УДК 517.51

©2004 р. О.Г. Кожукар, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

НАВКОЛО ТЕОРЕМ ДЕБСА ПРО МНОГОЗНАЧНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Показано, що кожне напівнеперервне знизу компактнозначне відображення топологічного простору X в супер-σ-метризовний простір Y буде напівнеперервним зверху в кожній точці деякої залишкової в X множини, а кожне напівнеперервне знизу скінченнозначне відображення локально зв'язного простору X у пряму Зорґенфрея є локально сталим у кожній точці деякої відкритої залишкової в X множини. Крім того, наведені приклади нарізно напівнеперервних зверху (знизу) компактнозначних відображень квадрата $[0,1]^2$ у відрізок $[0,1]$, які в жодній точці не є напівнеперервними зверху (знизу).

It is shown that lower semi-continuous compact-valued mapping of atopological space X into a super-σ-metrizable space Y is upper semi-continuous in every point of a residual set in X and every lower semi-continuous finite-valued mapping of locally connected space X into Sorgenfrei line is locally constant in every point of an open residual set in X. Besides, there are examples of upper (lower) separetely continuous compact-valued mappings of the squere $[0,1]^2$ into the segment $[0,1]$ which are not upper (lower) semi-continuous in any point.

1. Кажуть, що задано *многозначне відображення* $F : X \to Y$, якщо кожному елементу x з множини X поставлено у відповідність деяку непорожню підмножину $F(x)$ множини Y. Нехай X і Y – топологічні простори і $x_0 \in X$. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *напівнеперервним зверху (знизу)* в точці x_0, якщо для кожної відкритої в Y множини V такої, що $F(x_0) \subseteq V$ ($F(x_0) \cap V \neq \emptyset$), існує такий окіл U точки x_0 в X, що $F(x) \subseteq V$ ($F(x) \cap V \neq \emptyset$) для кожного $x \in U$. Позначимо через $C^+(F)$ ($C^-(F)$) множину всіх точок x з X, в яких F непівнеперервне зверху (знизу). Якщо $C^+(F) = X$ ($C^-(F) = X$), то F називається *напівнеперервним зверху (знизу)* або, коротше, C^+-відображенням (C^--відображенням).

Виявляється, що поняття напівнеперервності зверху й знизу, будучи непорівнянними, все ж тісно пов'язані між собою. Так, з результатів П.Кендерова [1, теорема 5 і лема 6] випливає, що в кожного напівнеперервного зверху відображення F топологічного простору X у сепарабельний метризовний простір Y множина $C^-(F)$ залишкова в X. Пізніше Ґ.Дебс з'ясував [2, лема 15], що в напівнеперервного знизу компактнозначного відображення F берівського простору X у метризовний простір Y множина $C^+(F)$ залишкова в X.

Виникає природне бажання дослідити істотність умов на простори X і Y та відображення F у теоремах Кендерова й Дебса. Одне з перших конкретних питань, що тут постають, таке: чи можна вийти за рамки метризовності простору значень у теоремі Дебса? Або ще точніше: чи можна метризовність простору Y в теоремі Дебса замінити на його σ-метризовність? Тут ми даємо часткову відповідь на це запитання, показуючи, що результат Дебса залишається правильним, якщо Y – σ-метризовний простір, який має таке вичерпування $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, що кожна компактна в Y множина лежить у деякому дограничному просторі Y_n (такі простори ми називаємо *супер-σ-метризовними*). Зрозуміло, що такими будуть класичні неметризовні простори функціонального аналізу — простори $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних числових послідовностей, $\mathcal{K}$ всіх фінітних неперервних функцій $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і простір Шварца $\mathcal{D}$ всіх пробних функцій $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з теорії розподілів чи, більше того, всі строгі індуктивні границі Y зростаючих послідовностей метризовних локально опуклих просторів Y_n, для яких Y_n замкнений в Y_{n+1}, в яких має місце відома теорема Дьєдонне-Шварца [3, с. 54]. Таким чином, рамки метризовних просторів затісні для цього результату Дебса.

Інший важливий приклад неметризовного простору – це пряма Зорґенфрея [4, с. 47], яку ми позначаємо символом $\mathbb{L}$. Чи правильне твердження теореми Дебса для $Y = \mathbb{L}$? У зв'язку з цим ми встановлюємо такий результат: якщо X – локально зв'язний топологічний простір, то для кожного скінченнозначного C^--відображення $F : X \to \mathbb{L}$ існує така відкрита залишкова в X множина G, що звуження $F|_G$ локально стале, а значить, і множина $C^+(F)$ залишкова в X, а якщо, до того ж, X – берівський простір, то G буде всюди щільною в X, отже, доповнення $D^+(F) = X \setminus C^+(F)$ ніде не щільне.

У згаданій праці Ґ.Дебс застосував свій вищенаведений результат у доведенні наступної теореми [2, теорема 17]: якщо X – берівський простір, Y – простір зі зліченною базою, Z – метризовний простір, $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне відображення, яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної й напівнеперервне зверху відносно другої змінної, і Y або Z – компакти, то існує всюди щільна G_σ-множина A в просторі X така, що $A \times Y \subseteq C^+(F)$.

З допомогою нашого узагальнення першої теореми Дебса ми переносимо цей його другий результат на відображення зі значеннями в супер-σ-метризовному просторі. Крім того, у зв'язку з цим результатом Дебса постають два запитання: чи кожне нарізно неперервне зверху (знизу) компактнозначне відображення $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ буде напівнеперервним зверху (знизу) хоча б в одній точці $p \in [0,1]^2$? Тут ми з'ясовуємо, що відповіді на обидва запитання негативні.

2. Для многозначного відображення $F : X \to Y$ і множини $B \subseteq Y$ розглядаються два прообрази:

$$F^+(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\}$$

і

$$F^-(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Легко перевірити, що відображення $F : X \to Y$ буде напівнеперервним зверху (знизу) тоді й тільки тоді, коли для кожної відкритої множини V у просторі Y множина $F^+(V)$ $(F^-(V))$ відкрита в X. З формул

$$F^+(Y \setminus B) = X \setminus F^-(B)$$

і

$$F^-(Y \setminus B) = X \setminus F^+(B)$$

випливає, що відображення F буде напівнеперервним зверху (знизу) тоді й тільки тоді, коли для кожної замкненої множини B в Y прообраз $F^-(B)$ $(F^+(B))$ замкнений в X.

Ми будемо використовувати таке просте спостереження: якщо топологічний простір X покривається послідовністю замкнених множин E_n і $U_n = \operatorname{int} E_n$, то відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ є залишковою в X. Справді, множини $E_n \setminus U_n$ ніде не щільні як межі замкнених множин, отже, їх об'єднання $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus U_n)$ – це множина першої категорії. Але, як легко зрозуміти, $X \setminus G \subseteq A$, отже, і доповнення $X \setminus G$ є множиною першої категорії, а значить, G – залишкова множина в X.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *берівським*, якщо в ньому кожна непорожня відкрита множина є множиною другої категорії. Відомо [5, с. 64], що простір X буде берівським тоді й лише тоді, коли виконується одна з наступних умов: (i) кожна залишкова множина в просторі X всюди щільна; (ii) для будь-якої послідовності замкнених множин E_n, які покривають простір X, відкрита множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{int} E_n$ всюди щільна в X.

Топологічний простір Y називається *σ-метризовним*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Y_n. Така послідовність $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *вичерпуванням* простору Y. Якщо σ-метризовний простір Y має таке вичерпування $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$, що кожна компактна множина K в Y лежить у деякому дограничному просторі Y_n, то цей простір ми називатимемо *супер-σ-метризовним.*

З теореми Банаха про категорію [6, с. 87] випливає, що в кожному топологічному просторі X існує відкритий берівський підпростір S, який є залишковою множиною в X. Такий підпростір S ми називаємо *берівським ядром* простору X.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – супер-σ-метризовний простір і $F : X \to Y$ – напівнеперервне знизу компактнозначне відображення. Тоді множина $C^+(F)$ залишкова в X.*

Доведення. Припустимо спочатку, що Y – метризовний простір. Нехай S – берівське ядро простору X і $F_0 = F|_S$. Зрозуміло, що звуження F_0 залишається напівнеперервним знизу відображенням. За теоремою Дебса [2, лема 15] множина $C^+(F_0)$ буде залишковою в S. З відкритості S випливає, що $C^+(F_0) \subseteq C^+(F)$. Отже, $X \setminus C^+(F) \subseteq X \setminus C^+(F_0) = (X \setminus S) \cup (S \setminus C^+(F_0))$. Доповнення $X \setminus S$ є множиною першої категорії в X, а доповнення $S \setminus C^+(F_0)$ – це множина першої категорії в S, а значить, і в X. Отже, доповнення $X \setminus C^+(F)$ є множиною першої категорії в X, а значить, множина $C^+(F)$ є залишковою в X. Таким чином, ми показали, що твердження теореми Дебса залишається правильним і без умови беровості простору X.

Перейдемо до розгляду загального випадку. Нехай $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ – таке вичерпування супер-σ-метризовного простору Y, що кожна компактна підмножина в Y міститься в якомусь дограничному просторі Y_n. Нехай $E_n = F^+(Y_n)$. Оскільки F напівнеперервне знизу, то множини E_n замкнені в X. Для кожного $x \in X$ множина $F(x)$ компактна в Y. Отже, існує такий номер n, що $F(x) \subseteq Y_n$, а значить, $x \in E_n$. Тому $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Вважатимемо, що $U_n = \operatorname{int} E_n$ і $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Як було зазначено вище, відкрита множина G буде залишковою в X. Нехай $F_n = F|_{U_n}$. Оскільки $F_n(x) \subseteq Y_n$ для кожного $x \in U_n$, то F_n – це компактнозначне напівнеперервне знизу відображення відкритого підпростору U_n простору X в метризовний простір Y_n. Тоді за доведеним вище множина $C^+(F_n)$ є залишковою в U_n. Отже, різниця $D^+(F_n) = U_n \setminus C^+(F_n)$ є множиною першої категорії в U_n, а значить, і в X. Покажемо, що доповнення $D^+(F) = X \setminus C^+(F)$ – це множина першої категорії в X. З відкритості U_n випливає, що $D^+(F) \cap U_n = D^+(F_n)$ для кожного n. Тому

$$D^+(F) = (D^+(F) \cap G) \cup (D^+(F) \setminus G) =$$
$$= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D^+(F_n) \right) \cup (D^+(F) \setminus G).$$

Ми бачимо, що $D^+(F)$ є множиною першої категорії, звідки й випливає твердження теореми.

Теорема 2. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, причому Y компактний і задовольняє другу аксіому зліченності, а Z регулярний і супер-σ-метризовний, $F : X \times Y \to Z$ – компактнозначне відображення, яке напівнеперервне знизу відносно першої змінної й напівнеперервне зверху відносно другої змінної. Тоді існує залишкова множина A в X така, що F напівнеперервне зверху в кожній точці $A \times Y$.*

3. Нагадаємо, що топологічний простір X називається *зв'язним*, якщо його не можна розбити на дві непорожні відкриті частини, і *локально зв'язним*, якщо в кожному околі U довільної точки $x \in X$ міститься деякий зв'язний окіл V точки x.

Потужність множини M ми позначатимемо символом $|M|$. Многозначне відображення $F : X \to Y$, в якого $|F(x)| < \aleph_0$ для кожного $x \in X$ (тобто всі множини $F(x)$ скінченні), ми називатимемо *скінченнозначним.* Якщо $|F(x)| = n$ для всіх $x \in X$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, то F називатимемо *n-значним.*

У цьому пункті ми спробуємо вивчити множину $C^+(F)$ для скінченнозначних напівнеперервних знизу відображень $F : X \to$

$\mathbb{L}$, де $\mathbb{L}$ – пряма Зорґенфрея. Наш метод базується на такому результаті.

Теорема 3. *Нехай X – зв'язний топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, для якої кожна точка $x \in X$ є точкою локального мінімуму. Тоді функція f стала.*

Доведення. Припустимо, що існують такі дві точки x_1 і x_2 у просторі X, що $f(x_1) < f(x_2)$. Візьмемо якесь число γ таке, що $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$, і розглянемо множини $A = \{x \in X : f(x) < \gamma\}$ і $B = \{x \in X : f(x) \geq \gamma\}$. Оскільки $x_1 \in A$ і $x_2 \in B$, то $A \neq \emptyset$ і $B \neq \emptyset$. Множина A відкрита як прообраз відкритої множини $(-\infty, \gamma)$ при неперервному відображенні f. Множина B також відкрита. Справді, нехай $x_0 \in B$. Тоді $f(x_0) \geq \gamma$. Оскільки x_0 – це точка локального мінімуму функції f, то існує такий окіл U точки x_0 в X, що $f(x) \geq f(x_0)$, як тільки $x \in U$. Тоді $f(x) \geq \gamma$ для кожного $x \in U$, отже, $U \subseteq B$, а значить, B є околом точки x_0. Зрозуміло, що $A \cup B = X$ і $A \cap B = \emptyset$. Таким чином, ми розбили простір X на дві непорожні відкриті частини A і B, що суперечить його зв'язності. Отже, функція f стала.

Наступний результат легко виводиться з теореми 3.

Теорема 4. *Нехай X – зв'язний топологічний простір і $f : X \to \mathbb{L}$ – неперервне відображення. Тоді f – стале відображення.*

Перейдемо тепер до узагальнення теореми 4.

Теорема 5. *Нехай X – зв'язний топологічний простір, $n \in \mathbb{N}$, і $F : X \to \mathbb{L}$ – напівнеперервне знизу n-значне відображення. Тоді F – стале.*

Доведення. Для кожного $x \in X$ занумеруємо елементи n-елементної множини $F(x)$ в порядку зростання : $f_1(x) < f_2(x) < \ldots < f_n(x)$. Доведемо, що кожна з функцій $f_k : X \to \mathbb{L}$ неперервна. Нехай $a \in X$ і $b_k = f_k(a)$ при $k = 1, \ldots, n$. Тоді $b_k < b_{k+1}$ для кожного $k = 1, \ldots, n-1$, отже, число $\varepsilon_0 = \min\{b_{k+1} - b_k : k = 1, \ldots, n-1\}$ додатне. Розглянемо довільне число ε, для якого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, і припустимо, що $V_k = [b_k, b_k + \varepsilon)$ для $k = 1, \ldots, n$. Ясно, що $V_k \cap V_j = \emptyset$ при $k \neq j$. Зрозуміло, що $V_k \cap F(a) \neq \emptyset$ для кожного $k = 1, \ldots, n$, адже $b_k \in V_k \cap F(a)$. З напівнеперервності знизу в точці a відображення F випливає, що для кожного $k = 1, \ldots, n$ існує такий окіл U_k точки a в X, що $V_k \cap F(x) \neq \emptyset$, як тільки $x \in U_k$. Множина $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ теж буде околом точки a в X і $V_k \cap F(x) \neq \emptyset$ для кожного $k = 1, \ldots, n$ і для кожного $x \in U$.

Нехай $x \in U$. Покажемо, що $y_k = f_k(x) \in V_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Нехай $y_k \notin V_k$ для деякого $k = 1, \ldots, n$. Тоді $y_k < b_k$ або $y_k \geq b_k + \varepsilon$. Нехай $y_k < b_k$. Оскільки $y_1 < y_2 < \ldots < y_k < b_k < b_{k+1} < \ldots < b_n$, то точки $y_1, \ldots, y_k$ не можуть попасти в проміжки $V_k, \ldots, V_n$. Отже, в ці проміжки можуть попасти тільки точки $y_{k+1}, \ldots, y_n$. Але цих точок є $n - k$, а проміжків – $n - k + 1$. Тому знайдеться такий проміжок V_j з $j = k, \ldots, n$, в який не попаде жодної з точок $y_1, \ldots, y_n$, що приведе до того, що $V_j \cap F(x) = \emptyset$, а це неможливо. Так само у випадку $y_k \geq b_k + \varepsilon$ точки $y_k, \ldots, y_n$ не зможуть попасти в проміжки $V_1, \ldots, V_k$. Залишається $k - 1$ точок $y_1, \ldots, y_{k-1}$, яких не вистачає для кожного з k проміжків $V_1, \ldots, V_k$.

Отже, $f_k(U) \subseteq V_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Це показує, що всі функції $f_k : X \to \mathbb{L}$ неперервні в точці a. Таким чином, всі функції f_k неперервні, отже, за теоремою 4, вони сталі. Тому F – стале відображення, адже $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ для кожного $x \in X$.

Зауважимо, що коли тільки $|F(x)| \leq n$ для кожного $x \in X$ з деяким $n > 1$, то відображення F не обов'язково може бути сталим. Справді, візьмемо $X = \mathbb{R}$ і припустимо, що $F(x) = \{0, 1\}$ при $x \neq 0$ і $F(0) = \{0\}$. Легко зрозуміти, що F напівнеперервне знизу в кожній точці. Зазначимо, що F не є напівнеперервним зверху в точці 0.

Перейдемо до розгляду загального випадку. Відображення $F : X \to Y$ називається *локально сталим*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U в X, що звуження $F|_U$ стале.

Теорема 6. *Нехай X – локально зв'яз-*

ний топологічний простір, $n \in N$ і $F : X \to \mathbb{L}$ – напівнеперервне знизу відображення, для якого $|F(x)| \le n$ для кожного $x \in X$. Тоді існує така відкрита всюди щільна множина G в X, що F локально стале в кожній точці з G.

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n.

Нехай $n = 1$. Тоді $F(x) = \{f(x)\}$, де $f : X \to \mathbb{L}$ – однозначна неперервна функція. За умовою кожна точка $x \in X$ має зв'язний окіл U_x. За теоремою 4 звуження $F|_{U_x}$ стале. Тоді f є локально сталою функцією і за множину G ми можемо взяти весь простір X.

Припустимо, що $n > 1$ і наше твердження справедливе для відображень F, у яких $|F(x)| \le n-1$ для кожного x. Нехай F – таке відображення як у формулюванні теореми. Розглянемо множину $A = \{x \in X : |F(x)| = n\}$. Виявляється, що ця множина відкрита в X. Справді, нехай $a \in A$ і $F(a) = \{b_1, \dots, b_n\}$, де $b_1 < \dots < b_n$. Покладемо $V_k = [b_k, b_{k+1})$ при $k = 1, \dots, n$, де $b_{n+1} = b_n + 1$. Ясно, що $V_k \cap V_j = \emptyset$ при $k \ne j$ і $V_k \cap F(a) \ne \emptyset$ для кожного $k = 1, \dots, n$. З напівнеперервності знизу відображення F у точці a випливає, що існує такий окіл U точки a в X, що $F(x) \cap V_k \ne \emptyset$ для всіх $k = 1, \dots, n$ і для всіх $x \in U$. Нехай $x \in U$. Виберемо для кожного $k = 1, \dots, n$ точку $y_k \in F(x) \cap V_k$. Всі ці точки різні, оскільки множини V_k попарно не перетинаються. Крім того, $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq F(x)$. Тому $|F(x)| \ge n$. З другого боку, за умовою $|F(x)| \le n$. Тому $|F(x)| = n$, отже, $U \subseteq A$, що і доводить відкритість множини A.

З теореми 5 легко виводимо, що звуження $F|_A$ локально стале, оскільки відкритий підпростір локально зв'язного простору залишається локально зв'язним. Розглянемо відкриту множину $B = X \setminus \bar{A}$. Ясно, що $|F(x)| \le n-1$ для кожного $x \in B$. За індуктивним припущенням для звуження $F|_B$ існує така відкрита множина H в B, що $F|_H$ локально стале і H щільна в B. Оскільки множини A і B відкриті в X, то і множина $G = A \cup H$ теж відкрита в X. Зрозуміло, що F локально стале в кожній точці з множини G. Крім того, множина G щільна в X, адже A щільна в $\bar{A}$, H щільна в B і $X = \bar{A} \cup B$. Отже, множина G і є шуканою.

Теорема 7. *Нехай X – локально зв'язний топологічний простір і $F : X \to \mathbb{L}$ – напівнеперервне знизу скінченнозначне відображення. Тоді існує така залишкова відкрита множина G в X, що F є локально сталим у кожній точці множини G. Якщо до того ж X – берівський простір, то множина G буде всюди щільною в X.*

Доведення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо множину $A_n = \{x \in X : |F(x)| \ge n\}$ і покажемо, що множина A_n відкрита. Нехай $a \in A_n$. Тоді $F(a) = \{b_1, \dots, b_m\}$, де $b_1 < \dots < b_m$ і $m \ge n$. Вводячи проміжки $V_k = [b_k, b_{k+1})$ при $k = 1, \dots, m$ з $b_{m+1} = b_m + 1$, ми так само як у доведенні теореми 6 легко переконуємося в тому, що існує окіл U точки a, для якого $F(x) \cap V_k \ne \emptyset$ для кожного $k = 1, \dots, m$, як тільки $x \in U$. Тому для $x \in U$ маємо $|F(x)| \ge m \ge n$, отже, $U \subseteq A$.

Множини $B_n = X \setminus A_n$ замкнені і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = X$. Нехай $U_n = \operatorname{int} B_n$ і $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Множина H є залишковою в X. Оскільки $|F(x)| \le n-1$ для кожного $x \in U_n$, то, за теоремою 6 існує відкрита щільна в U_n множина G_n така, що F локально стале в кожній точці з G_n. Множина $U_n \setminus G_n$ ніде не щільна в U_n, а значить, і в X. Нехай $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Множина G відкрита і F — локально стале в кожній точці множини G. Крім того, $X \setminus G \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus G_n) \cup (X \setminus H)$, звідки випливає, що $X \setminus G$ є множиною першої категорії, а множина G є залишковою в просторі X.

Друга частина твердження негайно випливає з наведеної вище характеризації беровості.

Зауважимо, що у своїх точках локальної

сталості відображення F очевидно напівнеперервне зверху, так що в умовах теореми 7 множина $C^+(F)$ буде залишковою в X, а для берівського простору X чи для обмеженого відображення F (як у теоремі 6) доповнення $X \setminus C^+(F)$ навіть ніде не щільне.

4. Перейдемо до розгляду негативних результатів, пов'язаних із другою теоремою Дебса.

Нехай $A_n = \left\{\dfrac{2k-1}{2^n} : k = 1, \ldots, 2^{n-1}\right\}$, $E_n = A_n \times A_n$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ і $P = [0,1]^2$. Нехай $F_1(p) = \{0\}$, якщо $p \in P \setminus E$, $F_1(p) = \big[0, 1 - 2^{-n}\big]$, якщо $p \in E_n$ для деякого n, і $F_2(p) = [0,1]$, якщо $p \in P \setminus E$, $F_2(p) = \big[0, 2^{-n}\big]$, якщо $p \in E_n$ для деякого n.

Теорема 8. *Відображення $F_1 : P \to [0,1]$ ($F_2 : P \to [0,1]$) є компактнозначним нарізно напівнеперервним зверху (знизу), для якого $C^+(F_1) = \emptyset$ ($C^-(F_2) = \emptyset$).*

Доведення. Оскільки $F_i(x,y) = F_i(y,x)$ на P, то для доведення нарізної напівнеперервності досить встановити, що відображення $F_1(\cdot, y) : [0,1] \to [0,1]$ напівнеперервне знизу, а $F_2(\cdot, y) : [0,1] \to [0,1]$ напівнеперервне зверху для кожного $y \in [0,1]$. Якщо $y \in [0,1] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то відображення $F_i(\cdot, y)$ сталі, а значить, напівнеперервні і зверху і знизу. Нехай $y \in A_n$ для деякого n, тобто $y = \dfrac{2k-1}{2^n}$ для деякого $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Звуження відображення $F_i(\cdot, y)$ на відкриту множину $[0,1] \setminus A_n$ стале, що знову гарантує напівнеперервність зверху і знизу в кожній точці $x \in [0,1] \setminus A_n$. Нехай $x_0 \in A_n$. Тоді $F_1(x,y) \subseteq \big[0, 1 - 2^{-n}\big] = F_1(x_0, y)$ для всіх $x \in [0,1]$, отже, $F_1(\cdot, y)$ напівнеперервне зверху в точці x_0. Так само $F_2(x_0, y) = \big[0, 2^{-n}\big] \subseteq F_2(x,y)$ для кожного $x \in [0,1]$, звідки випливає, що $F_2(\cdot, y)$ напівнеперервне знизу в точці x_0.

Доведемо, що F_1 не є напівнеперервним зверху в кожній точці $p_0 \in P$. Зрозуміло, що існує такий номер m, що $F_1(p_0) \subseteq \big[0, 1 - 2^{-m}\big)$. Множина $V = \big[0, 2^{-m}\big)$ – це окіл множини $F_1(p_0)$ у просторі $[0,1]$. Нехай U – довільний окіл точки p_0 в P. Оскільки множина $R_m = \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E_n$ всюди щільна в P, то існує точка $p^* \in U \cap R_m$. Для цієї точки $F_1(p^*) = \big[0, 1 - 2^{-n}\big]$ для деякого $n \geq m$, отже, $F_1(p^*) \not\subseteq V$. Це показує, що F_1 не є напівнеперервною зверху в точці p_0.

Залишилося довести, що F_1 не є напівнеперервною знизу в кожній точці $p_0 \in P$. Існує таке m, що $F_2(p_0) \cap \big(2^{-m}, 1\big] \neq \emptyset$. Множина $V = \big(2^{-m}, 1\big]$ відкрита в просторі $[0,1]$. Нехай U – довільний окіл точки p_0 в P. Множина R_m щільна в P, отже, існує точка $p_* \in U \cap R_m$. Тоді $F_2(p_*) = \big[0, 2^{-n}\big]$ для деякого $n \geq m$, отже, $F_2(p_*) \cap V = \emptyset$, що показує, що F_2 не є напівнеперервним знизу в точці p_0.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кендеров П.С.* Многозначные отображения и их свойства, подобные непрерывности // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, N 3.— С.194—196.
2. *Debs G.* Points de continuité d'une function séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— **97**, N 1.— P.167—176.
3. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори.— Чернівці: Рута, 2002.— 72 с.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.
5. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів.— Чернівці: Рута, 2002.— 72 с.
6. *Куратовский К.* Топология. Т.1.— М.: Мир, 1966.— 594 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004