УДК 517.911

©2004 р. О.Є. Зернов, О.Б. Перець

Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського, Одеса

ІСНУВАННЯ ТА АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗБУРЕНОЇ СИНГУЛЯРНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ $\alpha(t)x' = \varphi(t,x) + f(t,x,x')$, $x(0) = 0$

Доводиться існування неперервно диференційовного розв'язку з потрібними асимптотичними властивостями.

The existence of a continuously differentiable solution with needed asymptotic properties is being proved.

Питання щодо існування та кількості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язних відносно похідної, добре вивчені [3], [6], [8], а для рівняння Бріо і Буке $tx' = f(t,x)$ з умовою $x(0) = 0$ детально досліджено асимптотичну поведінку розв'язків [3]. Для диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язних відносно похідної, досліджувались питання розв'язності, кількості розв'язків, збіжності до розв'язку послідовностей наближень [1], [7], [9], [10], [11]. У той же час асимптотичні властивості розв'язків цих рівнянь практично не досліджені навіть у самих простих випадках. Справа в тому, що для диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язних відносно похідних, суттєву роль відіграють члени як завгодно високого порядку малості. Розглянемо, наприклад, три задачі Коші: а) $(tx' - 2x)^2 = 0$, $x(0) = 0$; б) $(tx'-2x)^2+t^{100}(x+t^2)^{10}(x')^8 = 0$, $x(0) = 0$; в) $(tx' - x)^2 + t^{100}((x')^2 - t)^{10} = 0$, $x(0) = 0$. Перша з них має загальний розв'язок $x = Ct^2$, $C \in \mathbb{R}$, друга має тільки два розв'язки $x = -t^2, x = 0$, а третя не має розв'язків. Взагалі, навіть якщо кожна з задач Коші а) $(x' - f(t,x))^2 = 0$, $x(0) = 0$; б) $(\varphi(t,x,x'))^2 = 0$, $x(0) = 0$ і має розв'язок виду $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$, $\tau > 0$, то відповідні збурені задачі

а$'$) $(x'-f(t,x))^2+a_1t^{2k_1}+a_2x^{2k_2}+a_3(x')^{2k_3}=0$, $x(0) = 0$

та

б$'$) $(\varphi(t,x,x'))^2+a_1t^{2k_1}+a_2x^{2k_2}+a_3(x')^{2k_3}=0$, $x(0) = 0$

вже не мають розв'язків $x : (0,\rho) \to \mathbb{R}$, для будь-якого $\rho > 0$ при будь-яких додатних a_1, a_2, a_3 та при будь-яких як завгодно великих натуральних k_1, k_2, k_3.

Тому виникає питання про достатні умови, за яких збурена задача Коші має розв'язки, близькі до розв'язків незбуреної задачі в околі початкової точки. Ми розглядаємо це питання для незбуреного рівняння типа Бріо і Буке та доводимо існування у збуреного рівняння неперервно диференційовного розв'язку $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ з потрібними властивостями.

У статті застосовані методи якісної теорії диференціальних рівнянь [2], [3], а також [4], [5]. Запропонована схема міркувань дозволяє досліджувати як регулярні, так і сингулярні задачі Коші $F(t,x,x') = 0$, $x(0) = 0$ в околі точки $t = 0$.

Спочатку розглянемо задачу Коші

$$\alpha(t)x' = \varphi(t,x), \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

де t – незалежна дійсна змінна, $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ – невідома дійсна функція, $\varphi : \mathcal{D}_\varphi \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $\mathcal{D}_\varphi = \{(t,x) : t \in (0,\tau), |x| < \mu(t)\}$, $\mu : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ – неперервна функція, $\alpha : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ – неперервна неспадна функція, $\lim\limits_{t\to+0} \mu(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\alpha(t)}{t} = \sigma$, $0 < \sigma < +\infty$.

Будемо вважати, що $|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| \leqslant K|t_1 - t_2|$ при будь-якому виборі $t_i \in (0,\tau)$,

$i \in \{1, 2\}$, де K – стала.

Припустимо, що існує неперервно диференційовна функція $\xi : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ з властивостями:

1) $|\xi(t)| < \mu(t),\ t \in (0, \tau)$;

2) $\lim\limits_{t\to+0} \xi'(t) = \xi_*,\ |\xi_*| < +\infty$;

3) $\alpha(t)\xi'(t) = \varphi(t, \xi(t)),\ t \in (0, \tau)$.

Припустимо також, що $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $\mathcal{D}_f = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau),\ \ |x - \xi(t)| < \lambda_1(t),\ |y - \xi'(t)| < \lambda_2(t)\}$, де $\lambda_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервні функції, $\lim\limits_{t\to+0} \lambda_i(t) = 0$, $i \in \{1, 2\}$,

$$\lambda_1(t) < \mu(t) - |\xi(t)|,\ t \in (0, \tau)$$

та виконана умова

$$|f(t, \xi(t), \xi'(t))| \leqslant \eta(t),\ t \in (0, \tau),$$

де $\eta : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ – неперервно диференційовна функція

$$\lim_{t\to+0} \frac{\eta(t)}{\lambda_1(t)} = 0,\ \ \lim_{t\to+0} \frac{\eta(t)}{t\lambda_2(t)} = 0,$$
$$\lim_{t\to+0} t\frac{\eta'(t)}{\eta(t)} = \eta_0,\ \ 0 < \eta_0 < +\infty$$

(і тому $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\eta(t)}{\alpha(t)} = 0$). Вкажемо достатні умови, за яких збурена задача Коші

$$\alpha(t)x' = \varphi(t, x) + f(t, x, x'), \quad x(0) = 0$$

має хоча б один розв'язок, який у деякому сенсі є близьким до відомого нам розв'язку ξ задачі (1). Пропонуємо точне формулювання задачі.

Означення. *Для кожного $\rho \in (0, \tau)$ будемо називати ρ-розв'язком задачі (2) неперервно диференційовну функцію $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ з властивостями:*

1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}_f,\ t \in (0, \rho]$;

2) $\alpha(t)x'(t) = \varphi(t, x(t)) + f(t, x(t), x'(t))$, $t \in (0, \rho]$.

Позначимо через $\mathcal{U}(\rho, M, q)$ множину усіх неперервно диференційовних функцій $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, кожна з яких задовольняє умови:

$$\begin{aligned} &|u(t) - \xi(t)| \leqslant M\eta(t),\\ &|u'(t) - \xi'(t)| \leqslant qM\frac{\eta(t)}{\alpha(t)},\ \ t \in (0, \rho], \end{aligned} \tag{3}$$

де ρ, M, q – додатні сталі, $\rho < \tau$.

Теорема. *Нехай виконані умови:*

$$\begin{aligned}
&|\varphi(t_1, x) - \varphi(t_2, x)| \leqslant L_1(t_*)|t_1 - t_2|,\\
&\qquad (t_i, x) \in \mathcal{D}_\varphi,\ 0 < t_* \leqslant t_1, t_2 < \tau,\\
&|\varphi(t, x_1) - \varphi(t, x_2)| \leqslant L_2|x_1 - x_2|,\\
&\qquad (t, x_i) \in \mathcal{D}_\varphi,\\
&|f(t_1, x, y) - f(t_2, x, y)| \leqslant l_1(t_*)|t_1 - t_2|,\\
&\qquad (t_i, x, y) \in \mathcal{D}_f,\ 0 < t_* \leqslant t_1, t_2 < \tau,\\
&|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \leqslant l_2|x_1 - x_2|,\\
&\qquad (t, x_i, y) \in \mathcal{D}_f,\\
&|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \leqslant l_3\alpha(t)|y_1 - y_2|,\\
&\qquad (t, x, y_i) \in \mathcal{D}_f,\\
&\qquad\qquad\qquad i \in \{1, 2\},
\end{aligned}$$

де $L_1 : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ і $l_1 : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервні незростаючі функції, L_2, l_2, l_3 – сталі, $l_3 < 1, L_2 + l_2 < \sigma\eta_0(1 - l_3)$.

Тоді існують такі сталі ρ, M, q, що задача (2) має хоча б один ρ-розв'язок $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, що належить множині $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

Доведення. Спочатку обираємо сталі ρ, M, q. Нехай $\sigma\eta_0 < q < (\sigma\eta_0 - L_2 - l_2)l_3^{-1}$ і нехай $M > (\sigma\eta_0 - L_2 - l_2 - ql_3)^{-1}$. Нерівності, що визначають вибір ρ, тут не вказуються, оскільки обсяг роботи обмежений. Відзначимо лише, що ρ достатньо мале. Позначимо через $\mathcal{B}$ простір усіх неперервно диференційовних функцій $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t\in[0,\rho]}(|x(t)| + |x'(t)|).$$

Нехай $\mathcal{U}$ – підмножина $\mathcal{B}$, кожен елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої задовольняє умови (3), при цьому $u(0) = 0,\ u'(0) = \xi_*$ і, крім того,

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0\ \forall u \in \mathcal{U}\ \forall t_i \in [0, \rho],\ i \in \{1, 2\} :\\ &|t_1 - t_2| \leqslant \delta(\varepsilon)\ \Rightarrow |u'(t_1) - u'(t_2)| \leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

де $\delta(\varepsilon) = (1 - l_3)\varepsilon(2B(t_\varepsilon))^{-1}$; тут

$$B(t_\varepsilon) = (L_1(t_\varepsilon) + l_1(t_\varepsilon) + t_\varepsilon^{-1})(\alpha(t_\varepsilon))^{-1},$$

при цьому стала $t_\varepsilon \in (0,\rho)$ обрана таким чином, щоб при $t \in (0,t_\varepsilon]$ одночасно виконувались нерівності

$$qM\frac{\eta(t)}{\alpha(t)} \leqslant (1-l_3)\frac{\varepsilon}{8},\ |\xi'(t)-\xi_*| \leqslant (1-l_3)\frac{\varepsilon}{8}.$$

Множина $\mathcal{U}$ є замкненою, опуклою, обмеженою і (згідно з теоремою Арцела) компактною. Будемо надалі розглядати задачу Коші

$$\begin{aligned} x' = (\alpha(t))^{-1}(\varphi(t,u(t))+ \\ +f(t,u(t),u'(t))),\ x(0)=0, \end{aligned} \tag{4}$$

де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Позначимо

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{(t,x) : t \in (0,\rho], x \in \mathbb{R}\}, \\ \Phi_1 &= \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x-\xi(t)| = M\eta(t)\}, \\ \mathcal{D}_1 &= \{(t,x) : t \in (0,\rho],\ |x-\xi(t)| < M\eta(t)\}, \\ \mathrm{H} &= \{(t,x) : t=\rho,\ |x-\xi(\rho)| < M\eta(\rho)\}. \end{aligned}$$

Нехай функція $A_1 : \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$ означена рівністю $A_1(t,x) = (x-\xi(t))^2(\eta(t))^{-2}$. Неважко довести, що похідна цієї функції внаслідок рівняння (4) від'ємна при $(t,x) \in \Phi_1$. Звідси випливає ([4], ст. 758), що серед інтегральних кривих рівняння (4), які перетинають H, хоча б одна визначена при всіх $t \in (0,\rho]$ і розташована у $\mathcal{D}_1$ при всіх $t \in (0,\rho]$. Позначимо цю інтегральну криву через $J_u : (t, x_u(t))$.

Доведемо, що рівняння (4) має єдину інтегральну криву з такими властивостями. Точніше, доведемо, що якщо взяти будь-яку точку $(t_0,x_0) \in \overline{\mathcal{D}_1}\backslash\{(0,0)\}$, яка задовольняє умову $x \neq x_u(t)$, то інтегральна крива рівняння (4), що проходить через точку (t_0,x_0), вийде за межі множини $\overline{\mathcal{D}_1}\backslash\{(0,0)\}$ при зменшенні t. З цією метою розглянемо однопараметричну сім'ю множин

$$\begin{aligned} \Phi_2(\nu) &= \{(t,x) : t \in (0,\rho], \\ &\quad |x-x_u(t)| = \nu\eta(t)(-\ln t)\}, \\ \mathcal{D}_2(\nu) &= \{(t,x) : t \in (0,\rho], \\ &\quad |x-x_u(t)| < \nu\eta(t)(-\ln t)\}\}, \end{aligned}$$

де ν – параметр, $\nu \in (0,1]$. Нехай функція $A_2 : \mathcal{D}_0 \to [0,+\infty)$ означена рівністю $A_2(t,x) = (x-x_u(t))^2(\eta(t)(-\ln t))^{-2}$. Легко бачити, що похідна цієї функції, як випливає з (4), від'ємна в кожній точці $(t,x) \in \mathcal{D}_0$, яка задовольняє умову $x \neq x_u(t)$. Тому ця похідна від'ємна в кожній точці $(t,x) \in \Phi_2(\nu)$ для будь-якого $\nu \in (0,1]$. Крім того, якщо $(t,x) \in \overline{\mathcal{D}_1}\backslash\{(0,0)\}$ – будь-яка точка, то для будь-якого фіксованого $\nu \in (0,1]$ маємо:

$$\begin{aligned} |x-x_u(t)| &\leqslant |x-\xi(t)| + |x_u(t)-\xi(t)| \leqslant \\ &\leqslant 2M\eta(t) < \nu\eta(t)(-\ln(t)), \end{aligned}$$

якщо тільки $t \in (0,t(\nu)]$, де $t(\nu) \in (0,\rho)$ – достатньо мале. Звідси ([4], с. 758-759) і випливає єдиність.

Таким чином, однозначно визначена функція $x_u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ така, що

$$|x_u(t)-\xi(t)| \leqslant M\eta(t),\ t \in (0,\rho].$$

При цьому

$$\begin{aligned} |x_u'(t)-\xi'(t)| &\leqslant (\alpha(t))^{-1}(|\varphi(t,u(t))- \\ &-\varphi(t,\xi(t))| + |f(t,u(t),u'(t))- \\ &-f(t,\xi(t),\xi'(t))| + |f(t,\xi(t),\xi'(t))|) < \\ &< (\alpha(t))^{-1}\sigma\eta_0 M\eta(t) < qM\frac{\eta(t)}{\alpha(t)},\ t \in (0,\rho]. \end{aligned}$$

Нехай, за означенням, $x_u(0)=0$, $x_u'(0)=\xi_*$. Залишилось перевірити умову одностайної неперервності. Нехай $\varepsilon > 0$ є даним. Розглянемо $t_\varepsilon, B(t_\varepsilon)$ і $\delta(t_\varepsilon)$, які задані при означенні множени $\mathcal{U}$. Нехай $t_i \in [0,\rho]$, $i \in \{1,2\}$ і $|t_1-t_2| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Можливі три випадки:

1) нехай $t_i \in [0,t_\varepsilon], i \in \{1,2\}$. Тоді

$$\begin{aligned} |x_u'(t_1)-x_u'(t_2)| &\leqslant |x_u'(t_1)-\xi'(t_1)|+ \\ &+|\xi'(t_1)-\xi_*| + |x_u'(t_2)-\xi'(t_2)|+ \\ &+|\xi'(t_2)-\xi_*| \leqslant 4(1-l_3)(\varepsilon/8) = \\ &= (1-l_3)(\varepsilon/2) < \varepsilon; \end{aligned} \tag{5}$$

2) нехай $t_i \in [t_\varepsilon,\rho], i \in \{1,2\}$; і $t_1 < t_2$. Тоді

$$\begin{aligned} |x_u'(t_1)-x_u'(t_2)| &= (\alpha(t_2))^{-1}|\alpha(t_2)x_u'(t_1)- \\ &-\alpha(t_2)x_u'(t_2)| \leqslant (\alpha(t_2))^{-1}(|\alpha(t_1)x_u'(t_1)- \\ &-\alpha(t_2)x_u'(t_2)| + |x_u'(t_1)||\alpha(t_1)-\alpha(t_2)|) \leqslant \\ &\leqslant (\alpha(t_2))^{-1}(|\varphi(t_1,u(t_1))-\varphi(t_2,u(t_2))|+ \\ &+|f(t_1,u(t_1),u'(t_1))-f(t_2,u(t_2),u'(t_2))|+ \\ &+|x_u'(t_1)||\alpha(t_1)-\alpha(t_2)|) \leqslant \\ &\leqslant l_3|u'(t_1)-u'(t_2)| + B(t_\varepsilon)|t_1-t_2| \leqslant \\ &\leqslant l_3\varepsilon + B(t_\varepsilon)\delta(\varepsilon) \leqslant (1+l_3)(\varepsilon/2) < \varepsilon; \end{aligned} \tag{6}$$

3) нехай $t_1 \in [0, t_\varepsilon], t_2 \in [t_\varepsilon, \rho]$. Тоді t_1, t_ε належать $[0, t_\varepsilon]$, а t_ε, t_2 належать $[t_\varepsilon, \rho]$, при цьому $|t_\varepsilon - t_2| \leqslant |t_1 - t_2| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Тому, відповідно до (5), (6),

$$\begin{gathered}|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \leqslant |x'_u(t_1) - x'_u(t_\varepsilon)| + \\ + |x'_u(t_\varepsilon) - x'_u(t_2)| \leqslant \\ \leqslant (1 - l_3)(\varepsilon/2) + (1 + l_3)(\varepsilon/2) = \varepsilon.\end{gathered}$$

Отже, при будь-якому виборі точок $t_i \in [0, \rho]$, $i \in \{1, 2\}$, які задовольняють умову $|t_1 - t_2| \leqslant \delta(\varepsilon)$, справджується нерівність $|x'_u(t_1) - x'_u(t_2)| \leqslant \varepsilon$. Ми довели, що функція $x_u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ належить $\mathcal{U}$. Визначимо оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, вважаючи $\mathrm{T}u = x_u$.

Доведемо, що оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ є неперервним. Нехай $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$. Припустимо, що $\mathrm{T}u_i = x_i$, $i \in \{1, 2\}$. Якщо $u_1 = u_2$, то і $x_1 = x_2$. Надалі вважатимемо, що $h > 0$. Будемо досліджувати асимптотичну поведінку при $t \to +0$ розв'язків рівняння

$$x' = (\alpha(t))^{-1}(\varphi(t, u_1(t)) + f(t, u_1(t), u'_1(t))). \tag{7}$$

Якщо $t \in (0, \rho]$, то

$$\begin{gathered}|u_1(t) - u_2(t)| \leqslant \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}^{1/2}(|u_1(t) - \xi(t)| + \\ + |u_2(t) - \xi(t)|)^{1/2} \leqslant h^{1/2}(2M\eta(t))^{1/2}\end{gathered}$$

і

$$\begin{gathered}|u'_1(t) - u'_2(t)| \leqslant \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}^{1/2}(|u'_1(t) - \xi'(t)| + \\ + |u'_2(t) - \xi'(t)|)^{1/2} \leqslant h^{1/2}\left(2qM\frac{\eta(t)}{\alpha(t)}\right)^{1/2},\end{gathered}$$

тому

$$\begin{gathered}|\varphi(t, u_1(t)) - \varphi(t, u_2(t))| + \\ + |f(t, u_1(t), u'_1(t)) - f(t, u_2(t), u'_2(t))| \leqslant \\ \leqslant (L_2 + l_2)|u_1(t) - u_2(t)| + \\ + l_3\alpha(t)|u'_1(t) - u'_2(t)| \leqslant \\ \leqslant h^{1/2}(2M\eta(t))^{1/2}(L_2 + l_2 + l_3(\alpha(t))^{1/2}q^{1/2}) \leqslant \\ \leqslant Kh^{1/2}(\eta(t))^{1/2},\ t \in (0, \rho],\end{gathered} \tag{8}$$

де $K = (2M)^{1/2}(L_2 + l_2 + 1)$. Надалі будемо міркувати за тією ж схемою, що і у [5], с. 309-310. Позначимо

$$\begin{aligned}\Phi_3 = &\{(t, x) : t \in (0, \rho], \\ &|x - x_2(t)| = \gamma h^{1/2}(\eta(t))^{1/2}\}, \\ \mathcal{D}_3 = &\{(t, x) : t \in (0, \rho], \\ &|x - x_2(t)| < \gamma h^{1/2}(\eta(t))^{1/2}\},\end{aligned}$$

де γ – стала, яка задовольняє умову $\gamma > 2K(\sigma\eta_0)^{-1}$. Розглянемо функцію $A_3 : \mathcal{D}_0 \to [0, +\infty)$, яка означена рівністю

$$A_3(t, x) = (x - x_2(t))^2(\eta(t))^{-1}.$$

Неважко переконатися в тому, що похідна цієї функції за рівнянням (7) від'ємна при $(t, x) \in \Phi_3$. Звідси випливає ([4], ст. 758), що кожна інтегральна крива $J : (t, x(t))$ рівняння (7), яка перетинає Φ_3 у точці (t_0, x_0), розташована при малих $|t - t_0|$ таким чином: $(t, x(t)) \in \mathcal{D}_3$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ і $(t, x(t)) \notin \overline{\mathcal{D}_3}$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0)$. Тим часом

$$\begin{gathered}|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(t) - \xi(t)| + \\ + |x_2(t) - \xi(t)| \leqslant 2M\eta(t) < \gamma h^{1/2}(\eta(t))^{1/2},\end{gathered}$$

якщо $t \in (0, t(h)]$, де стала $t(h) \in (0, \rho)$ обрана так, щоб при $t \in (0, t(h)]$ виконувалась нерівність $\eta(t) < \left(\dfrac{\gamma}{2M}\right)^2 h$. Тому інтегральна крива $J : (t, x_1(t))$ рівняння (7) розташована у $\mathcal{D}_3$ при $t \in (0, t(h)]$. Якщо t монотонно зростає від $t = t(h)$ до $t = \rho$, то, враховуючи сказане вище, інтегральна крива $J : (t, x_1(t))$ не може мати спільних точок з Φ_3. Це означає, що інтегральна крива $J : (t, x_1(t))$ розташована у $\mathcal{D}_3$ при усіх $t \in (0, \rho]$. Отже, $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \gamma h^{1/2}(\eta(t))^{1/2}$ при $t \in (0, \rho]$. З тотожностей

$$\begin{gathered}x'_i = (\alpha(t))^{-1}(\varphi(t, u_i(t)) + f(t, u_i(t), u'_i(t))), \\ t \in (0, \rho],\ i \in \{1, 2\},\end{gathered}$$

з урахуванням (8) випливає, що

$$\begin{gathered}|x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant K(\alpha(t))^{-1}h^{1/2}(\eta(t))^{1/2}, \\ t \in (0, \rho].\end{gathered}$$

Тому, зважаючи на достатню малість ρ, маємо:

$$\begin{gathered}|x_1(t) - x_2(t)| + |x'_1(t) - x'_2(t)| \leqslant \\ \leqslant t^{-1}h^{1/2},\quad t \in (0, \rho].\end{gathered} \tag{9}$$

Перейдемо безпосередньо до доведення неперервності оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Нехай $\varepsilon > 0$ дане. Існує таке $t_\varepsilon \in (0, \rho)$, що

$$2M\eta(t) + 2qM\frac{\eta(t)}{\alpha(t)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

при $t \in (0, t_\varepsilon]$. Якщо $t \in (0, t_\varepsilon]$, то

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \\ \leqslant |x_1(t) - \xi(t)| + |x_2(t) - \xi(t)| + \\ +|x_1'(t) - \xi'(t)| + |x_2'(t) - \xi'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо $t \in [t_\varepsilon, \rho]$, то з (9) отримаємо

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \\ \leqslant t_\varepsilon^{-1} h^{1/2}, \quad t \in [t_\varepsilon, \rho]. \tag{10}$$

Позначимо $\delta(\varepsilon) = \left(\varepsilon \dfrac{t_\varepsilon}{2}\right)^{1/2}$. Якщо $h < \delta(\varepsilon)$, то з (10) випливає, що при $t \in [t_\varepsilon, \rho]$

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |x_1'(t) - x_2'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11}$$

Отже, нерівність (11) виконується і при $t \in [0, t_\varepsilon]$. Отже, (11) виконується при всіх $t \in [0, \rho]$, і тому $\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Підсумовуючи, стверджуємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що якщо $\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} = h < \delta(\varepsilon)$, то $\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} = \|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Наведені міркування не залежать від вибору функцій $u_i \in \mathcal{U}$, $i \in \{1, 2\}$. Неперервність оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ доведена.

На завершення доведення теореми залишилося застосувати до оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ теорему Шаудера про нерухому точку. Існує хоча б один елемент $x_0 \in \mathcal{U}$ такий, що $\mathrm{T}x_0 = x_0$. Це означає, що задача (2) має ρ-розв'язок $x_0 : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, який належить множині $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

Приклад. Розглянемо задачу Коші: $tx' = 2t - x + t^2(x')^2 - 4t^2 - x^2 + 4tx$, $x(0) = 0$. Для цієї задачі виконані всі умови теореми, якщо взяти $\alpha(t) = t$, $\varphi(t, x) = 2t - x$, $f(t, x, x') = t^2(x')^2 - 4t^2 - x^2 + 4tx$ та $\xi(t) = t$, $\eta(t) = t^3$. Внаслідок теореми існує хоча б один розв'язок цієї задачі $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ такий, що $|x - t| \leqslant Mt^3$, $|x' - 1| \leqslant qMt^2$, $t \in (0, \rho]$. З іншого боку, цю задачу можна розв'язати безпосередньо. Оскільки її можна записати у вигляді $(tx' - 2t + x)(tx' + 2t - x - 1) = 0$, $x(0) = 0$, то маємо дві задачі: $tx' = 2t - x$, $x(0) = 0$ і $tx' = -2t + x + 1$, $x(0) = 0$. Перша з цих задач має розв'язок $x(t) = t$. Друга задача не має розв'язків взагалі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Витюк А.Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения.— 1971.— **7**, N 9.— С.1575—1580.

2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.

3. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1972.— 664 с.

4. *Зернов А.Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференциальные уравнения.— 1992.— **28**, N 5.— С.756—760.

5. *Зернов А.Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши// Украинский математический журнал.— 2001.— **54**, N 3.— С.302—310.

6. *Кигурадзе И.Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения.— 1965.— **1**, N 10.— С.1271—1291.

7. *Рудаков В.П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Известия высших учебных заведений. Математика.— 1971.— N 9.— С.79—84.

8. *Чечик В.А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью// Труды Московского матем. общ-ва.— 1959.— N 8.— С.155—198.

9. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl.— 1959.— N 48.— P.97—102.

10. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. and Appl.— 1993.— **179**, N 2.— P.317—326.

11. *Kowalski Z.* An iterative method of solving differential equations // Ann. polon. math.— 1963.— **12**, N 3.— P.213—230.

Стаття надійшла до редколегії 5.12.2003