

де $Q_0^{21\tau,\,\varepsilon} = Q_0^{21\tau}\backslash\{P{:}|PM|< \varepsilon\}$.

Використовуючи оцінки похідних матриці Гріна та властивість (6), одержуємо

$$R_3(y,\tau) \le C_{19}e^{-c}\times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|} C_{\alpha\beta} \int\limits_{\tau}^{M_3\tau} t^{\frac{k-|\overline{\beta}|}{2b}}\,dt\times$$

$$\times \int\limits_{\varepsilon<|x-y|<\frac{1}{2}\tau^{\frac{1}{2b}}} |x-y|^{-n-2b+r_0}\,dx \le$$

$$\le C_{20}e^{-c}\tau^{\frac{k+r_0-|\overline{\alpha}|}{2b}}.$$

Розглянемо

$$R_4(y,\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}} C_{\alpha\beta\gamma}\times$$

$$\times \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} D_t^{\beta_0}(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t))\times$$

$$\times\nu^\gamma(-D_x)^{\beta-\gamma}\,(D_{y,\tau}+$$

$$+D_{x,t})^{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}G_0(x,t;y,\tau)\,dSdt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}} \sum_{|\eta|=0}^{2b-1} C_{\alpha\beta\gamma}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} D_t^{\beta_0-[|\beta|-|\gamma|-|\eta|-r_0]}(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t))\times$$

$$\times\nu^\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Big)^{|\eta|}G_0(x,t;y,\tau)\,dSdt.$$

Використовуючи оцінки похідних матриці Гріна та властивість (6), одержуємо

$$R_4(y,\tau) \le C_{21}e^{-c}\times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}} \sum_{|\eta|=0}^{2b-1} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} t^{\frac{k-2b\beta_0-(|\beta|-|\gamma|-|\eta|-r_0)}{2b}}\times$$

$$\times|MP|^{-n-2b+r_0-|\eta|}\,dSdt \le C_{22}e^{-c}\times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}} \sum_{|\eta|=0}^{2b-1} \tau^{\frac{k-2b\beta_0-|\beta|+|\gamma|+|\eta|+r_0}{2b}}\times$$

$$\times\varepsilon^{\frac{-n-2b+r_0-|\eta|}{2b}} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} dSdt \le$$

$$\le C_{22}e^{-c} \sum_{\substack{|\overline{\beta}|\le|\overline{\alpha}|,\\ |\gamma|\le|\beta|}} \sum_{|\eta|=0}^{2b-1} \tau^{\frac{k-|\overline{\beta}|+|\gamma|+|\eta|+r_0}{2b}}\times$$

$$\times \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{r_0-|\eta|-1}{2b}}.$$

Оскільки $r_0-1-|\eta| \ge 0$, то $R_4(y,\tau)$ – скінченна величина.

Отже,

$$\mathcal{I}_{21}(y,\tau) \le C_{23}e^{-c}(\tau^{\frac{k+r_0-|\overline{\alpha}|}{2b}}+1),$$

$$(y,\tau)\in Q_0. \tag{22}$$

2) При $P=(x,t)\in Q_0^{22}$, як і у випадку при $|\overline{\alpha}| < 2b$, підінтегральний вираз в $\mathcal{I}_{22}$ обмежений і тому

$$\mathcal{I}_{22}(y,\tau) \le C_{24}e^{-c}, (y,\tau)\in Q_0. \tag{23}$$

Отже, із (22), (23) випливає, що

$$\mathcal{I}_2(y,\tau) \le \widehat{C}_6e^{-c}(\tau^{\frac{k+r_0-|\overline{\alpha}|}{2b}}+1),$$

$$(y,\tau)\in Q_0, \tag{24}$$

де $\widehat{C}_6$ – додатна стала.

З (21), (24) випливає твердження леми при $|\overline{\alpha}| \ge 2b$.

Нехай $(\hat{x},\hat{t})$ – довільна фіксована точка $\overline{Q}_1$.

Лема 2.

$$D_{y,\tau}^{\overline{\alpha}}\int\limits_{Q_0}\tilde{\Phi}_c^k(\min(d(x,t;\hat{x},\hat{t}),t^{\frac{1}{2b}}),t)\times$$

$$\times G_i(x,t;y,\tau)\,dxdt$$

$$= \begin{cases} \widehat{C}_1' E_c(|y-\hat{x}|,\tau)\times \\ \times(|y-\hat{x}|^{k+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|}+1), \\ \qquad\qquad d(y)\le \sqrt[2b]{\tau}, \\ \widehat{C}_2' e^{-c}[\tau^{\frac{k+r_i+(i)-|\overline{\alpha}|}{2b}}+1], \\ \qquad\qquad d(y) > \sqrt[2b]{\tau} \end{cases}$$

для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}$,
$i=\overline{1,m}$, $(y,\tau)\in\overline{Q}_1$, $k>-n-2b$, $\widehat{C}_1'$, $\widehat{C}_2'$ – *додатні сталі.*

Доведення. Випадок $d(y)\le\sqrt[2b]{\tau}$ розглянуто в [2]. Оцінки відповідних інтегралів при $d(y)>\sqrt[2b]{\tau}$ проводимо як у лемі 1, використовуючи оцінки похідних матриці Гріна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, N 1.— С.35—45.

2. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної крайової задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Мат. студії.— 2001.— **15**, N 2.— С.179.—190.

3. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

4. *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями // ДАН СССР.— 1971.— **197**, N 2.— С.261—264.

5. *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Труды Моск. мат. о-ва.— 1970.— **23**.— С.179—234.

6. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач.— К.:Выща школа, 1990.— 200 с.

7. *Солонников В.А.* О матрицах Грина для параболических краевых задач // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР.— 1969.— **14**.— С.256—287.

8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 428 с.

9. *Прудников А.П., Брычков У.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды.— М.: Наука, 1981.— 800 с.

Стаття надійшла до редколегії 7.12.2003