УДК 517.51

©2004 р. О.О. Карлова

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПЕРШИЙ ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ЛЕБЕГІВСЬКИЙ КЛАС І БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Доводиться, що кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times T \to Y$ є першого класу Бера, якщо X – метризовний (чи навіть PP-) простір, T – топологічний простір і Y – сепарабельний метризовний простір, слабко локально гомеоморфний до деякого сепарабельного метризовного топологічного векторного простору.

It is obtained that every separately continuous mapping $f : X \times T \to Y$ belongs to the first Baire class if X is a metrizable (or even PP-) space, T is a topological space and Y is a separable metrizable space which is weakly locally homeomorphic to a separable metrizable topological vector space.

1. Дослідження берівської класифікації нарізно неперервних відображень було започатковано А. Лебегом [1] у 1898 році, який установив, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Бера. Ця тематика у XX столітті була розвинута в працях Г. Гана, Б. Джонсона, В. Морана, Ж. Сан-Ремо, В. Рудіна, Г. Вери, В. Маслюченка, В. Михайлюка, О. Собчука, А. Каланчі і Т. Банаха. В. Рудін був першим, хто розглядав функції зі значеннями в локально опуклих просторах [2] (до нього досліджувалися лише дійснозначні функції). У працях [3-5] були встановлені результати для функцій зі значеннями в довільному топологічному векторному просторі. Нарешті, Т. Банах [6] розглядав функції зі значеннями в UC-просторах, що були введені А.Р. Коті [7].

Для топологічних просторів X і Y позначимо через $B_1(X,Y)$ сукупність усіх функцій $f : X \to Y$ першого класу Бера, тобто поточкових границь послідовностей неперервних функцій $f_n : X \to Y$. Якщо Z – ще один топологічний простір, то $CC(X \times Y, Z)$ – це сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$. Набір (X, Y, Z) топологічних просторів ми називаємо *трійкою Лебега* [8], якщо виконується включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$.

В. Маслюченко поставив запитання: якщо (X, Y, Z) є трійкою Лебега, то для яких підпросторів E в Z набір (X, Y, E) залишається трійкою Лебега? Тут ми показуємо, що для зв'язних топологічних просторів X і Y з того, що $(X, Y, \mathbb{R})$ є трійкою Лебега випливає, що (X, Y, E) є трійкою Лебега для довільного підпростору E числової прямої $\mathbb{R}$ (цей результат був анонсований в [8], а його попередня версія в [9]).

Легко показати, що якщо (X, Y, Z) – трійка Лебега і E – ретракт Z, то (X, Y, E) – також трійка Лебега. Фактично, ще А. Лебег довів, що $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ є трійкою Лебега. Відомо, що одиничне коло $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ не є ретрактом комплексної площини $\mathbb{C}$. Тому природно постало запитання: чи буде $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{S})$ трійкою Лебега?

Добре відомо, що коло $\mathbb{S}$ накривається прямою $\mathbb{R}$ з допомогою відображення $\varphi(t) = e^{2i\pi t}$. При цьому [10, с. 100] для кожного неперервного відображення $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ існує неперервне відображення $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таке, що $f = \varphi \circ g$. Якби цей факт мав місце і для кожного нарізно неперервного відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}$, то звідси легко б отримувалась позитивна відповідь на останнє питання. Проте не кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}$ допускає підняття в $\mathbb{R}$. Відповідний приклад був наведений у [8]. Але, незважаючи на це, відповідь на поставлене запитання все ж позитивна. Вона отримується на основі таких міркувань. Кожне нарізно неперервне відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}$ належить до першого класу Лебега $H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{S})$, а відображення з цього класу вже допускають підняття до відображення g з $H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Оскільки $H_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = B_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, то g є поточковою границею неперервних функцій $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, а значить, і f є поточковою границею неперервних функцій $f_n = \varphi \circ g_n$.

Ми бачимо, що в цій задачі переплітаються берівська й лебегівська класифікації. Лебегівську класифікацію нарізно неперервних відображень досліджували К. Куратовський і Д. Монтгомері і їх результати подані в [11, с. 387]. В. Маслюченко [12] зовсім іншим методом, який використовує паракомпактність метризовного простору, узагальнив теорему Куратовського-Монтгомері, показавши, зокрема, що $CC(X \times Y, Z) \subseteq H_1(X \times Y, Z)$, якщо X – метризовний простір, Y – досконалий простір, Z – досконало нормальний простір.

У даній праці ми вводимо поняття слабкого локального гомеоморфізму (див. означення в п.5) і клас $\mathcal{K}$ просторів Y, для яких існують метризовний сепарабельний топологічний векторний простір Z і слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi : X \to Y$. Крім того, щоб позбутися умови досконалості на другий простір у вищезгаданому результаті В. Маслюченка, ми розглядаємо клас $H_1^*(X, Y)$ усіх відображень $f : X \to Y$, для яких $f^{-1}(B)$ подається у вигляді перетину послідовності функціонально відкритих множин для довільної замкненої множини B в Y. Зрозуміло, що $H_1^*(X, Y) \subseteq H_1(X, Y)$, причому для досконало нормального простору X ці класи збігаються.

Розвиваючи метод із [12], ми показуємо, що $CC(X \times Y, Z) \subseteq H_1^*(X \times Y, Z)$, якщо X – метризовний, Y – топологічний і Z – досконало нормальний простори. Більше того, це включення залишається правильним, якщо X – це так званий PP-простір, що був введений О. Собчуком в [13]. Далі, здійснюючи побудови, аналогічні до пророблених в [11] при доведенні теореми Лебега-Гаусдорфа ми показуємо, що $H_1^*(X, Y) \subseteq B_1(X, Y)$, якщо X – топологічний простір, а Y – сепарабельний метризовний топологічний векторний простір.

Крім того, ми з'ясовуємо, що для топологічного простору X, ліндельофового простору Y, сепарабельного метризовного простору Z, слабкого локального гомеоморфізму $\varphi : Z \to Y$ і $f \in H_1^*(X, Y)$ існує $g \in H_1^*(X, Z)$ таке, що $f = \varphi \circ g$. На основі цих результатів ми встановлюємо, що включення $H_1^*(X, Y) \subseteq B_1(X, Y)$ має місце, коли X – топологічний простір, Y – ліндельофовий простір із класу $\mathcal{K}$, а включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$ виконується, якщо X – PP-простір (зокрема X – метризовний), Y – топологічний простір і Z – сепарабельний метризовний простір із класу $\mathcal{K}$.

2. У цьому пункті ми покажемо, що для зв'язних топологічних просторів X і Y з того, що $(X, Y, \mathbb{R})$ є трійкою Лебега випливає, що (X, Y, E) є трійкою Лебега для довільного підпростору E числової прямої $\mathbb{R}$.

Лема 1.1. *Нехай A – зв'язна підмножина топологічного простору X, $(B_i)_{i \in I}$ – сім'я зв'язних множин в X така, що $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ і $B_i \cap A \neq \emptyset$ для кожного $i \in I$. Тоді множина $B = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ є зв'язною в X.*

Доведення. Припустимо, що множина B подається у вигляді $B = F_1 \sqcup F_2$, де множини F_1 та F_2 замкнені в B. Покажемо, що $F_1 = \emptyset$ або $F_2 = \emptyset$. Позначимо $F_i^j = F_j \cap B_i$, $j = 1, 2$. Множини F_i^j замкнені в B_i при $j = 1, 2$. Позначимо $F' = A \cap F_1$, $F'' = A \cap F_2$. Тоді $A = F' \sqcup F''$, де F' та F'' – замкнені в A. Оскільки A – зв'язна множина, то або $F' = \emptyset$ або $F'' = \emptyset$. Нехай $F'' = \emptyset$, тоді $A = F'$, звідки випливає, що $A \subseteq F_1$. Оскільки $A \cap B_i \neq \emptyset$, то $F_i^1 \supseteq F_1 \cap B_i \supseteq A \cap B_i \neq \emptyset$. Оскільки B_i – зв'язна множина і $B_i = F_i^1 \sqcup F_i^2$, то $F_i^2 = \emptyset$, тобто $B_i \cap F_2 = \emptyset$, для всіх $i \in I$. Тоді $F_2 = (\bigcup\limits_{i \in I} B_i) \cap F_2 = \bigcup\limits_{i \in I} (B_i \cap F_i) = \emptyset$, отже, множина B є зв'язною в X.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ будемо позначати через f^x, f_y відображення $f^x : Y \to Z$ і $f_y : X \to Z$ відповідно, $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$.

Теорема 1.2. *Нехай X та Y – зв'язні топологічні простори, причому $(X,Y,\mathbb{R})$ – трійка Лебега. Тоді для довільного підпростору E числової прямої $\mathbb{R}$ набір (X,Y,E) також буде трійкою Лебега.*

Доведення. Нехай $f \in CC(X \times Y, E)$. Покажемо, що образ $\mathrm{im} f$ відображення f є зв'язною множиною в E. Позначимо $B^x = f^x(Y) \subseteq E$. Оскільки f – нарізно неперервне відображення, то функції $f^x : Y \to E$ неперервні, отже, множини B^x зв'язні. Зрозуміло, що множину $\mathrm{im} f$ можна записати у вигляді

$$\mathrm{im} f = \{z \in E : (\exists p \in X \times Y)(f(p) = z)\} = \\ = \bigcup_{x \in X} B^x.$$

Нехай $B_y = f_y(X)$ і зафіксуємо точку $y_0 \in Y$, тоді множина $A = B_{y_0}$ буде зв'язною і $A \subseteq \mathrm{im} f = \bigcup\limits_{x \in X} B^x$. Оскільки для всіх $x \in X$ $f(x, y_0) \in B^x$ і $f(x, y_0) \in A$, то $A \cap B^x \neq \emptyset$ для всіх $x \in X$. Згідно з лемою 1.1, множина $B = \bigcup\limits_{x \in X} B^x = \mathrm{im} f$ – зв'язна. Тоді B – проміжок на числовій прямій $\mathbb{R}$. Неважко переконатись, що $CC(X \times Y, B) \subseteq B_1(X \times Y, B)$, тому

$$f \in CC(X \times Y, E) \subseteq CC(X \times Y, B) \subseteq \\ \subseteq B_1(X \times Y, B) \subseteq B_1(X \times Y, E).$$

3. Нехай X – топологічний простір. Назвемо множину $A \subseteq X$ *функціональною F_σ-множиною*, якщо A подається у вигляді $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, де F_n – функціонально замкнені множини в X. Відповідно назвемо множину $A \subseteq X$ *функціональною G_δ-множиною*, якщо A подається у вигляді $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, де G_n – функціонально відкриті множини в X. Множина $A \subseteq X$ називається *функціонально двосторонньою*, якщо вона одночасно є функціональною F_σ-множиною і функціональною G_δ-множиною в X.

Нехай X, Y, Z — топологічні простори. Будемо позначати через $C\overline{C}(X \times Y, Z)$ сукупність усіх відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної та $\overline{X_C(f)} = X$, де

$$X_C(f) = \{x \in X : f^x \in C(Y,Z)\}$$

і $C(Y,Z)$ — сукупність усіх неперервних відображень $g : Y \to Z$.

Твердження 2.1. *Нехай X – топологічний простір такий, що існує послідовність покриттів $((U_i^{(n)} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ цього простору та існує послідовність сімей точок $((x_i^{(n)} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ з X такі, що для довільного $x \in X$ і для довільного U – околу точки x в X існує номер n_0 такий, що для кожного $n \geq n_0$ і для кожного $i \in I_n$ з того, що $x \in U_i^{(n)}$ випливає, що $x_i^{(n)} \in U$; нехай T – топологічний простір, Z – топологічний простір, відображення $f : X \times T \to Z$ неперервне відносно першої змінної, F – підмножина простору Z, G_m – відкриті в Z множини такі, що $\overline{G}_{m+1} \subseteq G_m$ для кожного m і $F = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m$. Тоді має місце рівність*

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i \in I_n} U_i^{(n)} \times (f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m). \quad (*)$$

Доведення. Нехай точка $p_0 = (x_0, t_0)$ належить до лівої частини рівності $(*)$. Тоді $f(p_0) \in G_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо деякий номер m. Оскільки $f_{t_0} : X \to Z$ – неперервне відображення і G_m – відкрита множина, то $V_m = f_{t_0}^{-1}(G_m)$ – відкритий окіл точки x_0. Тоді існує номер $n_0 \geq m$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $i \in I_n$ таких, що $x_0 \in U_i^{(n)}$, виконується включення $x_i^{(n)} \in V_m$. Оскільки $(U_i^{(n_0)} : i \in I_{n_0})$ – покриття простору X, то існує $i_0 \in I_{n_0}$ таке, що $x_0 \in U_{i_0}^{(n_0)}$. Тоді точка $x_{i_0}^{(n_0)} \in V_m$, тобто $f(x_{i_0}^{(n_0)}, t_0) \in G_m$. Отже, точка p_0 належить правій частині рівності $(*)$.

Навпаки, нехай точка $p_0 = (x_0, t_0)$ належить до правої частині рівності $(*)$. Зафіксуємо довільне $m \in \mathbb{N}$ і покажемо, що $f(x_0, t_0) \in \overline{G}_m$.

Оскільки точка p_0 належить до правої частини рівності $(*)$, то для номера $m_1 = m$ існують номер $n_1 \geq m_1$ і $i_1 \in I_{n_1}$ такі, що $x_0 \in U_{i_1}^{(n_1)}$ і $f(x_{i_1}^{(n_1)}, t_0) \in G_{m_1}$. Далі, для номера $m_2 = n_1 + 1$ існують номер $n_2 \geq m_2$ і $i_2 \in I_{n_2}$, такі, що $x_0 \in U_{i_2}^{(n_2)}$ і

$$f(x_{i_2}^{(n_2)}, t_0) \in G_{m_2} \subseteq G_{m_1}.$$

Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримаємо зростаючу послідовність номерів

$$m_1 \leq n_1 < m_2 \leq n_2 < \ldots < m_k \leq n_k < \ldots$$

та послідовність індексів $i_k \in I_{n_k}$ таких, що $x_0 \in U_{i_k}^{(n_k)}$ і

$$f(x_{i_k}^{(n_k)}, t_0) \in G_{m_k} \subseteq G_{m_1}$$

для кожного $k \geq 1$.

Нехай U – довільний окіл точки x_0. Тоді існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $i \in I_n$ з умови $x_0 \in U_i^{(n)}$ випливає, що $x_i^{(n)} \in U$. Послідовність $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ зростаюча, тому існує $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $n_k \geq n_0$ для всіх $k \geq k_0$. Отже, $x_{i_k}^{(n_k)} \to x_0$ при $k \to \infty$. Тоді $f(x_{i_k}^{(n_k)}, t_0) \to f(x_0, t_0)$, бо відображення $f_{t_0} : X \to Z$ неперервні. Таким чином, $f(x_0, t_0) \in \overline{G}_m$ і точка p_0 належить до лівої частини рівності $(*)$.

Топологічний простір X називається *PP-простором*, якщо існує послідовність локально скінченних покриттів $((U_i^{(n)} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ цього простору функціонально відкритими множинами і існує послідовність сімей точок $((x_i^{(n)} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ з X такі, що для довільного $x \in X$ і для довільного околу U точки x існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $i \in I_n$ з умови $x \in U_i^{(n)}$ випливає, що $x_i^{(n)} \in U$.

Це означення рівносильне означенню PP-просторів з [13].

Твердження 2.2. *Нехай X – PP-простір, T – топологічний простір, Z – досконало нормальний простір і відображення $f : X \times T \to Z$ таке, що відображення $f_t : X \to Z$ неперервне для кожного $t \in T$ і відображення $f^{x_i^{(n)}} : T \to Z$ неперервне для всіх $x_i^{(n)}$ з означення PP-простору. Тоді $f \in H_1^*(X \times T, Z)$.*

Доведення. Нехай F – замкнена в Z множина. Простір Z є досконало нормальним, тому множина F подається у вигляді

$$F = \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m,$$

де G_m – відкриті в Z множини такі, що $\overline{G}_{m+1} \subseteq G_m$ для кожного m. Згідно з твердженням 2.1 виконується рівність

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i \in I_n} U_i^{(n)} \times (f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m).$$

Оскільки для точок $x_i^{(n)}$ відображення $f^{x_i^{(n)}} : T \to Z$ неперервні, а простір Z – досконало нормальний, то множини $(f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m)$ функціонально відкриті в T як прообрази функціонально відкритих множин при неперервному відображенні. Множина $U_i^{(n)}$ є функціонально відкритою в X. Оскільки добуток функціонально відкритих множин залишається функціонально відкритою множиною в $X \times T$, а локально скінченне чи зліченне об'єднання функціонально відкритих множин є функціонально відкритою множиною, то $f^{-1}(F)$ є функціональною G_δ-множиною в $X \times T$. Отже, $f \in H_1^*(X \times T, Z)$.

З твердження 2.2 безпосередньо випливає

Теорема 2.3. *Нехай X – PP-простір, T – топологічний простір, Z – досконало нормальний простір. Тоді*

$$CC(X \times T, Z) \subseteq H_1^*(X \times T, Z).$$

Теорема 2.4. *Нехай X – метризовний простір, T – топологічний простір, Z – досконало нормальний простір. Тоді*

$$C\overline{C}(X \times T, Z) \subseteq H_1^*(X \times T, Z).$$

Доведення. Нехай $| \cdot - \cdot |$ – метрика на X, яка породжує його топологічну структуру. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in X$ вважатимемо $U_{\frac{1}{3n}} = \{x' \in X : |x - x'| < \frac{1}{3n}\}$. Сім'я множин $(U_{\frac{1}{3n}}(x) : x \in X)$ утворює відкрите покриття простору X для кожного n. Згідно з теоремою Стоуна [15], простір X є паракомпактним, тому в кожне таке покриття можна вписати відкрите локально скінченне покриття $(U_i^{(n)} : i \in I_n)$ простору X. Оскільки множина $X_C(f)$ всюди щільна в X, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ і кожного $i \in I_n$ існує $x_i^{(n)} \in X_C(f) \cap U_i^{(n)}$. Як відомо з [12], виконується включення (*). Множини $U_i^{(n)}$ є відкритими, а значить, і функціонально відкритими в X, оскільки X – метризовний простір. Тоді множини $\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} \bigcup\limits_{i \in I_n} U_i^{(n)} \times (f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m)$ будуть функціонально відкритими в $X \times T$. Отже, множина $f^{-1}(F)$ буде функціональною G_δ-множиною, тобто $f \in H_1^*(X \times T, Z)$.

4. Покажемо тепер, аналогічно як в [11], що

$$H_1^*(X, Z) \subseteq B_1(X, Z),$$

якщо X — топологічний простір, Z — сепарабельний метризовний топологічний векторний простір.

Лема 3.1. *Нехай X — топологічний простір і $A \subseteq X$ є функціональною F_σ-множиною. Тоді існує послідовність диз'юнктних функціонально двосторонніх множин $A_n \subseteq X$ таких, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Доведення. Оскільки A — функціональна F_σ-множина, то $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, де F_n — функціонально замкнені множини. Легко зрозуміти, що множини F_n є функціонально двосторонніми. Нехай

$$A_1 = F_1, A_2 = F_2 \setminus F_1, \dots, A_n = F_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} F_k.$$

Множини A_n є диз'юнктними й функціонально двосторонніми, причому $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Лема 3.2. *Нехай X – топологічний простір, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функціональних F_σ-множин в X, причому $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді існує послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин таких, що $B_n \subseteq A_n$ і $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.*

Доведення. З леми 3.1 випливає, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує послідовність $(F_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин таких, що

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m}.$$

Перенумеруємо подвійну послідовність (n, m) у звичайну послідовність. Нехай $k = k(n, m)$ – ціле число, яке відповідає парі (n, m). Вважатимемо, що

$$C_{n,m} = F_{n,m} \setminus \bigcup_{k(p,s)<k(n,m)} F_{p,s}.$$

Зрозуміло, що

$$\bigcup_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} F_{n,m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X.$$

Припустимо, що $B_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} C_{n,m}$. Тоді

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \quad \text{і}$$

$$B_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m} = A_n.$$

Зрозуміло, що оскільки множини $C_{n,m}$ є диз'юнктними функціонально двосторонніми, то такими будуть і множини B_n, адже $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Називатимемо функцію $f : X \to Y$ *простою*, якщо множина її значень не більше ніж зліченна.

Лема 3.3. *Нехай X – топологічний простір, Z – метричний сепарабельний простір і $f \in H_1^*(X, Z)$. Тоді існує рівномірно збіжна до функції f послідовність простих функцій $f_n \in H_1^*(X, Z)$ така, що множини $f_n^{-1}(z_i^{(n)})$, де $\mathrm{im} f_n = \{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots\}$ є функціонально двосторонніми в X.*

Доведення. Нехай $|\cdot - \cdot|$ – метрика на Z. Оскільки Z – сепарабельний простір, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує дискретна множина $Z_n = \{z_i^{(n)} \in Z : i \in I_n\}$, де I_n – не більш ніж зліченна множина така, що для довільного $z \in Z$ існує $i \in I_n$, таке, що $|z - z_i^{(n)}| < \frac{1}{n}$.

Нехай

$$A_i^n = \{x \in X : |f(x) - z_i^{(n)}| < \frac{1}{n}\},$$

$n \in \mathbb{N}, i \in I_n$.

Множини A_i^n є функціональними F_σ в X, причому

$$\bigcup_{i \in I_n} A_i^n = X.$$

Тоді, за лемою 3.2, існує послідовність F_i^n диз'юнктних функціонально двосторонніх множин в X така, що

$$F_i^n \subseteq A_i^n, \quad \bigcup_{i \in I_n} F_i^n = X.$$

Визначимо функції f_n наступним чином:

$$f_n(x) = z_i^{(n)}, \quad \text{якщо} \quad x \in F_i^n, \quad i \in I_n.$$

Зрозуміло, що всі відображення $f_n : X \to Z$ є першого функціонального класу Лебега.

Покажемо, що послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ рівномірно збігається до функції f. Справді, нехай $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує $i \in I_n$ таке, що $x \in F_i^n$, $f_n(x) = z_i^{(n)}$. Оскільки $x \in F_i^n \subseteq A_i^n$, то

$$|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - z_i^{(n)}| < \frac{1}{n}.$$

Лема 3.4. *Нехай X – топологічний простір, $F_1, \ldots, F_n$ – функціонально замкнені диз'юнкті множини в X. Тоді існують $G_1, \ldots, G_n$ – функціонально відкриті диз'юнктні множини в X такі, що $F_i \subseteq G_i$.*

Доведення. Нехай $f_1(x) = 0$ для кожного $x \in X$. Оскільки множини F_i функціонально замкнені і диз'юнктні, то, згідно з [15, с.78], для кожного $2 \le i \le n$ існує неперервна функція $f_i : X \to [0,1]$ така, що

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} F_j, \\ 1, & \text{якщо} \quad x \in \bigcup\limits_{j=i}^{n} F_j. \end{cases}$$

Припустимо, що для кожного $x \in X$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad \text{і}$$

$$G_i = f^{-1}((i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2})), \quad 1 \le i \le n.$$

Зрозуміло, що множини G_i функціонально відкриті й диз'юнктні, крім того, якщо $x \in F_i$, то $f(x) = i$ і $x \in G_i$, отже, $F_i \subseteq G_i$.

Лема 3.5. *Нехай X – топологічний простір, Z – топологічний векторний простір, $F_1, \ldots, F_n$ – функціонально замкнені диз'юнктні множини в X і $z_1, \ldots, z_n \in Z$. Тоді існує неперервне відображення $f : X \to Z$ таке, що $F_i \subseteq f^{-1}(z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, і*

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{\alpha z_i : \alpha \in [0,1]\}.$$

Доведення. Згідно з лемою 3.4, існують функціонально відкриті диз'юнктні множини $G_1, \ldots, G_n$ такі, що $F_i \subseteq G_i$. Тоді, оскільки множини $A_i = X \setminus G_i$ і F_i є диз'юнктними й функціонально замкненими, то для кожного $1 \le i \le n$ існує неперервне відображення $f_i : X \to [0,1]$ таке, що $F_i = f_i^{-1}(1)$ і $A_i = f_i^{-1}(0)$.

Нехай

$$f(x) = \sum_{i=1}^n z_i f_i(x).$$

Тоді, якщо $x \in F_i$, то $f(x) = z_i$.

Покажемо, що

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{\alpha z_i : \alpha \in [0,1]\}.$$

Нехай $x \in X$. Якщо існує $1 \le i \le n$ таке, що $x \in G_i$, то $0 < f_i(x) \le 1$ і $f_j(x) = 0$ при $i \ne j$. Тоді, вважаючи $\alpha = f_i(x)$, отримаємо, що $f(x) = \alpha z_i$. Якщо ж $x \notin G_i$ для всіх i, то $f_i(x) = 0$ і $f(x) = 0$.

Лема 3.6. *Нехай X — топологічний простір, Z — топологічний векторний простір, $f \in H_1^*(X, Z)$ — проста функція, $\mathrm{im} f = \{z_1, z_2, \ldots\}$ і $f^{-1}(z_i)$ — функціонально* *двосторонні множини. Тоді існує поточково збіжна до функції f послідовність неперервних функцій $f_n : X \to Z$ така, що*

$$f_n(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{\alpha z_i : \alpha \in [0,1]\}.$$

Доведення. Множина $A_k = f^{-1}(z_k)$ є функціональною типу F_σ, тобто для кожного $k \geq 1$ існує зростаюча послідовність функціонально замкнених множин $(F_{k,n})_{n=1}^{\infty}$ така, що

$$A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{k,n}.$$

Згідно з лемою 3.5, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує неперервна функція $f_n : X \to Z$ така, що $f_n(x) = z_k$, якщо $x \in F_{k,n}$, $1 \leq k \leq n$ і $f_n(X) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{\alpha z_i : \alpha \in [0,1]\}$.

Покажемо, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Справді, нехай $x_0 \in X$. Оскільки $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, то існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $x_0 \in A_k$. Тоді існує $n_0 \geq k$ таке, що для всіх $n \geq n_0$ виконується включення $x_0 \in F_{k,n}$. Отже, $f_n(x_0) = z_k$ і $f_n(x_0) = f(x_0)$ для всіх $n \geq n_0$.

Лема 3.7. *Нехай X – топологічний простір, Z – сепарабельний метризовний топологічний векторний простір, $f_1 \in H_1^*(X,Z)$, $f_2 \in H_1^*(X,Z)$ і $g = f_1 - f_2$. Тоді $g \in H_1^*(X,Z)$.*

Доведення. Для $z_1, z_2 \in Z$ позначимо $d(z_1,z_2) = z_1 - z_2$. Тоді $d : Z \times Z \to Z$ – неперервне відображення. Нехай $h(x) = (f_1(x), f_2(x))$ і покажемо, що $h \in H_1^*(X, Z \times Z)$. Справді, нехай $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ – база в Z і G – відкрита в Z^2 множина. Тоді $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_{n_k} \times U_{m_k}$ і

$$h^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} h^{-1}(U_{n_k} \times U_{m_k}) =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} f_1^{-1}(U_{n_k}) \bigcap f_2^{-1}(U_{m_k}).$$

Оскільки $f_1^{-1}(U_{n_k})$ і $f_2^{-1}(U_{m_k})$ є функціональними F_σ-множинами в X, то їх перетин також є функціональною F_σ-множиною в X, тому і прообраз $h^{-1}(G)$ є функціональною F_σ-множиною.

Отже, $g = d \circ h \in H_1^*(X,Z)$ як композиція неперервного відображення й відображення з класу $H_1^*(X,Z)$.

Теорема 3.8. *Нехай X – топологічний простір, Z – метризовний сепарабельний топологічний векторний простір. Тоді*

$$H_1^*(X,Z) \subseteq B_1(X,Z).$$

Доведення. Оскільки Z – метризовний простір, то, згідно з [14, с.42], існує псевдонорма $|\cdot|$ така, що метрика

$$d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$$

породжує топологічну структуру простору Z.

Нехай $f \in H_1^*(X,Z)$. Тоді, згідно з лемою 3.3, існує послідовність простих функцій $f_n \in H_1^*(X,Z)$, яка рівномірно збігається до функції f. Вважатимемо, що $f_0(x) = 0$. Отже,

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n > 1.$$

Оскільки, згідно з лемою 3.7, різниця $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ є відображенням першого функціонального класу Лебега, то, за лемою 3.6, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує послідовність неперервних функцій $(g_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ така, що

$$\lim_{m\to\infty} g_{n,m}(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x),$$

причому

$$g_{n,m}(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \{\alpha z_i^{(n)} : \alpha \in [0,1]\},$$

де $\{z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots\}$ – множина значень відображення g_n.

Тоді для довільних $m,n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in X$ існують $1 \leq i \leq m$ і $\alpha \in [0,1]$ такі, що

$$|g_{n,m}(x)| = |\alpha z_i| \leq |z_i| \leq \max_{1\leq i\leq m} |z_i| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Вважатимемо, що

$$h_{n,m}(x)=\sum_{i=1}^{n} g_{i,m}(x).$$

Тоді $\lim\limits_{m\to\infty} h_{n,m}(x)=f_n(x)$ і

$$|h_{n+1,m}(x)-h_{n,m}(x)|\le \frac{1}{2^n}.$$

Покажемо, що $\lim\limits_{m\to\infty} h_{m,m}(x)=f(x)$.

Нехай $x_0\in X$ і $\varepsilon>0$. Існує $n\in\mathbb{N}$ таке, що $\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{\varepsilon}{3}$ і

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} h_{n,m}(x_0)=f_n(x_0)$, то існує $m_0>n$ таке, що для всіх $m\ge m_0$ виконується нерівність

$$|h_{n,m}(x_0)-f_n(x_0)|\le\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді при $m\ge m_0$ маємо, що

$$|h_{m,m}(x_0)-f(x_0)|\le|h_{m,m}(x_0)-h_{m-1,m}(x_0)|+$$
$$+\ldots+|h_{n+1,m}(x_0)-h_{n,m}(x_0)|+$$
$$+|h_{n,m}(x_0)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|<$$
$$<\left(\frac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<$$
$$<\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Отже, $f\in B_1(X,Z)$.

5. Нехай X і Y – топологічні простори. Назвемо неперервне відображення $\varphi: X\to Y$ *слабким локальним гомеоморфізмом*, якщо для довільної точки $y\in Y$ існують її відкритий окіл V_y і відкрита в X множина $U\subseteq\varphi^{-1}(V_y)$ такі, що $\varphi|_U: U\to V_y$ – гомеоморфізм.

Лема 4.1. *Нехай X, Y – топологічні простори, $(F_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність функціональних F_σ-множин в X така, що $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ і $f: X\to Y$ – відображення таке, що $f|_{F_n}$ – першого функціонального класу Лебега. Тоді f – відображення першого функціонального класу Лебега на X.*

Доведення. Нехай G – відкрита підмножина простору Y. Покажемо, що множина $A=f^{-1}(G)$ є функціональною типу F_σ в X. Нехай $g_n=f|_{F_n}$. Тоді

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} g_n^{-1}(G).$$

Оскільки $g_n^{-1}(G)$ – функціональна F_σ-множина в F_n, а F_n – функціональна F_σ-множина в X, то $g_n^{-1}(G)$ – функціональна множина типу F_σ в X. Отже, A – функціональна F_σ-множина в X і $f\in H_1^*(X,Y)$.

Теорема 4.2. *Нехай X — топологічний простір, Y — ліндел ефовий простір, Z — топологічний простір такий, що існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi: Z\to Y$ і $f\in H_1^*(X,Y)$. Тоді існує відображення $g\in H_1^*(X,Z)$ таке, що $f(x)=\varphi(g(x))$ для всіх $x\in X$.*

Доведення. Оскільки $\varphi: Z\to Y$ – слабкий локальний гомеоморфізм, то для довільного $y\in Y$ існують відкритий окіл V_y точки y і відкрита множина U_y в Z такі, що $\varphi|_{U_y}: U_y\to V_y$ – гомеоморфізм.

Сім'я множин $(V_y: y\in Y)$ утворює відкрите покриття простору Y. Оскільки простір Y ліндел ефовий, то існує підпокриття $(V_{y_n}: n\in\mathbb{N})$ простору Y. Позначимо через $(U_n)_{n=1}^\infty$ послідовність відповідних відкритих множин у Z таких, що $\varphi_n=\varphi|_{U_n}: U_n\to V_{y_n}$ – гомеоморфізм.

Оскільки $f\in H_1^*(X,Y)$, то $A_n=f^{-1}(V_{y_n})$ є функціональними F_σ-множинами в X. Згідно з лемою 3.2, існує послідовність $(F_n)_{n=1}^\infty$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин в X таких, що $F_n\subseteq A_n$ і $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

Вважатимемо, що $B_n=f(F_n)$, тоді $B_n\subseteq V_{y_n}$. Нехай $C_n=\varphi_n^{-1}(B_n)\subseteq U_n$, тоді $\varphi|_{C_n}: C_n\to B_n$ — гомеоморфізм. Позначимо $\psi_n=(\varphi|_{C_n})^{-1}: B_n\to C_n$ і припустимо, що $g(x)=\psi_n(f(x))$, якщо $x\in F_n$. Тоді $g|_{F_n}=\psi_n\circ f|_{F_n}$ – відображення першого функціонального класу Лебега на F_n. Згідно з лемою 4.1, відображення g є першого функціонального класу Лебега на X. Покажемо, що $f(x)=\varphi(g(x))$. Справді, нехай $x\in X$.

Тоді існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in F_n$. Оскільки $f(x) \in B_n$, то $\psi_n(f(x)) = \varphi_n^{-1}(f(x))$, тоді

$$\varphi(g(x)) = \varphi(\psi_n(f(x))) = \varphi(\varphi_n^{-1}(f(x))) = f(x).$$

Теорема 4.3. *Нехай X – топологічний простір, Y – ліndелефовий простір із класу $\mathcal{K}$. Тоді $H_1^*(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$.*

Доведення. Оскільки Y – простір із класу $\mathcal{K}$, то існують сепарабельний метризовний простір Z і слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi : Z \to Y$.

Згідно з теоремою 4.2, існує відображення $g : X \to Z$ першого функціонального класу Лебега таке, що $f(x) = \varphi(g(x))$ для всіх $x \in X$.

З теореми 3.8 випливає, що існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_n : X \to Z$ таких, що $g_n \to g$ поточково на X. Нехай $f_n = \varphi \circ g_n$. Тоді $f_n : X \to Y$ – неперервні функції, $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що $f_n \to f$ поточково на X. Справді, нехай $x \in X$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(g_n(x)) =$$

$$= \varphi(\lim_{n\to\infty} g_n(x)) = \varphi(g(x)) = f(x).$$

Отже, $f \in B_1(X,Y)$.

З теорем 2.3 і 4.3 випливає

Теорема 4.4. *Нехай X – PP-простір, T – топологічний простір, Y – сепарабельний метризовний простір з класу $\mathcal{K}$. Тоді $CC(X \times T, Y) \subseteq B_1(X \times T, Y)$.*

Поєднуючи теореми 2.4 і 4.3, ми отримаємо наступний результат.

Теорема 4.5. *Нехай X – метризовний простір, T – топологічний простір, Y – сепарабельний метризовний простір з класу $\mathcal{K}$. Тоді $C\overline{C}(X \times T, Z) \subseteq B_1(X \times T, Y)$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lebesque H.* Sur l'approximation des fonctions // Bull. Sci. Math.— 1898.— **22**.— P.278—287.

2. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78.— Academic Press, 1981.— P.741—747.

3. *Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана.— Чернівці: Рута, 1995.— С.192—246.

4. *Каланча А.К., Маслюченко В.К.* Берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних функцій на добутках із скінченновимірним співмножником // Зб. наук. пр. Кам'янець-Под. пед. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. (математика).— 1998.— **4**.— С.43—46.

5. *Каланча А.К., Маслюченко В.К.* Розмірність Лебега-Чеха та берівська класифікація векторнозначних нарізно неперервних відображень // Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, N 11.— С.1596—1599.

6. *Banakh T.O.* (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions // Mat. studii.— 2002.— **18**, N 1.— C.10—28.

7. *Cauty A.R.* Un Théorème de point fixe pour les fonctions multivoques // Book of Abstracts Int. Conf. Func. Anal. Appl., May 28-31, Lviv, 2002.— 2002.— P.49.

8. *Karlova O.* On Baire classification of separately continuous functions // Book of Abstracts Int. Conf. Func. Anal. Appl., May 28-31, Lviv, 2002.— 2002.— P.101—102.

9. *Карлова О.О.* Про деякі узагальнення теорем Бера і Лебега // Матеріали студентської наукової конференції ЧНУ (14-15 травня 2002 р.) Книга 2. Природничі та фізико-математичні науки.— Чернівці, 2002.— С.424—425.

10. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971.— 671 с.

11. *Куратовский К.* Топология. Т.1.— М.: Мир, 1966.— 594 с.

12. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис...докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01.— Чернівці, 1999.— 446 с.

13. *Sobchuk O.* PP-spaces and Baire classification // Book of Abstracts Int. Conf. Func. Anal. Appl., May 28-31, Lviv, 2002.— 2002.— P.189.

14. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1971.— 360 с.

15. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004