УДК 517.982

©2004 р. С.С. Дрінь

Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя

ОПЕРАТОРИ БЕССЕЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ У ПРОСТОРАХ ТИПУ C

Знайдено необхідні та достатні умови, за яких у просторах типу C визначений, є лінійним і неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку. При цьому такий оператор трактується як псевдодиференціальний оператор, побудований за певним аналітичним символом.

The necessary and sufficient conditions of linearity and continuity are established for the Bessel operator of the infinite order, which is defined on the spaces of the type C. This operator is considered as pseudodifferential operator, which is constrained on some analytic symbol.

У багатьох питаннях математичного аналізу та диференціальних рівнянь важливу роль відіграють простори нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які спадають на нескінченності разом із усіма своїми похідними швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$. До таких просторів належить простір S Л. Шварца, простори типу S та W, вагові простори $K(M_p)$, $Z(M_p)$, введені в [1], та ін. У праці [2] введено простори типу C цілих функцій, порядок спадання яких та їхніх похідних на дійсній осі характеризується величинами $m_{kn} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^k\varphi^{(n)}(x)|$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$; при цьому простори S_α, S^β, S_α^β, $\{\alpha,\beta\} \subset (0,1)$, а також простори типу W утворюють певні підкласи вказаних просторів. У праці [3] досліджено властивості оператора диференціювання нескінченного порядку, який діє у просторах типу C. Основним завданням цієї праці є відшукання необхідних і достатніх умов, при виконанні яких у просторах, що складаються з парних функцій із просторів типу C, визначений і є неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку.

1. Простори типу C та $\overset{\circ}{C}$ Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел таку, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{m_n}}{n} = 0$, $m_0 = 1$;

2) $\forall\, \alpha > 0\ \exists\, h > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+ :\ m_n \geq C_\alpha{\cdot}\alpha^n$;

3) $\exists\, M > 0\ \exists\, h > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+ :$
$$m_{n+1} \leq M h^n m_n$$
і вважатимемо
$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{|x|^n}{m_n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція ρ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$, монотонно зростає на $[1,+\infty)$ і монотонно спадає на $(-\infty,1]$, $\rho(x) \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\rho(1) = 1$; крім того, $\exists\, c_0 > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]:$
$$\rho(x) \geq c_0 \exp\{c|x|\}.$$

Простір C^ρ. Символом C^ρ позначимо сукупність усіх цілих однозначних функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$\exists\, b > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, c_k > 0\ \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C} :$
$$|z^k\varphi(z)| \leq c_k\rho(by).$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n(1-\beta)}$, $\beta \in (0,1)$, то $\rho(x) \sim \exp\{|x|^{1/(1-\beta)}\}$, тобто в цьому випадку C^ρ збігається з простором S^β, введеним в [1] (послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умови 1)—3)). Збіжність у C^ρ визначається так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ називається збіжною до нуля, якщо: 1) послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$; 2) справджуються оцінки
$$|z^k\varphi_\nu(z)| \leq c_k\rho(by),\ z = x+iy \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $c_k > 0$, $b > 0$ не залежать від ν. Простір C^ρ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $C^{\rho,b}$, де $C^{\rho,b}$ складається з тих цілих функцій φ, які при кожному $\omega > 0$ задовольняють нерівності

$$|z^k\varphi(z)| \le c_{k\omega}\rho((b+\omega)y),\ \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Із сукупністю норм

$$\|\varphi\|_{k\omega} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|z^k\varphi(z)|}{\rho((b+\omega)y)},\ \ k\in\mathbb{Z}_+,\ \ \omega\in\mathbb{N},$$

$C^{\rho,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором.

У просторі C^ρ визначені і є неперервними операції диференціювання, зсуву аргументу, множення на z. Для функції $\varphi \in C^\rho$ еквівалентними є наступні твердження [2]:

А) $\exists\, b > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, c_k > 0\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}:$

$$|z^k\varphi(z)| \le c_k\rho(by);$$

Б) $\exists\, b_1 > 0\ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, c_k^{'} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+:$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \le c_k^{'} b_1^n n!\rho_n,$$

$$\rho_n := \inf_{x\ne 0} \frac{\rho(x)}{|x|^n} \equiv \inf_{|x|\ge 1} \frac{\rho(x)}{|x|^n}.$$

Простір C_γ. Нехай $\{l_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — зростаюча послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями 1)—3). Нехай

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{l_n}{|x|^n}, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Функція γ є невід'ємною, неперервною, парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$ і монотонно зростає на $(-\infty, -1]$, $0 < \gamma(x) \le 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; крім того, $\exists\, c_0^{'} > 0\ \exists\, c^{'} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]:$

$$\gamma(x) \le c_0^{'}\exp\{-c^{'}|x|\}.$$

Наприклад, якщо $l_n = n^{n\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, то γ задовольняє нерівності

$$\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\} \le \gamma(x) \le$$

$$\le C\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\}, c = \exp\left\{\frac{\alpha e}{2}\right\},$$

тобто в цьому випадку C_γ збігається з простором S_α, введеним в [1].

Символом C_γ позначимо сукупність усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову $\exists\, a > 0\ \forall\, q \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, c_q > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi^{(q)}(x)| \le c_q\gamma(ax).$$

У просторі C_γ визначені та є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання та операція зсуву аргументу.

Простір C_γ^ρ. Нехай ρ та γ — функції, побудовані раніше за послідовностями $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ відповідно. Символом C_γ^ρ позначимо сукупність усіх цілих функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову $\exists\, a > 0\ \exists\, b > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, z = x + iy \in BbbC$:

$$|\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by).$$

Зазначимо, що простори C^ρ, C_γ, C_γ^ρ пов'язані між собою співвідношенням $C_\gamma^\rho = C_\gamma \cap C^\rho$. Звідси випливає, що в C_γ^ρ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргументу.

Для функції $\varphi \in C_\gamma^\rho$ еквівалентні такі твердження [2]:

В) $\exists\, a > 0\ \exists\, b > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, z = x+iy \in \mathbb{C}:$

$$|\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by);$$

Г) $\exists\, a_1 > 0\ \exists\, b_1 > 0\ \exists\, c_1 > 0\ \forall\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall\, x \in \mathbb{R}:$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \le c_1 a_1^k b_1^n l_k n!\rho_n.$$

Зауваження 1. Із тверджень В), Г) та результатів, одержаних у праці [4], випливає, що якщо $l_k = \nu_k^k\exp\{-M(\nu_k)\}$, $\rho_n = \gamma_n^{-n}\exp\{\Omega(\gamma_n)\}$, де ν_k — розв'язок рівняння $xM'(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, γ_n — розв'язок рівняння $x\Omega'(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, за умови, що M, Ω — диференційовні, невід'ємні, парні на $\mathbb{R}$, зростаючі та опуклі на $[0, +\infty)$ функції, то C_γ^ρ збігається з простором W_M^Ω, введеним в [5], тобто

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow (\exists\, c, a, b, > 0\ \forall\, z \in \mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)| \le c\exp\{-M(ax)+\Omega(by)\});$$

при цьому послідовності $\{l_k, k\in\mathbb{Z}_+\}$, $\{m_n = n!\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ задовольняють умови 1)—3)).

Символами $C^\rho(\mathbb{R})$, $C^\rho_\gamma(\mathbb{R})$ позначатимемо сукупності функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами просторів C^ρ, C^ρ_γ відповідно.

Простори типу $\overset{0}{C}$ та $\overset{0}{C}(\mathbb{R})$. Символами $\overset{0}{C}{}^\rho$, $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$, $\overset{0}{C}{}_\gamma$ позначатимемо сукупності всіх цілих (нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$) парних функцій із просторів C^ρ, C^ρ_γ, C_γ відповідно. Ці простори з відповідними топологіями називатимемо основними просторами або просторами типу $\overset{0}{C}$, а їхні елементи — основними функціями. Відповідно символами $\overset{0}{C}{}^\rho(\mathbb{R})$, $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma(\mathbb{R})$ позначатимемо сукупності парних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами просторів $\overset{0}{C}{}^\rho$ та $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$.

Зазначимо, що в просторі $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$ коректно визначений оператор $\dfrac{1}{z}\dfrac{d}{dz}$ (він є неперервним), а у просторі $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma(\mathbb{R})$ неперервним є оператор $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}$. Отже, правильним є наступне твердження.

Лема. *У просторі $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$ визначений, є лінійним і неперервним оператор Бесселя*

$$B_{\nu,z} = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2\nu+1}{z}\frac{d}{dz}, \quad z\in\mathbb{C},$$

порядку $\nu > -1/2$; у просторі $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma(\mathbb{R})$ лінійним і неперервним є оператор Бесселя B_ν, який відповідає дійсній змінній x.

2. Оператори Бесселя нескінченного порядку в просторах $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$ та $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma(\mathbb{R})$. Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n}z^{2n}$ — деяка ціла парна функція.

Говоритимемо, що в просторі $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$ задано оператор Бесселя нескінченного порядку $f(B_{\nu,z}) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n}(-B_{\nu,z})^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi\in\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$ ряд

$$(f(B_{\nu,z})\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(-1)^n(B^n_{\nu,z}\varphi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$. Правильним є наступне твердження.

Теорема. *Для того, щоб у просторі $\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$ був визначений і неперервний оператор Бесселя нескінченного порядку $f(B_{\nu,z})$, необхідно й досить, щоб функція f була мультиплікатором у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$, тобто*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon>0\ \forall\sigma=\xi+i\tau\in\mathbb{C}:$$

$$|f(\sigma)| \le c_\varepsilon(\gamma_1(\varepsilon\xi))^{-1}\rho_1(\varepsilon\tau),$$

де

$$\gamma_1(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma|<1, \\ \exp\{-\gamma^*(\sigma)\}, & |\sigma|\ge 1, \end{cases}$$

$$\rho_1(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau|<1, \\ \exp\{\rho^*(\tau)\}, & |\tau|\ge 1, \end{cases}$$

$\gamma^*(\sigma)$ — функція, двоїста за Юнгом до функції $\ln\rho(\sigma+1)$, $\sigma\in[0,+\infty)$; $\rho^*(\tau)$ — функція, двоїста за Юнгом до функції $-\ln\gamma(\tau+1)$, $\tau\in[0,+\infty)$.

Доведення. Нехай $\varphi\in\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$, $\psi = f(B_{\nu,z})\varphi$, f — мультиплікатор у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$. Доведемо, що $\psi\in\overset{0}{C}{}^\rho_\gamma$. Із властивостей перетворення Фур'є-Бесселя (прямого і оберненого) у просторах типу $\overset{0}{C}$ випливає, що досить показати, що $F_B[\psi]\in\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$. Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$F_B[\psi](\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(-1)^n F_B[B_{\nu,z}\varphi](\sigma) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(-1)^n(-\sigma^2)^n F_B[\varphi](\sigma) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\sigma^{2n} F_B[\varphi](\sigma) = f(\sigma) F_B[\varphi](\sigma),$$

$$\sigma \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$, а f — мультиплікатор у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$, то $f \cdot F_B[\varphi] \in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$.

Отже, залишається довести коректність проведених перетворень і обґрунтувати правильність формул (1). Для цього досить встановити, що

$$r_{n,\varphi}(\sigma) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k} F_B[\varphi] \to 0, \quad n \to \infty,$$

у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$. Іншими словами, потрібно показати, що:

1) послідовність $\{r_{n,\varphi}; n \geq 1\} \subset \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$;

2) ця послідовність рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини і при цьому

$$\exists\, c, a, b > 0\ \forall\, n \geq 1 :$$

$$|r_{n,\varphi}(\sigma)| \leq c_1 \gamma_1(a\xi)\rho_1(b\tau),$$

$$\forall\, \sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C},$$

де сталі c, a, b не залежать від n.

Коефіцієнти Тейлора c_{2k}, $k \in \mathbb{Z}_+$, функції f обчислюються за формулою Коші

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z^{2k+1}} dz,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з умови теореми (f — мультиплікатор в $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$) дістаємо, що

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma_1(\varepsilon R))^{-1}}{R^k} \cdot \inf_R \frac{\rho_1(\varepsilon R)}{R^k} =$$

$$= c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k} \inf_R \frac{(\gamma_1(\varepsilon R))^{-1}}{(\varepsilon R)^k} \cdot \inf_R \frac{\rho_1(\varepsilon R)}{(\varepsilon R)^k} \equiv$$

$$\equiv c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k} \gamma_k^* \rho_k^*.$$

Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$, то

$$\exists\, c_1, a_1, b_1 > 0\ \forall\, \sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C} :$$

$$|F_B[\varphi](\sigma)| \leq c_1 \gamma_1(a_1\xi)\rho_1(b_1\tau) =$$

$$= c_1 \exp\{-\ln \tilde{\gamma}_1(a_1\xi) + \ln \rho_1(b_1\tau)\},$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{\gamma_1}.$$

Крім того,

$$|\sigma|^{2k} \leq 2^k(|\xi|^{2k} + |\tau|^{2k}), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\beta_k(\sigma) := |c_{2k}\sigma^{2k} F_B[\varphi](\sigma)| \leq$$

$$\leq c_1 c_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} \gamma_k^* \rho_k^* (|\xi|^{2k} + |\tau|^{2k}) \gamma_1(a_1\xi)\rho_1(b_1\tau) =$$

$$= c_1 c_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} (\gamma_k^* \rho_k^* |\xi|^{2k} \gamma_1(a_1\xi)\rho_1(b_1\tau) +$$

$$+ \gamma_k^* \rho_k^* |\tau|^{2k} \gamma_1(a_1\xi)\rho_1(b_1\tau)) \equiv$$

$$\equiv c_1 c_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} (\Delta_k^{'}(\sigma) + \Delta_k^{''}(\sigma)).$$

Із означення γ_k^*, ρ_k^* випливають нерівності:

$$|\xi|^k \gamma_k^* = |\xi|^k \inf_{\xi \neq 0} \frac{(\gamma_1(\xi))^{-1}}{|\xi|^k} =$$

$$= \varepsilon_0^{-k} |\varepsilon_0 \xi|^k \inf_{\xi \neq 0} \frac{(\gamma_1(\varepsilon_0\xi))^{-1}}{|\varepsilon_0\xi|^k} \leq$$

$$\leq \varepsilon_0^{-k} |\varepsilon_0\xi|^k \frac{(\gamma_1(\varepsilon_0\xi))^{-1}}{|\varepsilon_0\xi|^k} = \varepsilon_0^{-k} (\gamma_1(\varepsilon_0\xi))^{-1} =$$

$$= \varepsilon_0^{-k} \exp\{-\ln \gamma_1(\varepsilon_0\xi)\} = \varepsilon_0^{-k} \exp\{\ln \tilde{\gamma}_1(\varepsilon_0\xi)\},$$

$$\varepsilon_0 > 0, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Аналогічно,

$$|\xi|^k \rho_k^* \leq \varepsilon_1^{-k} \rho_1(\varepsilon_1\xi) = \varepsilon_1^{-k} \exp\{\ln \rho_1(\varepsilon_0\xi)\},$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\Delta_k^{'}(\sigma) \leq$$

$$\leq (\varepsilon_0\varepsilon_1)^{-k} e^{\ln \tilde{\gamma}_1(\varepsilon_0\xi) - \ln \tilde{\gamma}_1(a_1\xi)} \rho_1(\varepsilon_1\xi)\rho_1(b_1\tau).$$

Внаслідок опуклості функції $\ln \tilde{\gamma}_1$ дістаємо, що

$$\ln \tilde{\gamma}_1(\varepsilon_0\xi) - \ln \tilde{\gamma}_1(a_1\xi) \leq$$

$$\leq -\ln \tilde{\gamma}_1((a_1 - \varepsilon_0)\xi),\ \varepsilon_0 \in (0, a_1),$$

тобто

$$\Delta_k^{'}(\sigma) \leq (\varepsilon_0\varepsilon_1)^{-k} e^{-\ln \tilde{\gamma}_1(\tilde{a}_1\varepsilon)} \rho_1(\varepsilon_1\xi)\rho_1(b_1\tau) =$$

$$= (\varepsilon_0\varepsilon_1)^{-k} \gamma_1(\tilde{a}_1\xi)\rho_1(\varepsilon_1\xi)\rho_1(b_1\tau), \quad \tilde{a}_1 = a_1 - \varepsilon_0.$$

Доведемо тепер, що $\exists\, \tilde{c}_2 > 0\, \exists\, \tilde{a}_2 > 0\, \forall\, \xi \in \mathbb{R}:$

$$\gamma_1(\tilde{a}_1\xi)\rho_1(\varepsilon_1\xi) \leq c_2\gamma_1(\tilde{a}_2\xi).$$

Оскільки

$$\rho_1(\varepsilon_1\xi) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{|\varepsilon_1\xi|^n}{\tilde{m}_n}, \quad |\xi| \geq \frac{1}{\varepsilon_1}$$

(тут $\{\tilde{m}_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — послідовність, за якою будується функція ρ_1), то для довільного $\nu_0 \in (0, \rho_1(\varepsilon_1\xi))$ знайдеться номер $n_0 = n_0(\nu_0, \xi)$ такий, що

$$\frac{|\varepsilon_1\xi|^{n_0}}{\tilde{m}_{n_0}} > \rho_1(\varepsilon_1\xi) - \nu_0.$$

Припустимо, що $\nu_0 = \dfrac{1}{2}\rho_1(\varepsilon_1\xi)$. Тоді $\rho_1(\varepsilon_1\xi) \leq \dfrac{2|\varepsilon_1\xi|^{n_0}}{\tilde{m}_{n_0}}$. Крім того,

$$\gamma_1(\tilde{a}_1\xi) \leq \frac{\tilde{b}_n}{|\tilde{a}_1\xi|^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+,\ |\xi| \geq \frac{1}{\tilde{a}_1}$$

($\{\tilde{b}_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — послідовність, за якою будується функція γ_1). Оскільки

$$\rho_1(\varepsilon_1\xi)\gamma_1(\tilde{a}_1\xi) \leq \frac{2}{\tilde{m}_{n_0}}\frac{|\varepsilon_1\xi|^{n_0}}{|\tilde{a}_1\xi|^n}\tilde{b}_n \leq$$

$$\leq \frac{2}{\tilde{m}_{n_0}} \inf_{n\in\mathbb{Z}_+}\left\{\frac{|\varepsilon_1\xi|^{n_0}}{|\tilde{a}_1\xi|^n}\tilde{b}_n\right\} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\tilde{m}_{n_0}} \inf_{n\geq n_0}\left\{\frac{|\varepsilon_1\xi|^{n_0}}{|\tilde{a}_1\xi|^n}\tilde{b}_n\right\},$$

то вважатимемо, що $n \geq n_0$. Нехай $\varepsilon_1 \in (0, \tilde{a}_1)$. Тоді

$$\frac{2}{\tilde{m}m_{n_0}}\frac{|\varepsilon_1\xi|^{n_0}}{|\tilde{a}_1\xi|^n}\tilde{b}_n = \frac{2\tilde{b}_n\left(\frac{\varepsilon_1}{\tilde{a}_1}\right)^{n_0}}{|\tilde{a}_1\xi|^{n-n_0}m_n} \leq$$

$$\leq \frac{2\tilde{b}_n}{|\tilde{a}_1\xi|^{n-n_0}\tilde{m}_{n_0}}$$

(тут враховано, що $\dfrac{\varepsilon_1}{\tilde{a}_1} \leq 1$). Оцінимо вираз

$$\inf_{n\geq n_0} \frac{\tilde{b}_n}{|\tilde{a}_1\xi|^{n-n_0}\tilde{m}_{n_0}} =$$

$$= \inf_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{\tilde{b}_{k+n_0}}{\tilde{m}_{n_0}|\tilde{a}_1\xi|^k}.$$

Послідовності $\{\tilde{b}_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{\tilde{m}_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ володіють властивостями 2), 3), тобто

$$\exists\, c > 0\, \exists\, M > 1: \ \tilde{b}_{k+n_0} \leq cM^{n_0+k-1}\tilde{b}_{n_0+k-1} =$$

$$= cM^{n_0} \cdot M^{k-1}\tilde{b}_{n_0+k-1}, \quad \forall\, k \geq 1,$$

$$\forall\, h > 0\, \exists\, c_h > 0: \ \tilde{m}_{n_0} \geq c_h \cdot h^{n_0}.$$

Візьмемо $h > 0$ таке, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{cM^{n_0}}{h} \leq 1$. Тоді

$$\frac{\tilde{b}_{k+n_0}}{\tilde{m}_{n_0}} \leq \frac{cM^{n_0}M^{k-1}}{c_h h^{n_0}}\tilde{b}_{n_0+k-1} \leq \frac{M^{k-1}}{c_h \cdot h^{n_0-1}}\tilde{b}_{n_0+k-1},$$

$$\tilde{b}_{n_0+k-1} \leq cM^{n_0+k-2}\tilde{b}_{n_0+k-2},$$

тобто

$$\frac{\tilde{b}_{k+n_0}}{\tilde{m}_{n_0}} \leq \frac{cM^{n_0}M^{k-1}M^{k-2}}{c_h \cdot h^{n_0-1}}\tilde{b}_{n_0+k-2} \leq$$

$$\leq \frac{M^{k-1}M^{k-2}}{c_h h^{n_0-2}}\tilde{b}_{n_0+k-2}$$

і т.д. Остаточно нерівності будуть мати вигляд

$$\frac{\tilde{b}_{k+n_0}}{\tilde{m}_{n_0}} \leq \frac{M^{k-1}M^{k-2}\cdots M^{k-n_0}}{c_h}\tilde{b}_k =$$

$$= \frac{M^{kn_0}}{M^{1+2+\ldots+n_0}c_h}\tilde{b}_k \leq \frac{1}{c_h}\left(\frac{h}{c}\right)^k\tilde{b}_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$\inf_{n\geq n_0}\frac{\tilde{b}_n}{|\tilde{a}_1\xi|^{n-n_0}\tilde{m}_{n_0}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_h}\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\left\{\frac{\tilde{h}^k\tilde{b}_k}{|\tilde{a}_1\xi|^k}\right\} = \tilde{c}\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{\tilde{b}_k}{\left|\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{h}}\xi\right|^k},$$

де $\tilde{c} = \dfrac{1}{c_h}$, $\tilde{h} = \dfrac{h}{c} > 1$. Звідси випливає нерівність

$$\rho_1(\varepsilon_1\xi)\gamma_1(\tilde{a}_1\xi) \leq \tilde{c}_2'\gamma_1(\tilde{a}_2\xi),$$

$$\tilde{c}_2' = 2\tilde{c}, \quad \tilde{a}_2 = \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{h}} < a_1, \tag{2}$$

яка є правильною для $\xi : |\xi| \geq \dfrac{1}{\varepsilon_1}$ за умови, що $\varepsilon_1 < \tilde{a}_2$ (бо тоді $\dfrac{1}{a_1} < \dfrac{1}{\tilde{a}_2} < \dfrac{1}{\varepsilon_1}$). Нерівність (2) буде правильною і для ξ: $|\xi| \leq \dfrac{1}{\varepsilon_1}$ з деякою іншою сталою $\tilde{c}_2'' > 0$.

Вважатимемо, що $\tilde{c}_2 = \max\{\tilde{c}_2', \tilde{c}_2''\}$. Тоді

$$\Delta_k'(\sigma) \leq \tilde{c}_2(\varepsilon_0\varepsilon_1)^{-k}\gamma_1(\tilde{a}_2\xi)\rho_1(b_1\tau),$$

$$\sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C}.$$

Отже, остаточно дістаємо, що $\beta_k(\sigma) \leq \nu d^k \varepsilon^{2k}\gamma_1(\tilde{\tilde{a}}\,\xi)\rho_1(\tilde{\tilde{b}}\,\tau)$, $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$; $\tilde{\tilde{a}}, \tilde{\tilde{b}} > 0$, $d = d(\tilde{\tilde{a}}, \tilde{\tilde{b}}) > 0$, $k \in \mathbb{N}$, причому всі сталі не залежать від k. Таким чином, $|r_{n,\varphi}(\sigma)| \leq \nu \cdot \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(d\varepsilon^2)^k\gamma_1(\tilde{\tilde{a}}\,\xi)\rho_1(\tilde{\tilde{b}}\,\tau)$, $\sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C}$. Візьмемо $\varepsilon = (2d)^{-1/2}$. Тоді

$$|r_{n,\varphi}(\sigma)| \leq \frac{\nu}{2^n}\gamma_1(\tilde{\tilde{a}}\,\xi)\rho_1(\tilde{\tilde{b}}\,\tau) \leq$$

$$\leq \nu\gamma_1(\tilde{\tilde{a}}\,\xi)\rho_1(\tilde{\tilde{b}}\,\tau). \qquad (3)$$

Із (3) випливає, що $r_{n,\varphi} \in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ (тобто умова 1) виконується). Із (3) випливає також, що послідовність $\{r_{n,\varphi}, n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в будь-якій обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, тобто послідовність $\{r_{n,\varphi}, n \geq 1\}$ збігається в просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$. Цим доведено, що оператор $f(B_{\nu,z})$ визначений у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$, причому кожну обмежену множину цього простору він переводить в обмежену множину цього ж простору. Отже, оператор $f(B_{\nu,z})$ обмежений (неперервний) у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$.

Навпаки, якщо оператор $f(B_{\nu,z})$ визначений і обмежений у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$, то із співвідношення $F_B[\psi] = f(\sigma)F_B[\varphi]$, $\{\varphi, \psi\} \subset \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$ випливає, що f — мультиплікатор у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$. Теорема доведена.

Наслідок. *Нехай A_f — звуження оператора $f(B_{\nu,z})$ на $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$. Тоді для довільної функції $\varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$ правильною є рівність $(A_f\varphi)(x) = F_B^{-1}[f(\xi)F_B[\varphi](\xi)](x)$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}$.*

Зауваження. Аналогічні результати є правильними і для оператора Бесселя нескінченного порядку $L(t; B_{\nu,z}) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n}(t)(-B_{\nu,z})^n$, побудованого за цілою парною (за z) функцією f, залежною від параметра t $f(t,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n}(t)z^{2n}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $t \in [0,T]$, у припущенні, що $c_{2n} \in C([0,T])$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$, а функція $f(t,\cdot)$ при кожному $t \in [0,T]$ є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$, тобто $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, c_\varepsilon > 0\ \forall\, z \in \mathbb{C}$: $\sup\limits_{t \in [0,T]} |f(t,z)| \leq c_\varepsilon(\gamma_1(\varepsilon x))^{-1}\rho_1(\varepsilon y)$; при цьому $(L(t; B_\nu)\varphi)(x) = F_B^{-1}[f(t,\xi)\ F_B[\varphi](\xi)](x)$, $\forall\, \varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}$.

Зазначимо також, що наведені результати можна одержати і в n-вимірному випадку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.

2. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Про одне узагальнення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр.— Вип. 134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.30—37.

3. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Перетворення Фур'є та оператори диференціювання нескінченного порядку у просторах типу C // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр.— Вип. 160. Математика.— Чернівці: Рута, 2003.— С.30—38.

4. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр.— Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.21—26.

5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

Стаття надійшла до редколегії 1.12.2003