УДК 517.98

©2004 р. О.М. Ленюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ ПО t, ЩО МІСТЯТЬ m ОПЕРАТОРІВ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Встановлена коректна розв'язність задачі Коші для одного класу еволюційних рівнянь вищого порядку по t, що містять m операторів диференціювання нескінченного порядку і початковими умовами, які є узагальненими функціями нескінченного порядку з просторів $(W_M^\Omega)'$.

The correct solvability of the Cauchy problem is established for the one class of evolutionary equations of higher order on t with m operators of the infinite order and initial conditions, which are the generalized functions of the infinite order from the $(W_M^\Omega)'$ spaces.

Останнім часом актуальними є задачі, в яких граничні умови є узагальненими функціями. Дослідженню граничних властивостей гладких у шарі $\Omega^n \equiv (0,T]\times\mathbb{R}^n$ розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними при наближенні до гіперплощини $t = 0$ у випадку, коли початкова умова є узагальненою функцією, присвячено праці багатьох вітчизняних учених, таких як М.Л. Горбачук, В.І. Горбачук, П.І. Дудников, О.І. Кашпіровський та ін. У працях В.В. Городецького та його учнів викладено результати досліджень, що стосуються теорії граничних значень у просторах узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій) гладких у шарі розв'язків рівнянь із частинними похідними параболічного типу з різними особливостями (коефіцієнти рівняння стають необмеженими при $|x| \to \infty$, рівняння можуть мати особливість при похідній по t, містити псевдодиференціальний оператор) [1]. Також деякі результати узагальнені на випадок рівнянь із похідними вищого порядку по t (в тому числі й похідними дробового порядку) (див., наприклад, [1], [2], [3]). У праці [4] автор разом із В.В. Городецьким дослідили коректну розв'язність задачі Коші для одного класу еволюційних рівнянь з m операторами диференціювання нескінченного порядку у випадку, коли початкова умова є узагальненою функцією з простору $\left(W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n)\right)'$. Дана стаття присвячена дослідженню коректної розв'язності задачі Коші для одного класу еволюційних рівнянь вищого порядку по t, що містять m операторів диференціювання нескінченного порядку й початковими умовами, які є узагальненими функціями нескінченного порядку з просторів $\left(W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n)\right)'$.

1. Означення просторів $W_M^\Omega \equiv W_{M_1,\dots,M_n}^{\Omega_1,\dots,\Omega_n}$ та основні операції в цих просторах [4,5]. Розглянемо функції $\omega_j : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $j=\overline{1,n}$, які є неперервними й зростаючими, причому $\omega_j(0) = 0$, $\omega_j(1) > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega_j(x) = +\infty$, $j = 1,\dots,n$. Для $x \geq 0$ вважатимемо $\Omega_j(x) = \int\limits_0^x \omega_j(\xi)d\xi$, $j = 1,\dots,n$. Довизначимо функції Ω_j на $(-\infty,0]$ парним чином. Водночас розглянемо функції μ_j, M_j, які володіють тими ж властивостями, що й відповідні функції ω_j, Ω_j, $j = 1,\dots,n$.

Визначимо простір $W_M^\Omega \equiv W_{M_1,\dots,M_n}^{\Omega_1,\dots,\Omega_n}$, який складається з усіх цілих функцій $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, для яких виконується нерівність

$$\exists C > 0 \exists a_j > 0 \exists b_j > 0, j = 1,\dots,n,$$

$$\forall z = x + iy \equiv (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n : |\varphi(z)| \equiv |\varphi(z_1, \ldots, z_n)| \leq \leq Ce^{-M_1(a_1x_1)-\ldots-M_n(a_nx_n)+\Omega_1(b_1y_1)+\ldots+\Omega_n(b_ny_n)}. \tag{1}$$

Мультиплікатором у просторі W_M^Ω буде, наприклад, ціла однозначна функція $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_j > 0, j = 1, \ldots, n, \exists C_\varepsilon > 0$$

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}^n : \ |f(z)| \equiv |f(z_1, \ldots, z_n)| \leq \leq C_\varepsilon e^{M_1(\varepsilon_1x_1)+\ldots+M_n(\varepsilon_nx_n)+\Omega_1(\varepsilon_1y_1)+\ldots+\Omega_n(\varepsilon_ny_n)}. \tag{2}$$

Простір W_M^Ω є повним досконалим злічено нормованим простором.

У просторі W_M^Ω визначені й неперервні операції диференціювання, множення на незалежні змінні та операція зсуву аргументу [4].

Визначимо операцію диференціювання нескінченного порядку в просторі W_M^Ω. Нехай $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|k|=j} c_k z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$ – деяка ціла функція (тут $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультиіндекс, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $|k| = = k_1 + \ldots + k_n$). Говоритимемо, що в просторі W_M^Ω задано диференціальний оператор $f(D) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|k|=j} c_k D^k$, $D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}$, нескінченного порядку, якщо для довільної основної функції $\varphi \in W_M^\Omega$ ряд

$$f(D)\varphi(z) := \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{|k|=j} c_k \left(D^k\varphi\right)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору W_M^Ω.

Теорема 1. *Якщо ціла функція $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ є мультиплікатором у просторі W_M^Ω, тобто виконується нерівність (2), то в просторі $W_{M^1}^{\Omega^1}$ визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку $f(-iD) \equiv \equiv B_f$, (тут $M^1(x) = (M_1^1(x_1), \ldots, M_n^1(x_n))$, $\Omega^1(y) = (\Omega_1^1(y_1), \ldots, \Omega_n^1(y_n))$, M_j^1, Ω_j^1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M_j, Ω_j, $j = 1, \ldots, n$ [5]).*

Простори типу W перетворенням Фур'є відображаються в простори типу W, причому

$$F[W_M^\Omega] \equiv F[W_{M_1,\ldots,M_n}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}] = W_{M^1}^{\Omega^1} \equiv W_{M_1^1,\ldots,M_n^1}^{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_n^1},$$

де F – перетворення Фур'є.

Символом $P_M^\Omega \equiv P_{M_1,\ldots,M_n}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}$ позначимо клас цілих однозначних функцій $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторі $W_M^\Omega \equiv \equiv W_{M_1,\ldots,M_n}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}$ і такими, що $e^\varphi \in W_M^\Omega$.

Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на $W_{M^1}^{\Omega^1}$, позначимо $\left(W_{M^1}^{\Omega^1}\right)'$. Для узагальненої функції $f \in \left(W_{M^1}^{\Omega^1}\right)'$ задамо згортку формулою

$$(f * G)(t, z) =< f, T_{-z}^n \hat{G}(t, \cdot) >=$$

$$=< f, G(t, z - \cdot) >, \ \ t \in (0, T], \ z \in \mathbb{C}^n,$$

де $\hat{G}(t, \xi) = G(t, -\xi)$.

Символом $W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n)$ позначимо сукупність функцій із простору $W_{M^1}^{\Omega^1}$, заданих на $\mathbb{R}^n$.

2. Простір $\mathcal{D}'_+$ [1]. Символом $\mathcal{D} \equiv \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R})$ позначається множина всіх фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}$ зі слабкою збіжністю позначається символом $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Елементи $\mathcal{D}'$ називаються узагальненими функціями. Сукупність узагальнених функцій із $\mathcal{D}'$, які обертаються в нуль на півосі $(-\infty, 0)$, позначається через $\mathcal{D}'_+$. Має місце наступне твердження [1].

Теорема 2. *Нехай $\{f, g\} \subset \mathcal{D}'_+$. Тоді їхня згортка $f * g$ існує в $\mathcal{D}'_+$ і*

$$< f*g, \varphi >=< f(x)\times g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y) >,$$

$$\varphi \in \mathcal{D},$$

де η_1 і η_2 – довільні функції з простору $C^\infty(\mathbb{R})$, рівні одиниці в околі піввісі $[0, \infty)$ і нулю для досить великих від'ємних значень аргументу.

$\mathcal{D}'_+$ утворює асоціативну й комутативну алгебру відносно операції згортки. Оскільки

$\delta * f = f * \delta = f, \forall f \in \mathcal{D}'_+$, то одиницею в ній є δ- функція Дірака.

Якщо узагальнена функція $f = f_t$ залежить від параметра t, $f_t \in \mathcal{D}'_+$ при кожному t, існує $\dfrac{\partial f_t}{\partial t}$, $g \in \mathcal{D}'_+$, то тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * g) = \frac{\partial f_t}{\partial t} * g.$$

Нехай узагальнена функція $f_\alpha \in \mathcal{D}'_+$ залежить від параметра α, $-\infty < \alpha < +\infty$, і визначається формулою

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta(t) t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha > 0, \\ \\ f^{(m)}_{\alpha+m}(t), & \alpha \le 0, \end{cases}$$

де m– найменше серед натуральних чисел таке, що $m + \alpha > 0$, θ– функція Хевісайда.

Правильними є наступні твердження [1]:

1) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R} : f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

2) Нехай $I(\alpha) f = f * f_\alpha, \forall f \in \mathcal{D}'_+$. Тоді:

а) $\forall f \in \mathcal{D}'_+ : I(0) f = f$;

б) $\forall f \in \mathcal{D}'_+ : \forall n \in \mathbb{N} : I(-n) f = f^{(n)}$;

в) $\forall f \in \mathcal{D}'_+ : \forall n \in \mathbb{N} : (I(n) f)^{(n)} = f$;

г) $\forall f \in \mathcal{D}'_+ : \forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R} : I(\alpha) I(\beta) f = I(\alpha + \beta) f$.

Завдяки властивостям б) і в) оператори $I(\alpha)$ при $\alpha < 0$ називають операторами дробового диференціювання, а при $\alpha > 0$– операторами дробового інтегрування в $\mathcal{D}'_+$.

3. Задача Коші для одного класу еволюційних рівнянь вищого порядку по t з m операторами диференціювання нескінченного порядку.

Нехай $\varphi_j \in P^\Omega_M$, B_{φ_j}– оператор диференціювання нескінченного порядку, побудований в п. 1 (теорема 2) за функцією φ_j, $j = \overline{1, m}$.

Розглянемо рівняння

$$D^\beta_t u(t, x) = D^{\{\beta\}}_t (B_{\varphi_1} + \ldots + B_{\varphi_m})^{-[\beta]} u(t, x), \qquad (t, x) \in \Omega^n, \tag{3}$$

де $\beta \in [-3, 0)$, $[\beta]$– ціла, а $\{\beta\}$– дробова частина числа β, $D^\beta_t \equiv I(\beta)$– оператор дробового диференціювання, який діє по змінній t у просторі $\mathcal{D}'_+$.

Під розв'язком рівняння (3) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови:

1) $u(\cdot, x) \in \mathcal{D}'_+ \cap C^{-[\beta]}((0, \infty))$ при кожному $x \in \mathbb{R}^n$;

2) $u(t, \cdot) \in \mathcal{D}(B_{\varphi_j})$, $j = \overline{1, m}$, при кожному $t > 0$; $u(t, \cdot) = 0$ при $t < 0$;

3) u задовольняє рівняння (3).

Якщо $\beta \in [-3, -1)$, то припускаємо, що u задовольняє також наступну умову:

4) для довільного фіксованого проміжку $[\delta, +\infty) \subset (0, +\infty)$ існує стала $c = c(\delta) > 0$ така, що

$$\sup_{t \in [\delta, +\infty)} \|D^{\{\beta\}}_t u(t, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le c.$$

Якщо для рівняння (3) задана початкова умова

$$D^{\{\beta\}}_t u(t, \cdot)|_{t=0} = f, \tag{4}$$

де $f \in \left(W^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)\right)'$, то під розв'язком задачі Коші (3), (4) розумітимемо розв'язок рівняння (3), який задовольняє початкову умову (4) у тому сенсі, що

$$D^{\{\beta\}}_t u(t, \cdot) \to f, \ t \to +0$$

у просторі $\left(W^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)\right)'$.

Має місце наступне основне твердження.

Теорема 3. *Задача Коші (3), (4) коректно розв'язна в просторі $\left(\tilde{W}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)\right)'$, $p = -[\beta]$. Її розв'язок зображається формулою*

$$u(t, x) = \theta(t) z(t, x) * f_{-\{\beta\}}(t), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

де $z(t, x) = (f * G)(t, x)$, $(t, x) \in \Omega^n$,

$$G(t, x) = F^{-1}[\exp\{t(\varphi_1(\sigma) + \ldots + \varphi_m(\sigma))\}](t, x).$$

При цьому $u(t, \cdot) \in W^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)$ при кожному $t > 0$.

Доведення проводиться за допомогою методики доведення теореми 2.7 з книги [1].

Зауваження. Якщо β набуває цілих значень, то рівняння (3) перетворюється в диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку при $\beta = -1$, другого порядку при $\beta = -2$ та третього порядку при $\beta = -3$ відносно t:

$$\frac{\partial^p u(t,x)}{\partial t^p} = (B_{\varphi_1} + \ldots + B_{\varphi_m})^p u(t,x),$$

де $p = -[\beta]$, а початкова умова набуває вигляду

$$u(t,\cdot) \to f, \ t \to +0.$$

Зокрема, при $\beta = -1$ ми одержуємо результат, сформульований у праці [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу.— Чернівці: Рута, 1998.— 219 с.

2. *Ленюк О.М.* Задача Коші для одного класу параболічних псевдодиференціальних рівнянь вищих порядків по t // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр.— К.: Ин-т матем. НАН Украины, 1999.— С.131—135.

3. *Мартинюк О.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь вищого порядку по t з оператором Бесселя нескінченного порядку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 160. Математика.— Чернівці: Рута, 2003.— С.95—98.

4. *Городецкий В.В., Ленюк О.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки.— 2000.— N 4.— С.65—70.

5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.12.2003