УДК 517.53

© 2004 р. С.С. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПОТОЧКОВА ЗАСТОСОВНІСТЬ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Досліджені умови поточкової застосовності складових операторів нескінченного порядку відносно операторів диференціювання та інтегрування.

Conditions pointwise adaptability constituend operators infinite order relativery of differentiation and integration operators is investigated.

У багатьох працях вивчалися умови застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку до різних просторів аналітичних функцій (див. бібліографію в [1]). Важливе місце займає вивчення умов поточкової застосовності диференціальних операторів нескінченного порядку, що зроблено в працях Ю.Ф. Коробейніка та його учнів [1]–[4].

У цій статті досліджуються умови поточкової застосовності складових операторів нескінченного порядку відносно операторів диференціювання та інтегрування. При одержанні необхідних умов застосовності відповідних операторів нескінченного порядку використовується принцип рівномірної обмеженості. Наведено доведення основних результатів, що анонсовані в [5].

Нехай G– довільна область комплексної площини, а $H(G)$– простір усіх аналітичних в області G функцій, наділений топологією компактної збіжності.

Наведемо спочатку деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай G – довільна область комплексної площини, а $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ – така послідовність лінійних неперервних функціоналів на $H(G)$, що $\forall f \in H(G)$ числова послідовність $(L_n f)_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою. Тоді існує область G_1, яка компактно міститься в G(тобто $\overline{G_1} \subset G$), і для якої всі функціонали послідовності (L_n) однозначно продовжуються до лінійних неперервних функціоналів на $H(G_1)$ і $\forall f \in H(G_1)$ послідовність $(L_n f)$ є обмеженою.*

Доведення. За умовою леми 1, послідовність функціоналів (L_n) є поточково обмеженою на $H(G)$. Тоді, за теоремою Банаха–Штейнгауза, вона одностайно неперервна на $H(G)$. Тому існують стала $C > 0$ і область $G_1' \subset G$, для якої $\overline{G_1'} \subset G$ такі, що

$$\forall f \in H(G)\ \forall n \geq 1 :$$

$$|L_n(f)| \leq C \max\{|f(z)| : z \in \overline{G_1'}\}. \qquad (1)$$

За теоремою 9 з [6] кожен із функціоналів $L_n, n = 1, 2, \ldots$ однозначно продовжується до лінійного неперервного функціонала на просторі $B(\overline{G_1'})$, де $B(\overline{G_1'})$ – банаховий простір функцій, які аналітичні в G_1' і неперервні на $\overline{G_1'}$ з нормою $||f|| = \max\{|f(z)| : z \in \overline{G_1'}\}, f \in B(\overline{G_1'})$. Зберігаючи для продовжених функціоналів попередні позначення, за теоремою Банаха–Штейнгауза одержимо, що нерівності (1) виконуються також для кожної функції $f \in B(\overline{G_1'})$. Взявши довільну область G_1, для якої $\overline{G_1'} \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset G$, одержимо шукану область G.

Лема 2. *Нехай для послідовності комплексних чисел $(c_n^{(k)})_{n=0}^{\infty}, k = \overline{1,m}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n^{(k)}|} = c_k, k = \overline{1,m}$, причому $c_i \neq c_j, i \neq j$. Тоді $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sum\limits_{n=1}^{m} c_n^{(k)}|} = \max\{c_k, k = \overline{1,m}\}$.*

Доведемо основне твердження статті.

Теорема 1. *Нехай G – довільна область комплексної площини $\mathbf{C}$, а $z_k \in G, k = \overline{1,m}$,* *причому $z_k \neq z_m$ при $k \neq m$. Тоді для послідовностей комплексних чисел $(a_n^{(k)})_{n=0}^{\infty}, k = \overline{1,m}$ рівносильні наступні умови:*

а) ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} a_n^{(k)} f^{(n)}(z_k) \qquad (2)$$

збігаеться для довільної функції f з простору $H(G)$;

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|a_n^{(k)}|} < \rho(z_k, \partial G)$ при $k = \overline{1,m}$, де $\rho(z, \partial G) = inf\{|z-t| : t \in \partial G\}$;

в) ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} f^{(n)}(z_k), k = \overline{1,m}$ збігаються одночасно для будь-якої функції $f \in H(G)$.

Доведення. Умова а) випливає з в). За теоремою 1, з [2] умова б) випливає з в). Доведемо тепер, що з а) випливає б). Нехай ряд (2) збігається для довільної функції f з простору $H(G)$. Покажемо спочатку, що виконуються нерівності

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|a_n^{(k)}|} < \infty, k = \overline{1,m}. \qquad (3)$$

Розглянемо послідовність лінійних неперервних функціоналів $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ на просторі $H(G)$:

$$L_n(f) = \sum_{n=1}^{m} a_n^{(k)} f^{(n)}(z_k). \qquad (4)$$

Згідно з припущенням, послідовність $(L_n)_{n=0}^{\infty}$ поточково обмежена на просторі $H(G)$. За теоремою Банаха-Штейнгауза, вона є одностайно неперервною, тобто існує компактна множина $K \subset G$ і стала $C > 0$, для яких

$$|L_n f| \leq C \max\{|f(z)| : z \in K\},$$
$$n = 0, 1, ..., f \in H(G). \qquad (5)$$

Зафіксуємо довільне $k, k = \overline{1,m}$. Вважаючи в n-ій нерівності (5) $f(z) = \frac{1}{z-z_k}\prod\limits_{i=1}^{m}(z-z_i)^{n+1}$, одержимо

$$|a_n^{(k)} n! \prod_{i=1, i\neq k}^{m} (z_k - z_i)^{n+1}| \leq$$
$$\leq C \max\{|\frac{1}{z-z_k}\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)^{n+1}| : z \in K\}.$$

Тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|a_n^{(k)}|} \leq \frac{\max\{\prod\limits_{i=1}^{m}|z-z_i| : z \in K\}}{\prod\limits_{i=1, i\neq k}^{m}|z_k - z_i|}.$$

і нерівності (3) виконуються. Позначимо $A_k = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!|a_n^{(k)}|}, k = \overline{1,m}$, і доведемо, що

$$A_k < \rho(z_k, \partial G), k = \overline{1,m}. \qquad (6)$$

У випадку $G = \mathbf{C}$ нерівності (5) випливають з (3). Нехай тепер $G \neq \mathbf{C}$. Оскільки послідовність лінійних неперервних функціоналів (4) є поточково обмеженою на $H(G)$, то, за лемою 1, існує область G_1, яка компактно міститься в G і така, що ця послідовність функціоналів поточково обмежена на $H(G_1)$. Тоді, за теоремою Банаха-Штейнгауза, послідовність функціоналів (4) одностайно неперервна на $H(G_1)$, тобто існує компактна множина $K_1 \subset G_1$ і стала $C > 0$,для яких

$$|L_n(f)| \leq \max\{|f(z)| : z \in K\},$$
$$n = 0, 1, ..., f \in H(G_1). \qquad (7)$$

Припускаючи в (7) $f(z) = \frac{1}{\lambda - z}$, де $\lambda \notin G_1$, одержимо

$$|\sum_{k=1}^{m} \frac{n! a_n^{(k)}}{(\lambda - z_k)^{n+1}}| \leq C \max\{\frac{1}{|\lambda - z|} : z \in K\}.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\sum_{k=1}^{m} \frac{n! a_n^{(k)}}{(\lambda - z_k)^{n+1}}|} \leq 1, \forall \lambda \notin G_1. \qquad (8)$$

Зафіксуємо довільне $k, k = \overline{1,m}$, і $\lambda_k \in \partial G$ таке, що $\rho(z_k, \partial G) = |z_k - \lambda_k|$. Оскільки $\lambda \notin \overline{G_1}$, то існує круг $V_\delta(\lambda_k) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| < \delta\}$, який міститься в множині $\mathcal{C}\overline{G_1}$. Розглянемо множину $U = V_\delta(\lambda_k) \bigcap V_{|z_k - \lambda_k|}(z_k)$. Тоді для довільного $\lambda \in U$ одночасно виконується нерівність (8) і $|\lambda - z_k| < |\lambda_k - z_k|$. Оскільки для кожної пари чисел $i, j = \overline{1,m}, i \neq j$, рівняння $\frac{A_i}{|\lambda - z_i|} = \frac{A_j}{|\lambda - z_j|}$ визначає в λ-площині коло або пряму, то існує $\lambda' \in U$, для якого $\frac{A_i}{|\lambda' - z_i|} \neq \frac{A_j}{|\lambda' - z_j|}$ при $i \neq j$. Зафіксуємо таке λ'. Тоді для цього λ' за лемою 2 одержимо, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\sum_{k=1}^{m} \frac{n! a_n^{(k)}}{(\lambda - z_k)^{n+1}}|} =$$

$$= \max\{\frac{A_i}{|\lambda' - z_i|} : i = \overline{1,m}\}. \tag{9}$$

Використовуючи (8) для $\lambda = \lambda'$ і (9), одержимо, що

$$\max\{\frac{A_i}{|\lambda' - z_i|} : i = \overline{1,m}\} \leq 1.$$

Тому $A_k \leq |\lambda' - z_k|$. Але $|\lambda' - z_k| < |\lambda_k - z_k| = \rho(z_k, \partial G)$. Таким чином, $A_k < \rho(z_k, \partial G)$, чим і завершується доведення теореми 1.

Зауваження. У такий спосіб (з використанням теореми Банаха-Штейнгауза) можна довести також необхідність умов тереми 1 праці [2], що значно спрощує доведення цієї теореми в порівнянні з наведеним у [2].

Для операторів нескінченного порядку відносно оператора звичайного інтегрування є правильним наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай G – зіркова відносно початку координат область комплексної площини, $z_k, k = \overline{1,m}$ – різні точки з області G, які відмінні від нуля, і $(a_n^{(k)})_{n=0}^{\infty}, k = \overline{1,m}$ – послідовності комплексних чисел. Для того, щоб ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} a_n^{(k)} (I^n f)(z_k)$$

збігався для довільної функції f з простору $H(G)$, необхідно й досить, щоб при $i = 0, 1, ..., m-1$ збігалися ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} a_n^{(k)} \frac{z_k^{n+i}}{(i+n)!}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1983.— 155 с.

2. *Коробейник Ю.Ф.* О применимости диференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. матем. журн.— 1969.— **10**, N 3.— С.549—557.

3. *Моржаков В.В., Еременко П.Л.* О поточечной проименимости дифференциального оператора бесконечного порядка // Актуальные проблемы матем. анализа: Сб. научн. тр.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1978.— С.125—131.

4. *Ха Зуй Банг.* О применимости составных дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами // Известия СКНЦВШ. Естественные науки.— 1982.— N 2.— С.20—23.

5. *Лінчук С.С.* Про поточну застосовність деяких класів операторів нескінченного порядку // Міжнародна наукова конференція "Шості Боголюбівські читання" (26–30 серпня 2003 р.). Тези доп.— К.: Ін-т математики НАН України, 2003.— 312 с.

6. *Kote G.* Dualitat in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math.— 1953.— **191**.— S.30—49.

7. *Линчук С.С.* О применимости дифференциальных и интегральных опраторов бесконечного порядка.— Деп. в ВИНИТИ, 1982.— N 1799-82.— 25 с.

Стаття надійшла до редколегії 26.11.2003