УДК 517.53

©2004 р. Ю.М. Галь, О.М. Мулява

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Дрогобич

# УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ВАЛІРОНА ПРО НАЛЕЖНІСТЬ КАНОНІЧНИХ ДОБУТКІВ ДО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

У термінах тейлорових коефіцієнтів і розподілу нулів описано клас канонічних добутків $f$ роду $p \in \mathbb{Z}_+$, означений збіжністю інтегралу $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\omega(r)+1}} dr$, де $\omega$ – додатна на $(-\infty, +\infty)$ функція така, що $p < \varrho_1 \le \omega(r) \le \varrho_2 < p+1$ і $r\omega'(r) \ln r \to 0$, $r_0 \le r \to +\infty$.

In terms of the Taylor coefficients and the zeros distribution a class of canonical products $f$ of genus $p \in \mathbb{Z}_+$ defined by the convergence of the integral $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\omega(r)+1}} dr$ is described, where $\omega$ is a positive on $(-\infty, +\infty)$ function such that $p < \varrho_1 \le \omega(r) \le \varrho_2 < p+1$ and $r\omega'(r) \ln r \to 0$, $r_0 \le r \to +\infty$.

**1.Вступ.** Для цілої функції $f$ з нулями $z_k \ne 0$ введемо позначення: $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\varrho = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$ – порядок функції $f$, $\tau = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho}}$ – її тип. Зв'язок між зростанням $M_f(r)$, розподілом нулів $z_k$ та спаданням коефіцієнтів $a_n$ в термінах порядку і типу добре відомий (див., наприклад, [1]). У випадку, коли $\tau = 0$, Ж. Валірон [2] увів клас збіжності, який визначається умовою $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho+1}} dr < +\infty$, і показав, що якщо функція (1) належить до класу збіжності, то $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^{\varrho/n} < +\infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-\varrho} < +\infty$. Якщо $|a_n/a_{n+1}| \nearrow +\infty$, то умова $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\varrho/n} < +\infty$ є достатньою [3] для належності $f$ до класу збіжності, а якщо $\varrho$ – неціле число, то і умова $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-\varrho} < +\infty$ є достатньою [4] для належності $f$ до класу збіжності (зауважимо, що при нецілому $\varrho$ за теоремою Адамара про зображення цілої функції задача зводиться до питання належності до класу збіжності канонічних добутків). Отже, нехай $p \in \mathbb{Z}_+$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^p} = +\infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{p+1}} < +\infty$, а

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \; (a_0 = 1) \tag{1}$$

— канонічний добуток роду $p$, де $E(z, p)$ – первинний множник Вейєрштраса. У випадку, коли $p = 0$, зв'язок між зростанням $\ln M_f(r)$, спаданням коефіцієнтів $a_n$ та розподілом нулів $z_n$ в термінах класу збіжності, який визначений збіжністю інтегралу $\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{l(r)} dr$, де $l$ – додатна неперервна неспадна на $[r_0, +\infty)$ функція така, що $l(r)/r \nearrow +\infty \, (r \to +\infty)$, вивчено в [5]. Тут ми розглянемо випадок довільного $p$, а клас збіжності означимо умовою

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\omega(r)+1}} dr < +\infty, \tag{2}$$

де $\omega$ – певна додатна функція. Для $\omega(r) \equiv \varrho$ звідси отримуємо означення валіронового класу збіжності.

Нашою метою є доведення двох таких теорем.

**Теорема 1.** *Нехай неперервно диференційована на $[r_0, +\infty)$ функція $\omega$ така, що $p < \varrho_1 \le \omega(r) \le \varrho_2 < p+1$ і $r\omega'(r)\ln r \to$*

$0, r_0 \le r \to +\infty$. *Тоді для того, щоб для функції (1) справджувалась умова (2), необхідно, а у випадку, коли $|a_n/a_{n+1}| \nearrow +\infty\,(n\to\infty)$, і досить, щоб*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^{\omega\left(1/\sqrt[n]{|a_n|}\right)} < +\infty. \qquad (3)$$

**Теорема 2** *Нехай функція $\omega$ така, як у теоремі 1. Тоді для того, щоб для функції (1) справджувалась умова (2), необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{\omega(|z_n|)}} < +\infty. \qquad (4)$$

**2. Доведення теорем.** Будемо використовувати таку лему з [5].

**Лема.** *Нехай $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty\,(n\to\infty)$, ряд Діріхле*

$$F(s)=\sum_{n_0}^{\infty}a_n\exp\{s\lambda_n\},\quad s=\sigma+it, \qquad (5)$$

*є цілим і $\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp\{\sigma\lambda_n\}:n\ge 0\}$ – його максимальний член. Припустимо, що додатна неперервна на $[\sigma_0,+\infty)$ функція $\beta$ така, що $\int\limits_{\sigma_0}^{\infty}\frac{\sigma d\sigma}{\beta(\sigma)}<+\infty$. Тоді рівносильними є наступні три твердження:*

*а)* $\int\limits_{\sigma_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\beta(\sigma)}d\sigma<+\infty;$

*б)* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})B\left(\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0}\right)<+\infty;$

*в)* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(\lambda_n-\lambda_{n-1})B(\chi_{n-1}^0)<+\infty,$

*де $B(x)=\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\sigma-x}{\beta(\sigma)}d\sigma$, $a_n^0$ – коефіцієнти мажоранти Ньютона ряду Діріхле (5), а $\chi_n^0=(\ln a_n^0-\ln a_{n+1}^0)/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$.*

Доведемо теорему 1. Для цього в ряді (1) зробимо заміну $z=e^s$. Отримаємо ряд (2) з $\lambda_n=n$, для якого $\mu(\ln r,F)=\mu_f(r)$, де $\mu_f(r)=\max\{|a_n|r^n: n\ge 0\}$ – максимальний член ряду (1). За теоремою Бореля $\ln M_f(r)\sim\ln\mu_f(r)$ при $r\to+\infty$. Тому (2) виконується тоді і тільки тоді, коли $\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\ln\mu_f(r)}{r^{\omega(r)+1}}dr<+\infty$, тобто, коли $\int\limits_{\sigma_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\exp\{\sigma\omega(e^\sigma)\}}d\sigma<+\infty$. За лемою останнє співвідношення справджується тоді і тільки тоді, коли виконується умова б) з $\lambda_n=n$ і $B(x)=\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\sigma-x}{\exp\{\sigma\omega(e^\sigma)\}}d\sigma$. Але, завдяки умовам теореми 1, накладеним на функцію $\omega$,

$$B(x)=\int_x^{\infty}\frac{(\sigma-x)d(-\exp\{-\sigma\omega(e^\sigma)\}}{\omega(e^\sigma)+\sigma\omega(e^\sigma)e^\sigma}d\sigma\asymp$$

$$\asymp\int_x^{\infty}(\sigma-x)d(-\exp\{-\sigma\omega(e^\sigma)\}=$$

$$=\int_x^{\infty}\exp\{-\sigma\omega(e^\sigma)\}d\sigma\sim\frac{\exp\{-x\omega(e^x)\}}{\omega(e^x)}\asymp$$

$$\asymp\exp\{-x\omega(e^x)\},\quad x\to+\infty. \qquad (6)$$

Тому (2) виконується тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{a_n^0}\omega\left(\exp\left\{-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{a_n^0}\right\}\right)\right\}<+\infty$, де $a_n^0$ – коефіцієнти мажоранти Ньютона ряду (1). Оскільки $|a_n|\le a_n^0$ для кожного ряду (1) і $|a_n|=a_n^0$ у випадку, коли $|a_n/a_{n+1}|\nearrow+\infty\,(n\to+\infty)$, то з огляду на зростання функції $\exp\{\sigma\omega(e^\sigma)\}$ звідси легко отримуємо правильність теореми 1.

Доведемо тепер теорему 2. Нехай $n(t)=\sum\limits_{|z_n|\le t}1$ – лічильна функція послідовності $(z_n)$ і $N(r)=\int\limits_0^r n(t)d\ln t$ – неванліннова лічильна функція. Тоді [5] $N(r)=\ln\mu(\ln r,F^*)$, де $F^*(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{|z_k|}\right)e^{sn}$ – цілий ряд Діріхле. Оскільки для цього ряду $\chi_n^0=\ln|z_{n+1}|\nearrow+\infty$, $n\to\infty$, то за лемою для того, щоб $\int\limits_{\sigma_0}^{\infty}\frac{\ln\mu(\sigma,F^*)}{\beta(\sigma)}d\sigma<+\infty$, необхідно і досить, щоб $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}B(\ln|z_n|)<+\infty$. Звідси з $\beta(\sigma)=\exp\{\sigma\omega(e^\sigma)\}$ з огляду на (6) випливає: для того, щоб

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{N(r)}{r^{\omega(r)+1}} dr < +\infty, \tag{7}$$

необхідно і досить, щоб виконувалось співвідношення (4).

Отже, залишилось показати, що співвідношення (2) і (7) рівносильні.

З нерівності Йєнсена $N(r) \le \ln M_f(r)$ бачимо, що з (2) випливає (7).

З іншого боку [1, с. 22], $\ln M_f(r) \le k_p r^p \left(\int\limits_0^r \frac{n(t)}{t^{p+1}}dt + r\int\limits_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{p+2}}dt\right)$, де $k_p$ — додатна стала, залежна тільки від $p$. Звідси

$$\ln M_f(r) \le k_p r^p \left(\int\limits_0^r \frac{dN(t)}{t^p} + r\int\limits_r^{\infty}\frac{dN(t)}{t^{p+1}}\right) =$$

$$= k_p r^p \left(p\int\limits_0^r \frac{N(t)}{t^{p+1}}dt + (p+1)r\int\limits_r^{\infty}\frac{N(t)}{t^{p+2}}dt\right),$$

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\omega(r)+1}}dr \le pk_p\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^{\omega(r)+1-p}}\int\limits_0^r \frac{N(t)}{t^{p+1}}dt +$$

$$+(p+1)k_p\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^{\omega(r)-p}}\int\limits_r^{\infty}\frac{N(t)}{t^{p+2}}dt. \tag{8}$$

Але

$$\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^{\omega(r)+1-p}}\int\limits_0^r\frac{N(t)}{t^{p+1}}dt =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{d(-r^{p-\omega(r)})}{\omega(r)-p-r\omega'(r)\ln r}\int\limits_0^r\frac{N(t)}{t^{p+1}}dt$$

і, оскільки $\omega(r) - p - r\omega'(r)\ln r \ge \varrho_1 - p + o(1)$, $r \to +\infty$, а

$$\int\limits_{r_0}^{\infty}\int\limits_0^r \frac{N(t)}{t^{p+1}}dtd(-r^{p-\omega(r)}) \le K + \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{N(r)}{r^{\omega(r)+1}}dr,$$

$$K = const > 0,$$

то перший інтеграл у правій частині (8) є збіжним.

Подібно, збіжність другого інтеграла у правій частині (8) зводиться до збіжності інтеграла $\int\limits_{r_0}^{\infty}\int\limits_r^{\infty}\frac{N(t)}{t^{p+2}}dtd(r^{p+1-\omega(r)}) = r^{p+1-\omega(r)}\int\limits_r^{\infty}\frac{N(t)}{t^{p+2}}dt\Big|_{r_0}^{\infty} + \int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{N(r)}{r^{\omega(r)+1}}dr$, і для завершення доведення теореми 2 досить показати, що

$$r^{p+1-\omega(r)}\int\limits_r^{\infty}\frac{N(t)}{t^{p+2}}dt \to 0, \quad r \to +\infty. \tag{9}$$

Але з умови (7) для будь-якого $\epsilon > 0$ і всіх досить великих $r$, використовуючи правило Лопіталя, маємо $\int\limits_r^{\infty}\frac{N(t)}{t^{\omega(r)+1}}dt \ge N(r)\int\limits_r^{\infty}\frac{dt}{t^{\omega(r)+1}} \sim \frac{N(r)}{\omega(r)r^{\omega(r)}}$, $r \to +\infty$, тобто $N(r) = o(r^{\omega(r)})$, $r \to +\infty$. Тому, ще раз використовуючи правило Лопіталя, легко отримуємо співвідношення (8). Теорему 2 доведено.

**3. Зауваження.** Теорема 1 правильна для будь-якої цілої функції (не обов'язково зображеної канонічним добутком), причому умову $p < \varrho_1 \le \omega(r) \le \varrho_2 < p+1$ можна замінити умовою $0 < h \le \omega(r) \le H < +\infty$.

Умови теореми 2 задовольняє, наприклад, функція $\omega(r) = \frac{1}{2}(\varrho_2 + \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1)\sin\ln\ln\ln r)$.

Автори висловлюють щиру подяку М.М.Шереметі за постановку задачі та обговорення отриманих результатів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М.:Гостехиздат. — 1956. — 632 с.

2. *Valiron G.* General theory of integral functions. Toulouse. — 1923. — 382 p.

3. *Kamthan P.K.* A theorem of step functions (III) // Istambul univ. fen. fac. mecm. A. — 1963. — **28**. — P.65-69.

4. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. М.: ГИТЛ. — 1941. — 292 р.

5. *Галь Ю.М., Мулява О.М.* Про зростання цілих функцій нульового порядку // Наук. вісн. Чернівець. ун-ту. — 2001. — Вип. 111. Математика. — С.18-20.

Стаття надійшла до редколегії 1.10.2002