УДК 517.53

©2004 р. Н.Є. Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ІНВАРІАНТНІ ПІДПРОСТОРИ ОПЕРАТОРІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ В ПРЯМІЙ СУМІ ПРОСТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Досліджена структура замкнених інваріантних підпросторів матричних операторів відносно узагальненого інтегрування Гельфонда– Леонтьєва.

Structure isolated invariants subspaces of matrixs operators with respect to Gelfond-Leontiev generalized integration is investigated.

Вивчення структури інваріантних підпросторів класичних операторів має важливе значення в теорії операторів, що діють у функціональних просторах. У працях М.К. Нікольського [1], М.І. Нагнибіди [2], В.А. Ткаченко [3] та інших математиків (див. огляд [4]) вивчався опис усіх нетривіальних замкнутих інваріантних підпросторів операторів звичайного та узагальненого інтегрувань, що діють у різних просторах аналітичних функцій. У всіх зазначених працях оператори, які досліджувалися, мали одноклітковую структуру, тобто множини їхніх інваріантних підпросторів лінійно впорядковані відносно включень. Інваріантні підпростори степеня звичайного та узагальненого інтегрувань досліджувалися в [5] та [6].

У цій статті досліджена структура інваріантних підпросторів матричних операторів відносно узагальненого інтегрування Гельфонда–Леонтьєва. Встановлено, що такі оператори вже не є одноклітковими.

Нехай G– довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини. Через $H(G)$ позначимо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а символом $\mathcal{L}(H(G))$– множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють в $H(G)$. Для додатньої сталої ρ і комплексного числа μ, що задовольняє умову $Re\mu > 0$, через $I_{\rho,\mu}$ позначається оператор узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва [7], який неперервно діє в $H(G)$ за правилом

$$(I_{\rho,\mu})(z) = \frac{z}{\Gamma(\frac{1}{\rho})} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\rho}-1} t^{\mu-1} f(zt^{\frac{1}{\rho}})dt.$$

В [7] було показано, що для оператора $I_{\rho,\mu}$ в просторі $H(G)$ існує правий обернений оператор $D_{\rho,\mu}$, який є оператором узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва.

Для фіксованого натурального n через $H = H^{(n)}(G)$ позначимо простір, який є прямою сумою (декартовим добутком) n екземплярів просторів $H(G)$, а через $\mathcal{L}\ (H^{(n)}(G))$– простір усіх лінійних неперервних операторів, що діють у $H^{(n)}(G)$. За характеристикою лінійних неперервних операторів, що діють у прямій сумі просторів [8], кожен оператор $T \in \mathcal{L}\ (H^{(n)}(G))$ однозначно визначається операторною матрицею $[T_{i,j}]_{i,j=0}^{n-1}$, де $T_{i,j} \in \mathcal{L}\ H(G)$. При цьому для елемента $g = (g_0, g_1, ...g_{n-1}) = (g_k)_{k=0}^{n-1} \in H^{(n)}(G)$:

$$(Tg)_k = \sum_{i=0}^{n-1} T_{ki} g_i,\ k = \overline{o, n-1}.$$

Через I позначимо оператор, що діє в просторі $H^{(n)}(G)$ за правилом: $Ig = (Ig_k)_{k=0}^{n-1}$. Зрозуміло, що оператор I визначається матрицею $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}$, де δ_{ki} – символ Кронекера. Опишемо всі замкнені підпростори простору H, які інваріантні відносно оператора I.

Теорема. *Для того, щоб M був замкненим підпростором простору H =*

$H^{(n)}(G)$, інваріантним відносно оператора $I = [\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}$, необхідно й досить, щоб M подавався у вигляді

$$M = T(I_{\rho,\mu}^{m_0} H(G) \oplus I_{\rho,\mu}^{m_1} H(G) \oplus ... \oplus I_{\rho,\mu}^{m_{n-1}} H(G)), \quad (1)$$

де T – деякий ізоморфізм простору H, що комутує з оператором I, $m_k, k = \overline{(0, n-1)}$– цілі невід'ємні числа або символи $+\infty$ (у випадку $m_k = +\infty$ вважаємо $I_{\rho,\mu}^{m_k} H(G) = 0$)

Доведення. Оскільки достатність умов теореми є очевидною, то доведемо їх необхідність методом індукції по n. У [3] та [6] доведено, що підпростір $M \subset H(G)$ є замкненим інваріантним підпростором відносно оператора $I_{\rho,\mu}$ в $H(G)$ тоді і тільки тоді, коли $M = I_{\rho,\mu}^m H(G)$, де m — деяке ціле невід'ємне число, тому при $n = 1$ теорема є правильною.

Допустимо, що твердження теореми правильне для деякого натурального числа n і доведемо його істинність для $n+1$. Нехай M–ненульовий замкнений підпростір простору $H^{n+1}(G)$, який інваріантний відносно оператора $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}$, тобто

$$\forall g = (g_k)_{k=0}^{n} \in M : (I_{\rho,\mu} g_k)_{k=0}^{n} \in M. \quad (2)$$

Для кожного $j, 0 \le j \le n$, припустимо, що $p_j = min\{i \ge 0 : g_j^{(i)}(0) \ne 0$ і $\exists g_0, g_1, ..., g_{j-1}, g_{j+1}, ... g_n : (g_k)_{k=0}^{n} \in M\}$. Деякі з чисел p_j можуть дорівнювати ∞, але серед них існує принаймні одне скінченне, оскільки підпростір M – ненульовий. Позначимо $p = min\{p_j : 0 \le j \le n\}$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $p = p_n$. Розглянемо підпростір $M' \subset H^{(n+1)}(G)$, який визначається наступним чином:

$$M' = \{(D_{\rho,\mu}^{p} g_k)_{k=0}^{n} : (g_k)_{k=0}^{n} \in M\}. \quad (3)$$

За визначенням числа p і умови (2) випливає, що M' є замкненим підпростором простору $H^{(n+1)}(G)$, інваріантним відносно оператора $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n}$, а також, що існує елемент $(\varphi_k)_{k=0}^{n} \in M'$, для якого $\varphi_n(0) \ne 0$. Тому існує ізоморфізм $T_n \in \mathcal{L}(H(G))$, що комутує з $I_{\rho,\mu}$ і для якого $T_n 1 = \varphi_n(z)$ (див.[7], наслідок 2). Розглянемо ще оператори $T_k \in \mathcal{L}(H)$, які переставні з $I_{\rho,\mu}$ в $H(G)$ і для яких $T_k 1 = -T_n^{-1} \varphi_k, k = \overline{0, n-1}$. (див.[7]). За допомогою цих операторів побудуємо ізоморфізм простору $H^{(n+1)}(G)$, який переставний з $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n}$ і діє за правилом

$$T(g_k)_{k=0}^{n} =$$

$$= (g_0 + T_0 g_n, g_1 + T_1 g_n, ..., g_{n-1} + T_{n-1} g_n, T_n^{-1} g_n,).$$

Позначимо

$$M'' = TM'. \quad (4)$$

Зрозуміло, що $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n}(M'') \subset M''$ і $T(\varphi_k)_{k=0}^{n} = (0, 0, ..., 0, 1) \in M''$. Оскільки M'' – замкнений підпростір простору $H^{(n+1)}(G)$, інваріантний відносно оператора $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n}$ і $(0, 0, ..., 0, 1) \in M''$, то

$$(0, 0, ..., 0, 1) \in M'', \forall g \in H(G). \quad (5)$$

Розглянемо далі простір $N = \{(g_k)_{r=0}^{n-1} : \exists g_n \in H(G), (g_k)_{k=0}^{n} \in M''\}$. З (5) випливає, що $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}(N) \subset N$, тобто N– замкнений підпростір простору $H^n(G)$, що інваріантний відносно оператора $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}$. Тому за індуктивним припущенням існує ізоморфізм $T' \in \mathcal{L}\ (H^n(G))$, що комутує з $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}$ і цілі невід'ємні числа $s_0, s_1, ..., s_{n-1}$ (або символи $+\infty$), для яких

$$N = T'(I_{\rho,\mu}^{s_0} H(G) \oplus I_{\rho,\mu}^{s_1} H(G) \oplus ... \oplus I_{\rho,\mu}^{s_{n-1}} H(G)). \quad (6)$$

За допомогою оператора T' побудуємо оператор $T'' \in \mathcal{L}(H^{(n+1)}(G))$, який діє за правилом $T''(g_k)_{k=0}^{n} = (f_0, f_1, ..., f_{n-1}, g_n)$, де $(f_k)_{k=0}^{n-1} = T'(g_k)_{k=0}^{n-1}$. Зрозуміло, що T'' — ізоморфізм простору $H^{(n+1)}(G)$, який комутує з $[\delta_{ki} I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n}$, З (5) та (6) випливає, що

$$M'' = T''(I_{\rho,\mu}^{s_0} H(G) \oplus I_{\rho,\mu}^{s_1} H(G) \oplus ... \oplus I_{\rho,\mu}^{s_n} H(G)) \quad (7)$$

де $s_n = 0$. Враховуючи (3),(4) і (7), одержимо, що

$$M = [\delta_{ki} I_{\rho,\mu}^{p}]_{k,i=0}^{n} M' =$$

$$= [\delta_{ki} I_{\rho,\mu}^{p}]_{k,i=0}^{n} T^{-1} T''(I_{\rho,\mu}^{s_0} H(G) \oplus I_{\rho,\mu}^{s_1} H(G) \oplus$$

$$\oplus ... \oplus I_{\rho,\mu}^{s_n} H(G)) = T^{-1} T''(I_{\rho,\mu}^{s_0} H(G) \oplus$$

$$\oplus I_{\rho,\mu}^{s_1} H(G) \oplus ... \oplus I_{\rho,\mu}^{s_n} H(G)),$$

чим і завершується доведення теореми, оскільки T'' – ізоморфізм простору $H^{(n+1)}(G)$, що комутує з $[\delta_{ki}I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n}$, оскільки такими є оператори T^{-1} та T''.

Наслідок. *Загальний вигляд замкнених підпросторів $M \subset H^{(n)}(G)$, інваріантних відносно оператора $I = [\delta_{ki}I_{\rho,\mu}]_{k,i=0}^{n-1}$, задаеться формулою*

$$M = T(z^{m_0}H(G) \oplus z^{m_1}H(G) \oplus ... \oplus z^{m_{n-1}}H(G)),$$

де T– деякий ізоморфізм простору $H^{(n)}(G)$, що комутує з оператором I, а $m_k, k = \overline{0, n-1}$ – деякі цілі невід'ємні числа або символи $+\infty$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Никольский Н.К.* Инвариантные подпространства и базисы из обобщенных первообразных в смысле А.О. Гельфонда—А.Ф. Леонтьева// Матем. исследования: Респ. межвед. науч. сб.— Кишинев, 1968.— **3**, вып.4.— С.101—116.

2. *Нагнибида Н.И.* О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве // Сиб. матем. журн.— 1966.— **7**, N 6.— С.1306—1318.

3. *Ткаченко В.А.* Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов // Матем. заметки.— 1977.— **22**, N 2.— С.221—230.

4. *Никольский Н.К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Матем. анализ.— **12**.— М.: ВИНИТИ, 1974.— С.199—412.

5. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій.— К.: Ін-т математики НАН України, 1995.— 297 с.

6. *Линчук Н.Е.* Представление решений некоторых операторных уравнений в аналитических пространствах и их применения.— Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.— Черновцы, 1987.— 120 с.

7. *Линчук Н.Е.* Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева // Изв. вузов. Матем.— 1985.— N 5.— С.72—74.

8. *Халмош.П.* Гильбертово пространство в задачах.— М.: Мир, 1970.— 352 с.

9. *Линчук С.С., Нагнибида Н.И.* Замечания о базисах в некоторых в пространствах аналитических функций // Известия СКНЦ ВШ. Естественные науки.— 1980.— N 2.— С.16—19.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.2004