УДК 517.982

©2004 р. Р.С. Колісник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРОСТОРІВ ТИПУ C'

Вивчаються властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій нескінченного порядку з просторів типу C', згорток, згортувачів та мультиплікаторів.

The properties of Fourier transform of generalized functions of infinite order of type C', convolutions, convolutors and multiplicators and studied.

Метод інтегральних перетворень (Фур'є, Фур'є-Бесселя, Лежандра, Лапласа, Вебера, Ганкеля та ін.) є одним із ефективних методів побудови розв'язків задач математичної фізики в різних формах, зручних для аналітичного дослідження. У праці [1] введено простори типу C цілих функцій, порядок спадання яких та їхніх похідних на дійсній осі характеризуються величинами $m_{kn} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(n)}(x)|$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$; при цьому простори S_α, S^β, S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$, а також простори типу W, введені в [2], [3], утворюють певні підкласи наведених просторів. Тут вивчаються властивості перетворення Фур'є узагальнених функцій – лінійних неперервних функціоналів, заданих на основних функціях із просторів типу C; згорток, згортувачів та мультиплікаторів.

1. Простори основних функцій.

Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел таку, що

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{m_n}}{n} = 0$, $m_0 = 1$;

2) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;

3) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leq M h^n m_n$ і вважатимемо

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{|x|^n}{m_n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція ρ – неперервна, парна на $\mathbb{R}$, монотонно зростає на $[1, +\infty)$ і монотонно спадає на $(-\infty, -1]$, $\rho(1) = 1$. Крім того,

$$\exists c_0 > 0\ \exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1] : \rho(x) \geq c_0 e^{c|x|}.$$

Нехай $\{l_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – зростаюча послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями 1) - 3),

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{l_n}{|x|^n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція γ є невід'ємною, парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка монотонно спадає на проміжку $[1; +\infty)$, монотонно зростає на проміжку $(-\infty; -1]$ і

$$\exists c_0' > 0\ \exists c' > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] :$$

$$\gamma(x) \leq c_0' e^{-c'|x|}.$$

Символом C_γ^ρ позначимо сукупність усіх цілих функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists a > 0\ \exists b > 0\ \exists c > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by).$$

Збіжність у C_γ^ρ введемо так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset C_\gamma^\rho$ називається збіжною до нуля, якщо вона рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$ і при цьому справджуються нерівності

$$|\varphi_\nu(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими c, a, $b > 0$, не залежними від ν.

Простір C^ρ_γ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $C^{\rho,b}_{\gamma,a}$ по всім $a \in \left\{\dfrac{1}{n}, n \geq 1\right\}$, $b \in \mathbb{N}$, де $C^{\rho,b}_{\gamma,a}$ складається з тих функцій $\varphi \in C^\rho_\gamma$, для яких правильними є нерівності

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\gamma(\overline{a}x)\rho(\overline{b}y), \quad z = x+iy \in \mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ — довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ — довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in C^{\rho,b}_{\gamma,a}$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma\left(a\left(1-\dfrac{1}{p}\right)x\right)\rho((b+\omega)y)},$$

$$p \in \{2,3,\ldots\}, \omega \in \mathbb{N},$$

то з цими нормами простір $C^{\rho,b}_{\gamma,a}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором.

У просторі C^ρ_γ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргументу. Мультиплікатором у просторі C^ρ_γ є кожна ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність (див. [1])

$$|f(z)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y), \quad z = x+iy \in \mathbb{C},$$

або на $\mathbb{R}$ нерівності

$$|f^{(n)}(x)| \leq c_\varepsilon \varepsilon^n n! \rho_n (\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

де $\rho_n = \inf\limits_{x\neq 0} \dfrac{\rho(x)}{|x|^n}$.

Для функції $\varphi \in C^\rho_\gamma$ еквівалентні наступні твердження [1]:

А) $\exists a > 0\ \exists b > 0\ \exists c > 0\ \forall z = x+iy :$ $|\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by)$;

Б) $\exists a_1 > 0\ \exists b_1 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$ $\forall x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_1 b_1^n a_1^k n! \rho_n \gamma_k$, де $\rho_n = \inf\limits_{x\neq 0} \dfrac{\rho(x)}{|x|^n}$, $\gamma_k = \sup\limits_{x\neq 0}\{|x|^k \gamma(x)\}$.

Символом $C^\rho_\gamma(\mathbb{R})$ позначатимемо сукупність функцій на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами простору C^ρ_γ.

2. Простір узагальнених функцій $(C^\rho_\gamma(\mathbb{R}))'$. Символом $(C^\rho_\gamma(\mathbb{R}))'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in C^\rho_\gamma(\mathbb{R})$ визначається формулою

$$< f, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx.$$

Кожна локально інтегровна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|f(x)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \tag{1}$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (C^\rho_\gamma(\mathbb{R}))'$:

$$< F_f, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C^\rho_\gamma(\mathbb{R}).$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо локально інтегровні на $\mathbb{R}$ функції f, g, які задовольняють умову (1), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in C^\rho_\gamma(\mathbb{R})$ така, що $< f, \varphi_0 > \neq < g, \varphi_0 >$, тобто $F_f \neq F_g$.*

Навпаки, якщо $F_f \neq F_g$, то функції f і g не збігаються на множині додатної міри Лебега.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми з праці [4].

Ця теорема дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, що задовольняють умову (1), з породжуваними ними узагальненими функціями F_f з простору $(C^\rho_\gamma(\mathbb{R}))'$. Із властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення

$$C^\rho_\gamma(\mathbb{R}) \ni f \longrightarrow F_f \in (C^\rho_\gamma(\mathbb{R}))'$$

є неперервним.

Оскільки в основному просторі $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ визначена операція зсуву агрументу $T_x : \varphi(\xi) \longrightarrow \varphi(\xi + x)$, то згортку узагальненої функції $f \in (C_\gamma^\rho(\mathbb{R}))'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) =< f_\xi, T_{-x}\breve{\varphi}(\xi) >\equiv< f_\xi, \varphi(x-\xi) >$$

(тут f_ξ позначає дію функціоналу f за змінною ξ, $\breve{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi)$).

Лема. *Згортка $f * \varphi$, $f \in (C_\gamma^\rho(\mathbb{R}))'$, $\varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією; при цьому*

$$(f * \varphi)^{(p)}(x) = (f * \varphi^{(p)})(x), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Якщо $f \in (C_\gamma^\rho(\mathbb{R}))'$ і $f * \varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, $\forall\varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, то функціонал f називається *згортувачем у просторі* $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$.

3. Перетворення Фур'є у просторах $(C_\gamma^\rho(\mathbb{R}))'$. У праці [5] доведено, що правильною є формула $F[C_\gamma^\rho(\mathbb{R})] = C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$, де

$$\gamma^*(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1, \\ \exp\{-\gamma_1(\sigma)\}, & |\sigma| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho^*(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| < 1, \\ \exp\{\rho_1(\tau)\}, & |\tau| \geq 1, \end{cases}$$

$\gamma_1(\sigma)$ – функція, двоїста за Юнгом до функції $\ln\rho(\sigma+1)$, $\sigma \in [0, +\infty)$, $\rho_1(\tau)$ – функція, двоїста за Юнгом до функції $-\ln\gamma(\tau+1)$, $\tau \in [0, +\infty)$; при цьому оператор Фур'є $F : C_\gamma^\rho(\mathbb{R}) \to C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$ є неперервним. Звідси дістаємо, що

$$F[C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})] = C_\gamma^\rho(\mathbb{R}). \tag{2}$$

Урахувавши (2), означимо перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (C_\gamma^\rho(\mathbb{R}))'$ за допомогою співвідношення

$$< F[f], \varphi >=< f, F[\varphi] >,$$
$$\forall\varphi \in C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Із (3) та властивостей лінійності й неперервності функціонала f та перетворення Фур'є основних функцій випливає лінійність і неперервність функціонала $F[f]$ над простором основних функцій $C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$. Отже, *перетворення Фур'є узагальненої функції f, заданої на $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, є узагальненою функцією на просторі $C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$.*

Теорема 2. *Якщо $f \in (C_\gamma^\rho(\mathbb{R}))'$ – згортувач у просторі $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, то для довільної функції $\varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ правильною є формула*

$$F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми, $f * \varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Фур'є та згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$$\forall\psi \in C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}) :< F[f*\varphi], \psi >=< f*\varphi, F[\psi] >=$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (f * \varphi)(x) F[\psi](x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} < f_\xi, \varphi(x-\xi) > F[\psi](x) dx =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-\xi) F[\psi](x) dx \right\rangle$$

(зазначимо, що остання рівність записана поки що формально).

Нехай

$$I(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-\xi) F[\psi](x) dx.$$

Тоді, внаслідок теореми Фубіні,

$$I(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-\xi) \psi(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \psi(\sigma) e^{-i\sigma\xi} e^{-i\sigma t} d\sigma dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi(\sigma) F[\varphi](\sigma) e^{-i\sigma\xi} d\sigma =$$

$$= F[F[\varphi] \cdot \psi](\xi). \tag{4}$$

Отже,

$$< F[f*\varphi],\psi >=< f, F[F[\varphi]\cdot\psi] >=$$
$$=< F[f], F[\varphi]\cdot\psi >=< F[f]\cdot F[\varphi],\psi >,$$
$$\forall\psi\in C^{\rho^*}_{\gamma^*}(\mathbb{R}).$$

Звідси дістаємо рівність

$$F[f*\varphi]=F[f]\cdot F[\varphi].$$

Залишається обгрунтувати коректність співвідношень (4). Введемо позначення:

$$I_r(\xi):=\int\limits_{-r}^{r}\varphi(x-\xi)F[\psi](x)dx,\quad r>0.$$

Для доведення (4) досить показати, що $I_r(\xi)\to I(\xi)$ при $r\to+\infty$ у просторі $C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, або що $\gamma_r(z):=I(z)-I_r(z)\to 0$, $r\to+\infty$ $(z=\xi+iy\in\mathbb{C})$ за топологією простору C^{ρ}_{γ}.

Оскільки $\varphi(x)\in C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, то $\varphi(\omega)\in C^{\rho}_{\gamma}$, $\omega=x+i\tau\in\mathbb{C}$, тобто

$$\exists c,a,b>0\ \ \forall\omega\in\mathbb{C}:\ \ |\varphi(\omega)|\le c\gamma(ax)\rho(b\tau).$$

Нехай T_z — оператор зсуву аргументу, який визначений у просторі C^{ρ}_{γ}, тобто

$$T_z: C^{\rho}_{\gamma}\ni\varphi(\omega)\longrightarrow\varphi(\omega-z)\in C^{\rho}_{\gamma}.$$

Якщо $z\in\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область, то об'єднання образів T_zA довільної обмеженої множини $A\subset C^{\rho}_{\gamma}$ за всіма $z\in\mathbb{K}$ є обмеженою множиною в просторі C^{ρ}_{γ}, тобто

$$\exists c_1,a_1,b_1>0\ \ \forall\omega\in\mathbb{C}\ \ \forall z\in\mathbb{K}:$$
$$|\varphi(\omega-z)|\le c_1\gamma(a_1x)\rho(b_1\tau).$$

Отже, якщо $\omega=x$, $\tau=0$, то маємо нерівності

$$|\varphi(x-z)|\le c_2\gamma(a_1x)\le c_2,\quad\forall x\in\mathbb{R}, z\in\mathbb{K}.$$

Тоді

$$|\gamma_r(z)|\le\int\limits_{-\infty}^{-r}|\varphi(x-z)|\cdot|F[\psi](x)|dx+$$
$$+\int\limits_{r}^{+\infty}|\varphi(x-z)|\cdot|F[\psi](x)|dx\le$$
$$\le c_2\left(\int\limits_{-\infty}^{-r}|F[\psi](x)|dx+\int\limits_{r}^{+\infty}|F[\psi](x)|dx\right).$$

Оскільки $F[\psi]\in C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F[\psi](x)|dx$ збіжний. Отже,

$$\int\limits_{|x|\ge r}|F[\psi](x)|dx\to 0,\quad r\to+\infty$$

як залишок збіжного інтеграла. Цим доведено, що $\gamma_r(z)$ збігається до нуля при $r\to+\infty$ рівномірно за z у кожній обмеженій області комплексної площини.

Доведемо тепер, що

$$\exists c_0,a_0,b_0>0\ \ \forall z=\xi+iy\in\mathbb{C}:$$
$$|\gamma_r(z)|\le c_0\gamma(a_0\xi)\rho(b_0y),\tag{5}$$

де сталі c_0, a_0, b_0 не залежать від r. Оскільки $\gamma_r(\xi)=I(\xi)-I_r(\xi)$, то $|\gamma_r(\xi)|\le|I(\xi)|+|I_r(\xi)|$. Розглянемо функції $I_{r,+}(\xi)=\max\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(I_r(\xi),0)$, $I_{r,-}(\xi)=-\min\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(I_r(\xi),0)$, які є невід'ємними, і врахуємо те, що

$$|I_r(\xi)|=I_{r,+}(\xi)+I_{r,-}(\xi)\le 2|I(\xi)|.$$

Отже,

$$|\gamma_r(\xi)|\le 3|I(\xi)|=3|F[F[\varphi]\cdot\psi]|(\xi),\quad\forall r>0.$$

Звідси вже випливає (5), оскільки $F[F[\varphi]\psi]\in C^{\rho}_{\gamma}$, якщо $\varphi\in C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, $\psi\in C^{\rho^*}_{\gamma^*}(\mathbb{R})$. Теорема доведена.

Зауваження 1. *З теореми 1 випливає, що якщо узагальнена функція f – згортувач у просторі $C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, то її перетворення Фур'є - мультиплікатор у просторі $C^{\rho^*}_{\gamma^*}(\mathbb{R})$.*

Теорема 3. *Якщо узагальнена функція $f\in(C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}))'$ – мультиплікатор у просторі $C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, то її перетворення Фур'є – згортувач у просторі $C^{\rho^*}_{\gamma^*}(\mathbb{R})$.*

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною, маємо, що

$$\forall\varphi\in C^{\rho^*}_{\gamma^*}(\mathbb{R}):\ \ F[f]*\varphi=< F[f]_{\xi},\varphi(x-\xi) >=$$

$$=< F[f]_\xi, \breve{\varphi}(\xi - x) >=< f_\xi, F[\breve{\varphi}(\xi - x)] >=$$

$$= \left\langle f_\xi, \int\limits_{\mathbb{R}} \breve{\varphi}(\sigma - x) e^{-i\sigma\xi} d\sigma \right\rangle =$$

$$= \left\langle f_\xi, e^{-ix\xi} \int\limits_{\mathbb{R}} \breve{\varphi}(t) e^{-it\xi} dt \right\rangle =$$

$$=< f_\xi, e^{-ix\xi} F[\breve{\varphi}](\xi) >,$$

де $\breve{\varphi}(t) = \varphi(-t)$. Оскільки $e^{-ix\xi}F[\varphi](\xi) \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ при кожному $x \in \mathbb{R}$, а f – мультиплікатор у просторі $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ (тобто f – регулярна узагальнена функція), то

$$F[f] * \varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi) F[\breve{\varphi}](\xi) e^{-ix\xi} d\xi = F[fF[\breve{\varphi}]].$$

Звідси вже випливає, що $F[f] * \varphi \in C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$, бо $fF[\breve{\varphi}] \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ (тут враховано, що $F[\breve{\varphi}] \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, а f – мультиплікатор у просторі $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$). Теорема доведена.

Зауваження 2. *Результати, одержані в теоремах 2, 3, можна сформулювати так: для того, щоб узагальнена функція $f \in (C_\gamma^\rho(\mathbb{R}))'$ була згортувачем у просторі $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, необхідно й досить, щоб її перетворення Фур'є було мультиплікатором у просторі $C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Про одне узагальнення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.30—37.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Р.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши // Успехи мат. наук.— 1953.— **8**, вып. 6.— С.3—54.

5. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Перетворення Фур'є та оператори диференціювання нескінченного порядку в просторах типу C // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 160. Математика.— Чернівці: Рута, 2003.— С.30—38.

Стаття надійшла до редколегії 10.12.2003