УДК 517.51

©2004 р. **В.Г. Герасимчук**

Тернопільський державний педагогічний університет імені В. Гнатюка

РОЗРИВИ CD-ФУНКЦІЙ НА КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ КРИВИХ

Введено поняття вертикальної лакунарності множини в $\mathbb{R}^2$ і з його допомогою показано, що існують квазінеперервні функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і CD-функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такі, що множина $D_g(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, g(x)) \in D(f)\}$ всюди щільна в $\mathbb{R}$.

It is defined vertical lacunarity of a set in $\mathbb{R}^2$ and with its help it is shown that there exist quasicontinuous functions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and CD-functions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, such that the set $D_g(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, g(x)) \in D(f)\}$ is everywhere dense in $\mathbb{R}$.

1. У праці [1] вивчалися різноманітні властивості множини $D(f)$ точок розриву CD-функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, тобто функцій, які неперервні відносно першої змінної і диференційовні відносно другої. Зокрема, там було показано, що для неперервної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і CD-функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ множина $D_g(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, g(x)) \in D(f)\}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Крім того, було з'ясовано: якщо функція f неперервна відносно першої змінної і неперервно диференційовна відносно другої, то для кожного інтервалу $V = (c, d)$ проекція множини $D(f) \bigcap (\mathbb{R} \times V)$ на вісь абсцис ніде не щільна. На основі цього в [1] було отримано опис множин точок розриву нарізно неперервно диференційовних функцій, який розвиває результат з [2], де розглядалися функції з нарізно неперервними частинними похідними. Разом із тим у [1] був побудований приклад CD-функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $D(f) \subseteq \mathbb{R} \times (0, 1)$, причому проекція множини $D(f)$ на першу вісь всюди щільна в $\mathbb{R}$. У цьому прикладі множина $D(f)$ лежить на графіку деякої кліковoї функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, отже, для кліковиx функцій g множина $D_g(f)$ у CD-функцій f може бути і всюди щільною. Оскільки квазінеперервність є певним підсиленням кліковості й ослабленням неперервності, то виникло природне запитання: чи для квазінеперервної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і CD-функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ множина $D_g(f)$ буде ніде не щільною?

Як з'ясувалося, відповідь на поставлене запитання негативна. В цій статті ми вводимо поняття вертикально лакунарної множини (див. п.3) і показуємо, що для кожної не більш ніж зліченної вертикально лакунарної множини E в $\mathbb{R}^2$ існує CD-функція $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, для якої $D(f) = E$. Далі, виявляється, що множина $E_g = \{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$ для квазінеперервної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обов'язково вертикально лакунарна. Легко побудувати приклад квазінеперервної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $D(g) = \mathbb{Q}$. Для цієї функції множина E_g буде зліченною й вертикально лакунарною. Побудувавши для неї CD-функцію f, для якої $D(f) = E_g$, ми й одержуємо потрібну негативну відповідь, адже проекція множини E_g на першу вісь збігається з множиною $\mathbb{Q}$ раціональних чисел і є всюди щільною в $\mathbb{R}$.

Насправді наші побудови стосуються загальнішого випадку, в якому розглядаються CD-функції $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де X – простір Прейсса-Симона [3]. Зауважимо, що попередні версії результатів цієї статті були анонсовані в [4,5].

2. Кажуть, що послідовність підмножин A_n топологічного простору X *збігається до точки* $x \in X$ (коротко: $A_n \to x$), якщо для кожного околу U точки x в X існує такий номер N , що $A_n \subseteq U$, як тільки $n \geq N$. Нагадаємо [3], що цілком регулярний простір X називається *простором Прейсса-Симона*, якщо для кожного його замкненого підпростору L і кожної точки x з L існує послідовність непорожніх відкритих в L множин U_n, яка збігається до точки x в L.

Лема 1. *Нехай X – простір Прейсса-Симона, G – відкрита в X множина і $a \in \overline{G} \setminus G$. Тоді:*

(i) існує диз'юнктна послідовність відкритих в X непорожніх множин U_n, така, що $\overline{U}_n \subseteq G$ для кожного n і $U_n \to a$.

(ii) існують диз'юнктні відкриті в X множини G' і G'', які містяться в G і $\overline{G}' \setminus G = \overline{G}'' \setminus G = \{a\}$.

Доведення. (i). Існує послідовність відкритих в X непорожніх множин W_n, така, що $W_n \subseteq G$ і $W_n \to a$. Щоб її побудувати, ми беремо відкриті в $\overline{G}$ непорожні множини G_n такі, що $G_n \to a$ і вважаємо, що $W_n = G_n \bigcap G$. Оскільки $a \notin W_n$ для кожного n і множини W_n непорожні, то для кожного n існує точка $x_n \in W_n \setminus \{a\}$. З регулярності простору X випливає, що для кожного n існує відкритий окіл V_n точки x_n такий, що $\overline{V}_n \subseteq W_n \setminus \{a\}$. Зауважимо, що $V_n \to a$ і $a \notin \overline{V}_n$ для кожного n. На основі цього за індукцією легко побудувати таку строго зростаючу послідовність номерів n_k, що множини $U_k = V_{n_k}$ диз'юнктні. Справді, якщо номери $n_1, \ldots, n_k$ визначені, то множина $U = X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \overline{V}_{n_i}$ є околом точки a, отже, існує такий номер n_{k+1}, що $V_{n_{k+1}} \subseteq U$ і $n_{k+1} > n_k$. Зрозуміло, що $U_k \to a$, $\overline{U}_k = \overline{V}_{n_k} \subseteq W_{n_k} \subseteq G$, отже, послідовність (U_k) шукана.

(ii). Візьмемо послідовність множин U_n, яка задовольняє умову (i), і будемо вважати $G' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_{2k-1}$ і $G'' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_{2k}$. Зрозуміло, що G' і G'' – відкриті й диз'юнктні частини множини G. Покажемо, що $\overline{G}' \setminus G = \{a\}$. Оскільки $U_{2k-1} \to a$, то $a \in \overline{G}'$. Крім того, за умовою $a \notin G$, отже, $a \in \overline{G}' \setminus G$. Нехай $x \in \overline{G}' \setminus G$. Покажемо, що $x = a$. Припустимо, що $x \neq a$. З гаусдорфовості простору X випливає, що існують такі околи U і V точок x і a в X, що $U \cap V = \emptyset$. Оскільки $U_{2k-1} \to a$, то існує такий номер m, що $U_{2k-1} \subseteq V$, як тільки $k > m$. Замкнена множина $F = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \overline{U}_{2k-1}$ міститься в множині G, а $x \notin G$. Отже, $X \setminus F$ – відкритий окіл точки x. Нехай $U_o = U \cap (X \setminus F) = U \setminus F$. Ця множина є околом точки x, причому $U_o \cap G' = \emptyset$. Але $x \in \overline{G}'$, отже, $U_o \cap G' \neq \emptyset$. Отримана суперечність показує, що $x = a$. Таким чином, рівність $\overline{G}' \setminus G = \{a\}$ встановлена.

Рівність $\overline{G}'' \setminus G = \{a\}$ доводиться аналогічно.

Зауважимо, що в доведенні використовувалася тільки регулярність простору X, а не його повна регулярність.

3. Нехай X і Y – топологічні простори, $E \subseteq X \times Y$ і $p = (x, y) \in X \times Y$. Ми говоримо, що множина E *вертикально лакунарна в точці* p, якщо існують відкрита в X множина G і окіл V точки y в Y такі, що $x \in \overline{G} \setminus G$ і $(G \times V) \cap E = \emptyset$. При цьому множина $L = G \times V$ називається *вертикальною лакуною* множини E в точці p. Множину E називаємо *вертикально лакунарною*, якщо вона має вертикальну лакуну в кожній своїй точці.

Лема 2. *Нехай X – простір Прейсса-Симона і $E = \{p_n = (a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ – вертикально лакунарна множина в добутку $X \times \mathbb{R}$. Тоді існує диз'юнктна послідовність множин W_n така, що W_n є вертикальною лакуною множини E в точці p_n для кожного n.*

Доведення. Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $\mathcal{L}_{n-1} = \{L_1, \ldots, L_{n-1}\}$ – система, в якій L_k при $k < n$ – це вертикальна лакуна множини E в точці p_k. Будемо говорити, що $\mathcal{L}_{n-1}$ має властивість P_n, якщо для кожного номера $m \geq n$ існує вертикальна лакуна W множини E в точці p_m така, що $W \cap (\bigcup\limits_{k<n} L_k) = \emptyset$. Зауважимо, що система $\mathcal{L}_0 = \emptyset$ має властивість P_1, бо множина E вертикально лакунарна.

Припустимо, що $\mathcal{L}_{n-1} = \{L_1, \ldots, L_{n-1}\}$ – диз'юнктна система вертикальних лакун, яка має властивість P_n. Доведемо, що існує вертикальна лакуна L_n множини E в точці $p_n = (a_n, b_n)$ така, що система $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n-1} \cup \{L_n\}$ диз'юнктна і має властивість

P_{n+1}. Оскільки система $\mathcal{L}_{n-1}$ має властивість P_n, то існує вертикальна лакуна $\tilde{W}_n = \tilde{G}_n \times \tilde{V}_n$ множини E в точці p_n така, що $\tilde{W}_n \cap L_k = \emptyset$ при $k < n$. За твердженням (ii) леми 1, існують диз'юнктні відкриті множини G'_n і G''_n такі, що $G'_n \cup G''_n \subseteq \tilde{G}_n$ і $\overline{G}'_n \setminus \tilde{G}_n = \overline{G}''_n \setminus \tilde{G}_n = \{a_n\}$. Оскільки множини $(-\infty, b_n) \cap \tilde{V}_n$ і $(b_n, +\infty) \cap \tilde{V}_n$ незліченні, то існують такі числа α_n і β_n, що $\alpha_n < b_n < \beta_n$, $[\alpha_n, \beta_n] \subseteq \tilde{V}_n$ і $\alpha_n \neq b_k$ та $\beta_n \neq b_k$ для кожного номера k. Нехай $G_n = G'_n$, $V_n = (\alpha_n, \beta_n)$ і $L_n = G_n \times V_n$. Ясно, що L_n – вертикальна лакуна множини E в точці p_n, причому $L_n \subseteq \tilde{W}_n$. Покажемо, що L_n – шукана множина.

Зрозуміло, що $L_n \cap L_k = \emptyset$ при $k < n$, бо $L_n \subseteq \tilde{W}_n$. Розглянемо номер $m > n$. Припустимо, що $p_m \in \overline{L}_n = \overline{G}_n \times \overline{V}_n$. Тоді $a_m \in \overline{G}_n$ і $b_m \in \overline{V}_n = [\alpha_n, \beta_n] \subseteq \tilde{V}_n$. З означення вертикальної лакуни отримуємо, що $\tilde{W}_n \cap E = \emptyset$, звідки випливає, що $p_m = (a_m, b_m) \notin \tilde{W}_n$, а значить, $a_m \notin \tilde{G}_n$, бо $b_m \in \tilde{V}_n$. Тому $a_m \in \overline{G}'_n \setminus \tilde{G}_n = \{a_n\}$, тобто $a_m = a_n$. Далі, за побудовою $b_m \neq \alpha_n$ і $b_m \neq \beta_n$, отже, $b_m \in V_n$ і $p_m \in \{a_n\} \times V_n$. В такому разі множина $W = G''_n \times V_n$ є вертикальною лакуною множини E в точці p_m, яка не перетинається з L_k при $k < n$, бо $W \subseteq \tilde{W}_n$ і не перетинається з L_n, бо $G'_n \cap G''_n = \emptyset$. Нехай тепер $p_m \notin \overline{L}_n$. Тоді існують відкритий окіл U точки a_m в X і окіл V точки b_m в $\mathbb{R}$ такі, що $(U \times V) \cap L_n = \emptyset$. Оскільки $\mathcal{L}_{n-1}$ має властивість P_n, то існує вертикальна лакуна $\tilde{W} = \tilde{G} \times \tilde{V}$ множини E в точці p_m така, що $\tilde{W} \cap (\bigcup\limits_{k<n} L_k) = \emptyset$. Нехай $W = \tilde{W} \bigcap (U \times V) = (\tilde{G} \bigcap U) \times (\tilde{V} \bigcap V)$. Легко перевірити, що W – вертикальна лакуна множини E в точці p_m така, що $W \bigcap (\bigcup\limits_{k \leq n} L_k) = \emptyset$.

Приступимо тепер до побудови потрібної нам диз'юнктної послідовності вертикальних лакун W_n. Оскільки система $\mathcal{L}_o = \emptyset$ має властивість P_1, то існує така вертикальна лакуна W_1 множини E в точці p_1, що система $\{W_1\}$ має властивість P_2. Припустимо, що вже побудована диз'юнктна система $\{W_1, \ldots, W_n\}$ вертикальних лакун W_k множини E в точках p_k, яка має властивість P_{n+1}. Тоді за доведеним вище існує вертикальна лакуна W_{n+1} множини E в точці p_{n+1} така, що система $\{W_1, \ldots, W_{n+1}\}$ диз'юнктна і має властивість P_{n+2}. Таким чином, шукана послідовність вертикальних лакун W_n побудована.

4. Нехай X – топологічний простір. Відображення $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ми називаємо CD-*функцією*, якщо для кожного $y \in \mathbb{R}$ функція $f_y = f(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ неперервна і для кожного $x \in X$ функція $f^x = f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовна.

Теорема 1. *Нехай X – простір Прейсса-Симона і E – не більш ніж зліченна вертикально лакунарна множина в добутку $X \times \mathbb{R}$. Тоді існує CD-функція $f : X \times \mathbb{R} \to [0, 1]$ така, що її множина точок розриву $D(f) = E \subseteq f^{-1}(0)$.*

Доведення. Нехай $E = \{p_n = (a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Користуючись лемою 2, побудуємо для множини E відповідну диз'юнктну послідовність вертикальних лакун $W_n = G_n \times V_n$, в яких множини V_n відкриті. За твердженням (i) леми 1, для кожного номера n виберемо диз'юнктну послідовність відкритих в X непорожніх множин $U_{n,m}$ таку, що $U_{n,m} \to a_n$ при $m \to \infty$ і довільного n, причому $\overline{U}_{n,m} \subseteq G_n$ для будь-яких n і m. Далі, для кожного n візьмемо число δ_n таке, що $0 < \delta_n < \frac{1}{n}$ і $(b_n - 2\delta_n, b_n + 2\delta_n) \subseteq V_n$. Нехай $V_{n,m} = (b_n + \frac{\delta_n}{2^{m+1}}, b_n + \frac{\delta_n}{2^m})$ і $W_{n,m} = U_{n,m} \times V_{n,m}$. Оскільки $U_{n,m} \to a_n$ і $V_{n,m} \to b_n$ при $m \to \infty$, то $W_{n,m} \to p_n$ при $m \to \infty$. Зауважимо, що подвійна послідовність множин $W_{n,m}$ є диз'юнктною. При цьому, якщо $(x, y') \in W_{n,m}$ і $(x, y'') \notin W_n$, то $|y' - y''| > \delta_n$. Справді, у цьому випадку $x \in U_{n,m} \subseteq G_n$, $y' \in V_{n,m}$, отже, $y'' \notin V_n$. Тому $|y'' - b_n| \geq 2\delta_n$ і $|y' - b_n| < \frac{\delta_n}{2^m} \leq \frac{\delta_n}{2}$, звідки $|y'' - y'| \geq |y'' - b_n| - |y' - b_n| > 2\delta_n - \frac{\delta_n}{2} = \frac{3\delta_n}{2} > \delta_n$.

Припустимо, що $y_{n,m} = b_n + \frac{3\delta_n}{2^{m+2}}$ і візьмемо довільну точку $x_{n,m} \in U_{n,m}$. Тоді $p_{n,m} = (x_{n,m}, y_{n,m}) \in W_{n,m}$. Оскільки простір X цілком регулярний, то існує неперервна функція $\varphi_{n,m} : X \to [0, 1]$ така, що $\varphi_{n,m}(x_{n,m}) = 1$ і $\mathrm{supp}\varphi_{n,m} \subseteq U_{n,m}$. Крім того, існує диференційовна функція $\psi_{n,m} : \mathbb{R} \to [0,1]$ така, що $\psi_{n,m}(y_{n,m}) = 1$ і $\mathrm{supp}\psi_{n,m} \subseteq V_{n,m}$. Для $p = (x,y) \in X \times \mathbb{R}$ вважатимемо

$$f_{n,m}(p) = \varphi_{n,m}(x)\psi_{n,m}(y)e^{-\frac{1}{\delta_n}}$$

і

$$f_n(p) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{n,m}(p).$$

Очевидно, що $f_{n,m}$ є неперервними CD-функціями, причому $0 \le f_{n,m}(p) \le e^{-\frac{1}{\delta_n}} \le e^{-n}$ на $X \times \mathbb{R}$, $f_{n,m}(p_{n,m}) = e^{-\frac{1}{\delta_n}}$ і $\mathrm{supp} f_{n,m} \subseteq W_{n,m}$. Оскільки множини $U_{n,m}$ диз'юнктні, то $f_n(x,y) = f_{n,m}(x,y)$, якщо $x \in U_{n,m}$ і $y \in \mathbb{R}$, і $f_n(x,y) = 0$ для всіх $y \in \mathbb{R}$, якщо $x \notin \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} U_{n,m}$. Це показує, що функція f_n визначена на $X \times \mathbb{R}$ і диференційовна відносно другої змінної, причому $0 \le f_n(p) \le e^{-\frac{1}{\delta_n}} \le e^{-n}$ на $X \times \mathbb{R}$. Оскільки $W_{n,m} \to p_n$ і $\mathrm{supp} f_{n,m} \subseteq W_{n,m}$, то функція f_n неперервна в кожній точці $p \ne p_n$. Далі $f_n(x, b_n) = 0$ на X, отже, f_n неперервна відносно першої змінної в точці p_n. Крім того, $f_n(p_{n,m}) = f_{n,m}(p_{n,m}) = e^{-\frac{1}{\delta_n}}$ і $p_{n,m} \to p_n$ при $m \to \infty$, бо $p_{n,m} \in W_{n,m}$, а $f_n(p_n) = 0$. Тому $D(f_n) = \{p_n\}$.

Нехай

$$f(p) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p),$$

якщо $p \in X \times \mathbb{R}$. Оскільки $0 \le f_n(p) \le e^{-n}$ на $X \times \mathbb{R}$ для кожного n, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(p)$ збігається рівномірно на $X \times \mathbb{R}$, отже, функція f визначена на $X \times \mathbb{R}$, неперервна в кожній точці $p \notin E$ за сукупністю змінних і неперервна відносно першої змінної на $X \times \mathbb{R}$. Крім того,

$$f(p) = \sum_{n,m} f_{n,m}(p)$$

на $X \times \mathbb{R}$, зокрема $f(p) = f_{n,m}(p)$ на $W_{n,m}$ і $f(p) = 0$ на $(X \times \mathbb{R}) \setminus (\bigcup\limits_{n,m} W_{n,m})$. Тому $0 \le f(p) \le 1$ на $X \times \mathbb{R}$. До того ж $f(p_n) = 0$, $f(p_{n,m}) = e^{-\frac{1}{\delta_n}}$ і $p_{n,m} \to p_n$ при $m \to \infty$. Отже, $p_n \in D(f)$ для кожного n, а значить, $D(f) = E$.

Доведемо, що функція f диференційовна відносно другої змінної. Нехай $p_o = (x_o, y_o) \in X \times \mathbb{R}$. Якщо $p_o \in W_n$ для деякого n, то існування похідної $\frac{\partial f}{\partial y}(p_o)$ випливає з того, що $f|_{W_n} = f_n|_{W_n}$, похідна $\frac{\partial f_n}{\partial y}(p_o)$ існує і множина W_n відкрита в $X \times \mathbb{R}$. Нехай $p_o \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_n$. Тоді $f(p_o) = 0$. Візьмемо точку $p = (x_o, y)$ і розглянемо різницеве відношення

$$r(y) = \frac{f(p) - f(p_o)}{y - y_o} = \frac{f(p)}{y - y_o}.$$

Якщо $p \notin \bigcup\limits_{n,m} W_{n,m}$, то $f(p) = 0$, а значить, $r(y) = 0$. Нехай $p \in W_{n,m}$ для деяких $n = n(y)$ і $m = m(y)$. Оскільки $p_o \notin W_n$, то $|y - y_o| > \delta_n$. Крім того, $0 \le f(p) = f_{n,m}(p) \le e^{-\frac{1}{\delta_n}}$. Отже,

$$|r(y)| = \frac{f(p)}{|y - y_o|} \le \frac{e^{-\frac{1}{\delta_n}}}{\delta_n} = d_n.$$

Доведемо, що $r(y) \to 0$ при $y \to y_o$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки $d_k \to 0$ при $k \to \infty$, то існує такий номер N, що $d_k < \varepsilon$ при $k > N$. Розглянемо множини індексів

$$I = \{(k,j) : x_o \in U_{k,j}\}$$

і

$$I_N = \{(k,j) \in I : k \le N\}.$$

Якщо $(k,j') \in I$ і $(k,j'') \in I$, то $x_o \in U_{k,j'} \cap U_{k,j''}$, отже, $j' = j''$, бо для кожного k послідовність множин $U_{k,j}$ диз'юнктна. Звідси випливає, що множина I_N скінченна. Тоді множина $F = \bigcup\limits_{(k,j) \in I_N} \overline{V}_{k,j}$ замкнена. Зрозуміло, що $y_o \notin F$. Справді, нехай $(k,j) \in I_N$. Тоді $x_o \in U_{k,j} \subseteq G_k$. Але $p_o \notin W_k = G_k \times V_k$. Отже, $y_o \notin V_k$, а значить, $y_o \notin \overline{V}_{k,j}$, бо $\overline{V}_{k,j} \subseteq V_k$. Множина $V = \mathbb{R} \setminus F$ є відкритим околом точки y_o в $\mathbb{R}$. Нехай $y \in V$ і $p = (x_0, y) \in W_{n,m}$. Тоді $x_o \in U_{n,m}$ і $y \in V_{n,m}$. В такому разі $(n,m) \in I$, причому $n > N$, бо $y \notin F$. Тому $|r(y)| \le d_n < \varepsilon$. Таким чином, встановлено, що $\frac{\partial f}{\partial y}(p_o) = 0$, і теорема доведена.

5. Теорема 2. *Нехай X – топологічний T_1-простір, Y – регулярний топологічний простір, $g : X \to Y$ – квазінеперервне відображення і $E_g = \{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$. Тоді E_g – вертикально лакунарна множина.*

Доведення. Нехай $p_o = (x_o, y_o) \in E_g$. Тоді $y_o = g(x_0)$ і $x_o \in D(g)$. Оскільки простір Y регулярний, то існує такий замкнений окіл V точки y_o в Y, що $g(U) \not\subseteq V$ для кожного околу U точки x_o в X. Позначимо через $\mathcal{U}$ систему всіх відкритих околів точки x_o в просторі X. Для кожного $U \in \mathcal{U}$ існує точка $x_U \in U$ така, що $g(x_U) \notin V$. Оскільки $g(x_o) \in V$, то $x_U \neq x_o$. Множина $U \setminus \{x_o\}$ є відкритим околом точки x_U, а множина $Y \setminus V$ – це відкритий окіл точки $g(x_U)$. Оскільки g квазінеперервна в точці x_U, то існує така відкрита непорожня множина G_U, що $G_U \subseteq U \setminus \{x_o\}$ і $g(G_U) \subseteq Y \setminus V$. Нехай $G = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} G_U$. Множина G відкрита в X і $x_o \in \overline{G} \setminus G$. Крім того, $g(G) \cap V = \emptyset$. Тому $(G \times V) \cap E_g = \emptyset$, бо $(G \times V) \cap \mathrm{Gr}(g) = \emptyset$, а $E_g \subseteq \mathrm{Gr}(g) = \{(x, g(x)) : x \in X\}$. Таким чином, множина $L = G \times V$ є вертикальною лакуною множини E_g в точці p_o, отже, E_g – вертикально лакунарна множина.

Теорема 3. *Існують квазінеперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і CD-функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такі, що множина $D_g(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, g(x)) \in D(f)\}$ всюди щільна в $\mathbb{R}$.*

Доведення. Нехай $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – зліченна всюди щільна множина в $\mathbb{R}$ (наприклад $A = \mathbb{Q}$), причому $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Розглянемо функцію $\varphi : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, для якої $\varphi(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ і $\varphi(0) = 0$. Функція φ квазінеперервна і $D(\varphi) = 0$. Нехай $u_n(x) = \frac{1}{2^n}\varphi(x - a_n)$ і $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $\mathbb{R}$. Функції $g_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ квазінеперервні, бо сума квазінеперервної функції в точці x_o і неперервної функції в точці x_o залишається квазінеперервною в точці x_o. Крім того, $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$ на $\mathbb{R}$, а рівномірна границя квазінеперервних функцій теж квазінеперервна. Тому g – квазінеперервна функція. Далі $D(u_n) = \{a_n\}$ і $g(x) = u_n(x) + v_n(x)$, де $v_n(x) = \sum\limits_{k \neq n} u_k(x)$. Функція u_n розривна в точці a_n, а функція v_n неперервна в цій точці, як сума рівномірно збіжного ряду неперервних в точці a_n функцій. Тому g розривна в точці a_n і $A \subseteq D(g)$. З рівномірної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $\mathbb{R}$ і неперервності всіх функцій u_n поза множиною A випливає, що $D(g) \subseteq A$. Отже, $D(g) = A$. За теоремою 2 множина $E_g = \{(x, g(x) : x \in A\}$ вертикально лакунарна. Крім того, вона зліченна. Тому за теоремою 1 існує CD-функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = E_g$. Тоді $D_g(f) = A$, отже, множина $D_g(f)$ всюди щільна в $\mathbb{R}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.22—29.

2. *Колесников С.В.* Характеристика множеств точек разрыва функций с линейно непрерывными частными производными // Мат. заметки.— 1979.— **25**, N 1.— С.75—80.

3. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций.— М.: Изд-во Московского ун-та, 1989.— 222 с.

4. *Герасимчук В.К.* Розриви CD-функцій на квазінеперервних кривих // Міжнар. конф. "Комплексний аналіз та його застосування".— Львів, 2003.— С.22—23.

5. *Герасимчук В.* Побудова нарізно диференційовних функцій з дискретною множиною точок розриву // Міжнар. конф. "Шості Боголюбовські читання".— К.: Ін-т математики НАН України, 2003.— С.46

Стаття надійшла до редколегії 12.01.2004