УДК 517.524

©2004 р. С.М. Возна, Х.Й. Кучмінська

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Використовуючи метод мажорант, встановлено ознаки збіжності для двовимірних неперервних дробів з частинними ланками $\frac{(1-g_{i-1,j})g_{ij}z_{ij}}{1}$, $\frac{(1-g_{i,j-1})g_{ij}z_{ij}}{1}$ і $\frac{g_{ii}g_{i-1,i-1}z_{ii}}{1}$.

For two-dimensional continued fractions with partial quotients equal $\frac{(1-g_{i-1,j})g_{ij}z_{ij}}{1}$, $\frac{(1-g_{i,j-1})g_{ij}z_{ij}}{1}$, $\frac{g_{ii}g_{i-1,i-1}z_{ii}}{1}$ convergence criteria have been established using the method of majorants.

1. Вступ. Одним із досить добре вивчених типів неперервних дробів є дроби вигляду

$$\mathop{D}_{i=1}^{\infty}\frac{(1-g_{i-1})g_iz_i}{1}= \\ =\cfrac{g_1z_1}{1+\cfrac{(1-g_1)g_2z_2}{1+\cfrac{(1-g_2)g_3z_3}{1+\ddots}}}, \qquad (1)$$

де $g_0=0$, g_i, $i\geq 1$, — дійсні сталі такі, що $0\leq g_i\leq 1$, $i\geq 1$, z_i, $i\geq 1$, — комплексні змінні [1]. Такі дроби вперше розглядалися в праці Слешинського [2]. Дроби вигляду (1) знайшли широке застосування при встановленні ознак збіжності для неперервних дробів і дослідженні збіжності функціональних неперервних дробів (g-, S-, J-дробів). Детальний огляд результатів досліджень таких дробів наведено в монографіях [1, 3, 4].

Перші багатовимірні узагальнення дробів вигляду (1) розглянуто в працях [5–8]. Так, у [7] введено двовимірний неперервний дріб (ДНД) вигляду

$$\cfrac{\frac{1}{2}g_{00}z_{00}}{1+\frac{1}{2}\Phi_0+\mathop{D}\limits_{i=1}^{\infty}\cfrac{\frac{1}{4}g_{i-1,i-1}g_{ii}z_{ii}}{1+\frac{1}{2}\Phi_i}},$$

де

$$\Phi_k=\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}z_{j+k,k}}{1}+ \\ +\mathop{D}_{j=1}^{\infty}\frac{(1-g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}z_{k,j+k}}{1},\quad k\geq 0,$$

g_{ij}, $i\geq 0$, $j\geq 0$, — дійсні сталі такі, що $0\leq g_{ij}\leq 1$, $i\geq 0$, $j\geq 0$, z_{ij}, $i\geq 0$, $j\geq 0$, — комплексні змінні, і доведено, що такий дріб абсолютно збіжний при $|z_{ij}|\leq 1$, $i\geq 0$, $j\geq 0$.

Збіжність ДНД вигляду

$$\cfrac{g_0}{\Phi_0+\mathop{D}\limits_{i=1}^{\infty}\cfrac{(1-g_{i-1})g_ix_i}{\Phi_i}},$$

де

$$\Phi_k=1+ \\ +\cfrac{(1-g_i)g_{i+1,i}x_{i+1,i}}{1+\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty}\cfrac{(1-g_{j+k,k})g_{j+k+1,k}x_{j+k+1,k}}{1}}+ \\ +\cfrac{(1-g_i)g_{i,i+1}x_{i,i+1}}{1+\mathop{D}\limits_{j=1}^{\infty}\cfrac{(1-g_{k,j+k})g_{k,j+k+1}x_{k,j+k+1}}{1}},\quad k\geq 0,$$

g_i, g_{ij}, $i\geq 0$, $j\geq 0$, $i+j\geq 1$, — дійсні сталі такі, що $0\leq g_i\leq 1$, $0\leq g_{ij}\leq 1$, $i\geq 0$, $j\geq$

$0,\ i+j\geq 1,\ x_{i+1},\ x_{ij},\ i\geq 0,\ j\geq 0,\ i+j\geq 1,$ — комплексні змінні, досліджено в роботі [8].

У працях [5, 9] встановлено ознаки збіжності для гіллястих ланцюгових дробів вигляду

$$1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{(1-g_{i(k-1)})g_{i(k)}z_{i(k)}}{1},$$

де $i(k)=i_1,i_2,\ldots,i_k$ — мультиіндекс, N — фіксоване натуральне число, $g_{i(k)},\ k\geq 0,\ 1\leq i_p\leq N,\ 1\leq p\leq k,$ — дійсні сталі такі, що $0\leq g_{i(k)}\leq 1,\ k\geq 0,\ 1\leq i_p\leq N,\ 1\leq p\leq k,\ z_{i(k)},\ k\geq 1,\ 1\leq i_p\leq N,\ 1\leq p\leq k,$ — комплексні змінні.

Метою даної статті є встановлення ознак збіжності для ДНД з частинними ланками $\dfrac{(1-g_{i-1,j})g_{ij}z_{ij}}{1}$, $\dfrac{(1-g_{i,j-1})g_{ij}z_{ij}}{1}$ і $\dfrac{g_{ii}g_{i-1,i-1}z_{ii}}{1}$.

2. Основні результати. Розглянемо ДНД вигляду

$$1+\Phi_0+\cfrac{g_{11}z_{11}}{1+\Phi_1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=2}^{\infty}\dfrac{g_{i-1,i-1}g_{ii}z_{ii}}{1+\Phi_i}},\qquad (2)$$

де

$$\Phi_k=\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}z_{j+k,k}}{1}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{(1-g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}z_{k,j+k}}{1},\quad k\geq 0,$$

$g_{00}=0,\ g_{ij},\ i\geq 0,\ j\geq 0,\ i+j\geq 1,$ — дійсні сталі такі, що $0\leq g_{ij}\leq 1,\ i\geq 0,\ j\geq 0,\ i+j\geq 1,\ z_{ij},\ i\geq 0,\ j\geq 0,\ i+j\geq 1,$ — комплексні змінні.

Нехай $f_0=1,\ f_1=1+\Phi_0^1+\dfrac{g_{11}z_{11}}{1+\Phi_1^0},$

$$f_n=1+\Phi_0^{(n)}+$$

$$+\cfrac{g_{11}z_{11}}{1+\Phi_1^{(n-1)}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=2}^{n}\dfrac{g_{i-1,i-1}g_{ii}z_{ii}}{1+\Phi_i^{(n-i)}}},\quad n\geq 2,$$

де $\Phi_0^1=g_{10}z_{10}+g_{01}z_{01},\ \Phi_{n-1}^{(0)}=0,$

$$\Phi_k^{(n-k)}=\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-k}\frac{(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}z_{j+k,k}}{1}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-k}\frac{(1-g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}z_{k,j+k}}{1},$$

$0\leq k\leq n-1,$ — n-підхідні дроби ДНД (2).

Введемо наступні позначення $Q_{s-1}^{(0)}=1,$

$$Q_i^{(s-i)}=1+\Phi_i^{(s-i)}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{s-i}\frac{g_{i+j-1,i+j-1}g_{i+j,i+j}z_{i+j,i+j}}{1+\Phi_{i+j}^{(s-i-j)}},$$

де $s\geq 2,\ 1\leq i\leq s-1,$

$$Q_{i+k,i}^{(s-i)}=1+\mathop{\mathrm{D}}_{j=k}^{s-i-1}\frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}z_{i+j+1,i}}{1},$$

$$Q_{i,i+k}^{(s-i)}=1+\mathop{\mathrm{D}}_{j=k}^{s-i-1}\frac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}z_{i,i+j+1}}{1},$$

де $s\geq 1,\ 1\leq k\leq s-i-1,\ 0\leq i\leq s-1,$ і $Q_{s,i}^{(s-i)}=Q_{i,s}^{(s-i)}=1$. При цьому отримаємо рекурентні співвідношення

$$Q_i^{(s-i)}=1+\Phi_i^{(s-i)}+\frac{g_{ii}g_{i+1,i+1}z_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(s-i-1)}},\quad (3)$$

де $s\geq 2,\ 1\leq i\leq s-1,$ та

$$Q_{i+k,i}^{(s-i)}=1+\frac{(1-g_{i+k,i})g_{i+k+1,i}z_{i+k+1,i}}{Q_{i+k+1,i}^{(s-i)}},$$

$$Q_{i,i+k}^{(s-i)}=1+\frac{(1-g_{i,i+k})g_{i,i+k+1}z_{i,i+k+1}}{Q_{i,i+k+1}^{(s-i)}},\quad (4)$$

де $s\geq 1,\ 1\leq k\leq s-i-1,\ 0\leq i\leq s-1.$

Використовуючи формулу різниці між підхідними дробами ДНД [5, 10], отримуємо для різниці двох підхідних дробів ДНД (2) $f_m-f_n,\ m>n\geq 1,$ наступну формулу:

$$f_m-f_n=\Phi_0^{(m)}-\Phi_0^{(n)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i g_{11}z_{11}\prod\limits_{k=2}^{i}g_{k-1,k-1}g_{kk}z_{kk}}{(\Phi_i^{(m-i)}-\Phi_i^{(n-i)})^{-1}\prod\limits_{k=1}^{i}Q_k^{(m-k)}Q_k^{(n-k)}}+$$

$$+\frac{(-1)^n g_{11}z_{11}\prod\limits_{k=2}^{n+1} g_{k-1,k-1}g_{kk}z_{kk}}{\prod\limits_{k=1}^{n+1} Q_k^{(m-k)}\prod\limits_{k=1}^{n} Q_k^{(n-k)}}, \qquad (5)$$

де

$$\Phi_j^{(m-j)}-\Phi_j^{(n-j)}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-j}\prod\limits_{k=1}^{n-j+1}(1-g_{j+k-1,j})g_{j+k,j}z_{j+k,j}}{\prod\limits_{k=1}^{n-j+1}Q_{j+k,j}^{(m-j)}\prod\limits_{k=1}^{n-j}Q_{j+k,j}^{(n-j)}}+$$

$$+\frac{(-1)^{n-j}\prod\limits_{k=1}^{n-j+1}(1-g_{j,j+k-1})g_{j,j+k}z_{j,j+k}}{\prod\limits_{k=1}^{n-j+1}Q_{j,j+k}^{(m-j)}\prod\limits_{k=1}^{n-j}Q_{j,j+k}^{(n-j)}}, \quad (6)$$

$0 \le j \le n$, при умові, що всі $Q_r^{(s-r)} \ne 0$, $Q_{r+k,r}^{(s-r)} \ne 0$ і $Q_{r,r+k}^{(s-r)} \ne 0$.

ДНД з f_n^*-ми підхідними дробами називається мажорантою ДНД з f_n-ми підхідними дробами, якщо існують натуральне число n_0 і додатна стала M такі, що справедливі співвідношення

$$|f_n-f_m| \le M|f_n^*-f_m^*|$$

для всіх $n \ge n_0$, $m \ge n_0$.

Справджується наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай елементи дробу (2) задовольняють одну з умов*

$$0 \le g_{i+1,i+1} < 1, \quad 0 \le g_{j+i,i} < 1,$$
$$0 \le g_{i,j+i} < 1, \quad i \ge 0,\ j \ge 1, \qquad (7)$$

або

$$0 < g_{i+1,i+1} \le 1, \quad 0 < g_{j+i,i} \le 1,$$
$$0 < g_{i,j+i} \le 1, \quad i \ge 0,\ j \ge 1. \qquad (8)$$

Тоді:

1) ДНД (2) абсолютно і рівномірно збіжний, якщо

$$|z_{10}| \le r_1, \quad |z_{01}| \le r_2, \quad |z_{11}| \le r_3, \qquad (9)$$

і

$$|z_{i+2,i+1}| \le \frac{1}{2},\ |z_{i+1,i+2}| \le \frac{1}{2},\ |z_{i+2,i+2}| \le \frac{1}{4},$$

$$|z_{i+j,i}| \le 1,\ |z_{i,i+j}| \le 1,\ i \ge 0,\ j-i \ge 2, \ (10)$$

де $r_1,\ r_2,\ r_3$ — дійсні сталі.

2) Значення ДНД (2) і всіх його підхідних дробів належать кругу

$$|z-1| \le r_1+r_2+2r_3.$$

Доведення. Покажемо, що мажорантою ДНД (2) є ДНД

$$1+\frac{1}{2}\tilde{\Phi}_0+\cfrac{-g_{11}r_3}{1+\frac{1}{2}\tilde{\Phi}_1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=2}^{\infty}\cfrac{-\frac{1}{4}g_{i-1,i-1}g_{ii}}{1+\frac{1}{2}\tilde{\Phi}_i}}, \ (11)$$

де

$$\tilde{\Phi}_0=\cfrac{-g_{10}r_1}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=2}^{\infty}\cfrac{-(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}}{1}}+$$

$$+\cfrac{-g_{01}r_2}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=2}^{\infty}\cfrac{-(1-g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}}{1}},$$

$$\tilde{\Phi}_k=\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{-(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}}{1}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{-(1-g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}}{1}, \quad k \ge 1.$$

Для дробу (11) справедливі рекурентні співвідношення, аналогічні (3)—(4)

$$\tilde{Q}_i^{(s-i)}=1+\frac{1}{2}\tilde{\Phi}_i^{(s-i)}-\frac{g_{ii}g_{i+1,i+1}}{4\tilde{Q}_{i+1}^{(s-i-1)}}, \qquad (12)$$

де $s \ge 2,\ 1 \le i \le s-1$, та

$$\tilde{Q}_{j+k,j}^{(s-j)}=1-\frac{(1-g_{j+k,j})g_{j+k+1,j}}{\tilde{Q}_{j+k+1,j}^{(s-j)}},$$

$$\tilde{Q}_{j,j+k}^{(s-j)}=1-\frac{(1-g_{j,j+k})g_{j,j+k+1}}{\tilde{Q}_{j,j+k+1}^{(s-j)}}, \qquad (13)$$

де $s\ge 1,\ 1\le k\le s-j-1,\ 0\le j\le s-1$, при початкових умовах $\tilde{Q}_{s-1}^{(0)}=1,\ \tilde{Q}_{sj}^{(s-j)}=\tilde{Q}_{js}^{(s-j)}=1$.

Доведемо справедливість нерівностей

$$|Q_{r+k,r}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r+k,r}^{(s-r)}>g_{r+k,r},$$

$$|Q_{r,r+k}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r,r+k}^{(s-r)}>g_{r,r+k}, \tag{14}$$

де $s\ge 1,\ 0\le r\le s-1,\ 1\le k\le s-r$,

$$|Q_{r}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r}^{(s-r)}>\frac{1}{2}g_{rr}, \tag{15}$$

де $s\ge 1,\ 1\le r\le s$, якщо виконуються умови (7), і

$$|Q_{r+k,r}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r+k,r}^{(s-r)}\ge g_{r+k,r},$$

$$|Q_{r,r+k}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r,r+k}^{(s-r)}\ge g_{r,r+k}, \tag{16}$$

де $s\ge 1,\ 0\le r\le s-1,\ 1\le k\le s-r$,

$$|Q_{r}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r}^{(s-r)}\ge\frac{1}{2}g_{rr}, \tag{17}$$

де $s\ge 1,\ 1\le r\le s$, якщо виконуються умови (8).

Використовуючи співвідношення (4), (10) і (13), покажемо справедливість нерівностей

$$|Q_{r+k,r}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r+k,r}^{(s-r)}>g_{r+k,r}, \tag{18}$$

де $s\ge 1,\ 0\le r\le s-1,\ 1\le k\le s-r$.

При $k=s-r$ нерівності (18) очевидні. Нехай нерівності (18) виконуються при $k=p+1<s-r$. Тоді при $k=p$ маємо

$$|Q_{r+p,r}^{(s-r)}|\ge 1-\frac{(1-g_{r+p,r})g_{r+p+1,r}|z_{r+p+1,r}|}{|Q_{r+p+1,r}^{(s-r)}|}\ge$$

$$\ge 1-\frac{(1-g_{r+p,r})g_{r+p+1,r}}{\tilde{Q}_{r+p+1,r}^{(s-r)}}>g_{r+p,r}.$$

Аналогічно можна показати справедливість нерівностей $|Q_{r,r+k}^{(s-r)}|\ge \tilde{Q}_{r,r+k}^{(s-r)}>g_{r,r+k}$ при $s\ge 1,\ 0\le r\le s-1,\ 1\le k\le s-r$.

Використовуючи співвідношення (3), (4), (10) і (12)—(14), доведемо, що нерівності (15) справедливі. При $r=s$ нерівності (15) очевидні. Нехай нерівності (15) виконуються при $r=p+1<s$. Тоді при $r=p$ маємо

$$|Q_{p}^{(s-p)}|\ge 1-\frac{(1-g_{pp})g_{p+1,p}|z_{p+1,p}|}{|Q_{p+1,p}^{(s-p)}|}-$$

$$-\frac{(1-g_{pp})g_{p,p+1}|z_{p,p+1}|}{|Q_{p,p+1}^{(s-p)}|}-$$

$$-\frac{g_{pp}g_{p+1,p+1}|z_{p+1,p+1}|}{|Q_{p+1}^{(s-p-1)}|}\ge 1-\frac{(1-g_{pp})g_{p+1,p}}{2\tilde{Q}_{p+1,p}^{(s-p)}}-$$

$$-\frac{(1-g_{pp})g_{p,p+1}}{2\tilde{Q}_{p,p+1}^{(s-p)}}-\frac{g_{pp}g_{p+1,p+1}}{4\tilde{Q}_{p+1}^{(s-p-1)}}>\frac{1}{2}g_{pp}.$$

Аналогічно можна довести справедливість нерівностей (16) та (17).

Отже, всі $Q_{r}^{(s-r)}\ne 0,\ Q_{r+k,r}^{(s-r)}\ne 0,\ Q_{r,r+k}^{(s-r)}\ne 0$ ë $\tilde{Q}_{r}^{(s-r)}>0,\ \tilde{Q}_{r+k,r}^{(s-r)}>0,\ \tilde{Q}_{r,r+k}^{(s-r)}>0$.

Використовуючи співвідношення (3), (4), (10) і (12)—(17), при $m>n\ge 1$ можна показати справедливість нерівностей

$$|\Phi_i^{(m-i)}-\Phi_i^{(n-i)}|\le$$

$$\le(-1)^{n-i}(\tilde{\Phi}_i^{(m-i)}-\tilde{\Phi}_i^{(n-i)}),\ 0\le i\le n. \tag{19}$$

Використовуючи співвідношення (3)—(4), (10), (12)—(17) і (19), при $m>n\ge 1$ отримаємо

$$|f_m-f_n|\le|\Phi_0^{(m)}-\Phi_0^{(n)}|+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{g_{11}|z_{11}|\prod\limits_{k=2}^{i}g_{k-1,k-1}g_{kk}|z_{kk}|}{|\Phi_i^{(m-i)}-\Phi_i^{(n-i)}|^{-1}\prod\limits_{k=1}^{i}|Q_k^{(m-k)}||Q_k^{(n-k)}|}+$$

$$+\frac{g_{11}|z_{11}|\prod\limits_{k=2}^{n+1}g_{k-1,k-1}g_{kk}|z_{kk}|}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}|Q_k^{(m-k)}|\prod\limits_{k=1}^{n}|Q_k^{(n-k)}|}\le$$

$$\le(-1)^{n}(\tilde{\Phi}_0^{(m)}-\tilde{\Phi}_0^{(n)})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{n+i}4^{1-i}g_{11}r_3\prod\limits_{k=2}^{i}g_{k-1,k-1}g_{kk}}{(\tilde{\Phi}_i^{(m-i)}-\tilde{\Phi}_i^{(n-i)})^{-1}\prod\limits_{k=1}^{i}\tilde{Q}_k^{(m-k)}\tilde{Q}_k^{(n-k)}}+$$

$$+\frac{(-1)^{2n}g_{11}r_3\prod\limits_{k=2}^{n+1}g_{k-1,k-1}g_{kk}}{4^n\prod\limits_{k=1}^{n+1}\tilde{Q}_k^{(m-k)}\prod\limits_{k=1}^{n}\tilde{Q}_k^{(n-k)}}=-(\tilde{f}_m-\tilde{f}_n).$$

Отже,

$$|f_m - f_n| \le -(\tilde{f}_m - \tilde{f}_n), \quad m > n \ge 1. \quad (20)$$

Послідовність $\{\tilde{f}_n\}$ монотонно спадає і в силу нерівностей (14)—(17) обмежена знизу

$$\tilde{f}_1 = 1 - g_{10}r_1 - g_{01}r_2 - g_{11}r_3 \ge 1 - 3R,$$

$$\tilde{f}_n = 1 - \frac{g_{10}r_1}{\tilde{Q}_{10}^{(n)}} - \frac{g_{01}r_2}{\tilde{Q}_{01}^{(n)}} - \frac{g_{11}r_3}{\tilde{Q}_1^{(n-1)}} > 1 - 4R,$$

де $n \ge 2,\ R = \max\{r_1,\ r_2,\ r_3\}$.

Отже, існує скінченна границя послідовності $\{\tilde{f}_n\}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n = \tilde{f} < \infty$.

Абсолютна збіжність ДНД (2) випливає з нерівності (20). Використовуючи нерівності (14)—(17) і умови (9), маємо

$$|f_n - 1| \le |\Phi_0^{(n)}| + \frac{g_{11}|z_{11}|}{|Q_1^{(n-1)}|} \le \frac{g_{10}|z_{10}|}{|Q_{10}^{(n)}|} +$$

$$+ \frac{g_{01}|z_{01}|}{|Q_{01}^{(n)}|} + \frac{g_{11}|z_{11}|}{|Q_1^{(n-1)}|} < r_1 + r_2 + 2r_3.$$

Звідси отримуємо твердження 2). ■

Наступна теорема про ознаку збіжності для ДНД оберненого до дробу (2).

Теорема 2. *Нехай елементи ДНД*

$$\cfrac{1}{1 + \Phi_0 + \cfrac{g_{11}z_{11}}{1 + \Phi_1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=2}^{\infty} \dfrac{g_{i-1,i-1}g_{ii}z_{ii}}{1+\Phi_i}}}, \quad (21)$$

де

$$\Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}z_{j+k,k}}{1} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}z_{k,j+k}}{1}, \quad k \ge 0,$$

$g_{00} = 0$*, задовольняють умови (7), (10) і*

$$|z_{10}| \le \frac{1}{3}, \quad |z_{01}| \le \frac{1}{3}, \quad |z_{11}| \le \frac{1}{6}. \quad (22)$$

Тоді ДНД (21) збіжний, якщо або

$$\left(z_{10} + \frac{1}{3}\right)\left(z_{01} + \frac{1}{3}\right)\left(z_{11} + \frac{1}{6}\right) \ne 0, \quad (23)$$

або існують індекси i *й* j, $i \ge 0,\ j - i \ge 2$, *такі, що*

$$\left(z_{i+2,i+1} + \frac{1}{2}\right)\left(z_{i+1,i+2} + \frac{1}{2}\right)\left(z_{i+j,i} + 1\right) \times$$

$$\times \left(z_{i+2,i+2} + \frac{1}{4}\right)\left(z_{i,i+j} + 1\right) \ne 0, \quad (24)$$

або існує індекс ij, $i \ge 0,\ j \ge 0,\ i + j \ge 1$, *такий, що* $g_{ij} = 0$.

Доведення. Згідно з теоремою 1, ДНД

$$Q_i = 1 + \Phi_i +$$

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{g_{i+j-1,i+j-1}g_{i+j,i+j}z_{i+j,i+j}}{1 + \Phi_{i+j}}, \quad i \ge 1, \quad (25)$$

де

$$\Phi_k = \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}z_{j+k,k}}{1} +$$

$$+ \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}z_{k,j+k}}{1}, \quad k \ge 0,$$

збіжні та значення дробу (2) належать кругу $|z - 1| \le 1$.

Доведемо справедливість наступних нерівностей

$$|Q_i - 1| \le 1 - \frac{g_{ii}}{2}, \quad i \ge 1, \quad (26)$$

$$|Q_{j+k,j} - 1| \le 1 - g_{j+k,j},$$

$$|Q_{j,j+k} - 1| \le 1 - g_{j,j+k}, \quad j \ge 0,\ k \ge 1. \quad (27)$$

Використовуючи співвідношення (10), (14), (15) і (22), для довільного індексу i, $1 \le i \le s - 1$, $s \ge 2$, маємо

$$|Q_i^{(s-i)} - 1| \le \frac{(1 - g_{ii})g_{i+1,i}|z_{i+1,i}|}{|Q_{i+1,i}^{(s-i)}|} +$$

$$+ \frac{(1 - g_{ii})g_{i,i+1}|z_{i,i+1}|}{|Q_{i,i+1}^{(s-i)}|} + \frac{g_{ii}g_{i+1,i+1}|z_{i+1,i+1}|}{|Q_2^{(s-i-1)}|} <$$

$$< 1 - \frac{g_{ii}}{2}.$$

Звідси отримуємо (26).

Аналогічно можна довести справедливість нерівностей (27).

Для розбіжності дробу (21) необхідно, щоб

$$Q_0 = 1 + \lim_{n\to\infty} l(\frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}^{(n)}} + \frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}^{(n)}} + \frac{g_{11}z_{11}}{Q_1^{(n-1)}}\Big) =$$

$$= 1 + \frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}} + \frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}} + \frac{g_{11}z_{11}}{Q_1} = 0. \quad (28)$$

Оскільки $|z_{10}| \le 1/3$, $|z_{01}| \le 1/3$, $|z_{11}| \le 1/6$ і внаслідок нерівностей (14), (15) $|Q_{10}| \ge g_{10}$, $|Q_{01}| \ge g_{01}$, $|Q_1| \ge g_{11}/2$, то рівність (28) рівносильна тому, що

$$|z_{10}| = \frac{1}{3}, \quad |z_{01}| = \frac{1}{3}, \quad |z_{11}| = \frac{1}{6},$$

$$\frac{g_{10}}{|Q_{10}|} = 1, \quad \frac{g_{01}}{|Q_{01}|} = 1, \quad \frac{g_{11}}{|Q_1|} = 2 \quad (29)$$

і

$$\frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}} = -\frac{1}{3}, \ \frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}} = -\frac{1}{3}, \ \frac{g_{11}z_{11}}{Q_1} = -\frac{1}{3}. \quad (30)$$

Із умов (26), (27), (29) і (30) випливає, що

$$z_{10} = -\frac{1}{3}, \quad z_{01} = -\frac{1}{3}, \quad z_{11} = -\frac{1}{6},$$

$$Q_{10} = g_{10}, \quad Q_{01} = g_{01}, \quad Q_1 = \frac{g_{11}}{2}. \quad (31)$$

Оскільки

$$Q_{10} = 1 + (1 - g_{10}) \lim_{n\to\infty} \frac{g_{20}z_{20}}{Q_{20}^{(n)}},$$

$$Q_{01} = 1 + (1 - g_{01}) \lim_{n\to\infty} \frac{g_{02}z_{02}}{Q_{02}^{(n)}},$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_{20}z_{20}}{Q_{20}^{(n)}} = -1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g_{02}z_{02}}{Q_{02}^{(n)}} = -1.$$

Звідки, враховуючи нерівності (10), (14), (15) і (27), отримуємо

$$z_{20} = -1, \ Q_{20} = g_{20}, \ z_{02} = -1, \ Q_{02} = g_{02}.$$

Оскільки

$$Q_1 = 1 + \lim_{n\to\infty} l(\frac{(1-g_{11})g_{21}z_{21}}{Q_{21}^{(n)}} +$$

$$+ \frac{(1-g_{11})g_{12}z_{12}}{Q_{12}^{(n)}} + \frac{g_{11}g_{22}z_{22}}{Q_2^{(n-2)}}\Big),$$

то, як і вище, отримуємо

$$z_{21} = -\frac{1}{2}, \quad z_{12} = -\frac{1}{2}, \quad z_{22} = -\frac{1}{4},$$

$$Q_{21} = g_{21}, \quad Q_{12} = g_{12}, \quad Q_2 = \frac{g_{22}}{2}.$$

Застосовуючи далі метод математичної індукції, доходимо висновку, що для розбіжності дробу (21) необхідно виконання умов (31) і щоб

$$z_{i+2,i+1} = -\frac{1}{2}, \ z_{i+1,i+2} = -\frac{1}{2}, \ z_{i+2,i+2} = -\frac{1}{4},$$

$$z_{i+j,i} = -1, \quad z_{i,i+j} = -1, \quad (32)$$

$$Q_{i+2} = \frac{g_{i+2,i+2}}{2}, \ Q_{i+j,i} = g_{i+j,i}, \ Q_{i,i+j} = g_{i,i+j},$$

$$Q_{i+2,i+1} = g_{i+2,i+1}, \ Q_{i+1,i+2} = g_{i+1,i+2} \quad (33)$$

для всіх $i \ge 0$, $j - i \ge 2$. Тому виконання умов (23) або (24) забезпечує збіжність ДНД (21). Оскільки всі $Q_{i+k,i} \ne 0$, $Q_{i,i+k} \ne 0$ і $Q_i \ne 0$, то умови (31)—(33) не будуть виконуватися, якщо існує індекс ij, $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j \ge 1$, такий, що $g_{ij} = 0$. ■

Якщо $|z_{10}| \le r_1 < 1/3$, $|z_{01}| < 1/3$, $|z_{11}| < 1/6$ або $|z_{01}| \le r_2 < 1/3$, $|z_{10}| < 1/3$, $|z_{11}| < 1/6$ або $|z_{11}| \le r_3 < 1/6$, $|z_{10}| < 1/3$, $|z_{01}| < 1/3$ та виконуються умови (10), то ДНД (21) рівномірно збіжний, бо ДНД (2) рівномірно збіжний і значення дробу та всіх його підхідних дробів не дорівнюють нулю.

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 3. *Нехай елементи ДНД (21) задовольняють одну з умов (7) або (8). Тоді ДНД (21) рівномірно збіжний, якщо* $|z_{10}| \le r_1 < 1/3$, $|z_{01}| < 1/3$, $|z_{11}| < 1/6$ *або* $|z_{01}| \le r_2 < 1/3$, $|z_{10}| < 1/3$, $|z_{11}| < 1/6$ *або* $|z_{11}| \le r_3 < 1/6$, $|z_{10}| < 1/3$, $|z_{01}| < 1/3$ *і виконуються умови (10).*

Теорема 4. *ДНД (2), елементи якого задовольняють одну з умов (7) або (8), абсолютно збіжний, якщо* $|z_{10}| + |z_{01}| + 2|z_{11}| \le r$ *і*

$$|z_{i+2,i+1}| + |z_{i+1,i+2}| \le 1, \ |z_{i+2,i+2}| \le \frac{1}{4},$$

$$|z_{i+j,i}| \le 1, \ |z_{i,i+j}| \le 1, \ i \ge 0, \ j - i \ge 2, \quad (34)$$

де r *— дійсна стала.*

Доведення. Використовуючи схему, запропоновану при доведенні теореми 1, можна показати, що ДНД

$$1+\hat{\Phi}_0+\cfrac{-g_{11}|z_{11}|}{1+\hat{\Phi}_1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=2}^{\infty}\dfrac{-g_{i-1,i-1}g_{ii}|z_{ii}|}{1+\hat{\Phi}_i}}, \quad (35)$$

де

$$\hat{\Phi}_k=\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{-(1-g_{j+k-1,k})g_{j+k,k}|z_{j+k,k}|}{1}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{-(1-g_{k,j+k-1})g_{k,j+k}|z_{k,j+k}|}{1}, \quad k\geq 0,$$

є мажорантою ДНД (2). Дійсно, якщо ввести позначення $\hat{Q}_{s-1}^{(0)}=1$,

$$\hat{Q}_i^{(s-i)}=1+\hat{\Phi}_i^{(s-i)}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{s-i}\frac{-g_{i+j-1,i+j-1}g_{i+j,i+j}|z_{i+j,i+j}|}{1+\hat{\Phi}_{i+j}^{(s-i-j)}},$$

де $\hat{\Phi}_{s-1}^{(0)}=0$,

$$\hat{\Phi}_i^{(s-i)}=\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{s-i}\frac{-(1-g_{j+i-1,i})g_{j+i,i}|z_{j+i,i}|}{1}+$$

$$+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{s-i}\frac{-(1-g_{i,j+i-1})g_{i,j+i}|z_{i,j+i}|}{1},$$

$s\geq 2,\ 1\leq i\leq s-1$, і $\hat{Q}_{si}^{(s-i)}=\hat{Q}_{is}^{(s-i)}=1$,

$$\hat{Q}_{i+k,i}^{(s-i)}=1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=k}^{s-i-1}\frac{(g_{i+j,i}-1)g_{i+j+1,i}|z_{i+j+1,i}|}{1},$$

$$\hat{Q}_{i,i+k}^{(s-i)}=1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=k}^{s-i-1}\frac{(g_{i,i+j}-1)g_{i,i+j+1}|z_{i,i+j+1}|}{1},$$

де $s\geq 1,\ 1\leq k\leq s-i-1,\ 0\leq i\leq s-1$, то отримаємо наступні рекурентні співвідношення:

$$\hat{Q}_i^{(s-i)}=1+\hat{\Phi}_i^{(s-i)}-\frac{g_{ii}g_{i+1,i+1}|z_{i+1,i+1}|}{\hat{Q}_{i+1}^{(s-i-1)}},$$

де $s\geq 2,\ 1\leq i\leq s-1$,

$$\hat{Q}_{i+k,i}^{(s-i)}=1-\frac{(1-g_{i+k,i})g_{i+k+1,i}|z_{i+k+1,i}|}{\hat{Q}_{i+k+1,i}^{(s-i)}},$$

$$\hat{Q}_{i,i+k}^{(s-i)}=1-\frac{(1-g_{i,i+k})g_{i,i+k+1}|z_{i,i+k+1}|}{\hat{Q}_{i,i+k+1}^{(s-i)}},$$

де $s\geq 1,\ 1\leq k\leq s-i,\ 0\leq i\leq s-1$.

За аналогією доведення нерівностей (14)—(17) можна довести справедливість наступних нерівностей:

$$|Q_{r+k,r}^{(s-r)}|\geq\hat{Q}_{r+k,r}^{(s-r)}>g_{r+k,r},$$

$$|Q_{r,r+k}^{(s-r)}|\geq\hat{Q}_{r,r+k}^{(s-r)}>g_{r,r+k}, \quad (36)$$

де $s\geq 1,\ 0\leq r\leq s-1,\ 1\leq k\leq s-r$,

$$|Q_r^{(s-r)}|\geq\hat{Q}_r^{(s-r)}>\frac{g_{rr}}{2},\ s\geq 1,\ 1\leq r\leq s, \quad (37)$$

якщо виконуються умови (7), і

$$|Q_{r+k,r}^{(s-r)}|\geq\hat{Q}_{r+k,r}^{(s-r)}\geq g_{r+k,r},$$

$$|Q_{r,r+k}^{(s-r)}|\geq\hat{Q}_{r,r+k}^{(s-r)}\geq g_{r,r+k}, \quad (38)$$

де $s\geq 1,\ 0\leq r\leq s-1,\ 1\leq k\leq s-r$,

$$|Q_r^{(s-r)}|\geq\hat{Q}_r^{(s-r)}\geq\frac{g_{rr}}{2},\ s\geq 1,\ 1\leq r\leq s, \quad (39)$$

якщо виконуються умови (8).

Далі, використовуючи формули (5), (6) і співвідношення (36)—(39), можна переконатися в справедливості оцінки

$$|f_m-f_n|\leq-(\hat{f}_m-\hat{f}_n), \quad m>n\geq 1,$$

де f_n, $\hat{f}_n$ — n-підхідні дроби ДНД (2) і (35) відповідно. Оскільки послідовність $\{\hat{f}_n\}$ монотонно спадає і в силу нерівностей (34), (36)—(39) обмежена знизу, то звідси випливає абсолютна збіжність ДНД (2). ■

Уведемо наступні множини індексів:

$$\mathcal{J}_{2n+1}=\{ij:\ i\geq 0,\ j\geq 0,\ |i-j|=1,$$
$$i+j=2n+1,\ g_{ij}\neq 0\}, \quad n\geq 0.$$

Будемо вважати, що множина $\mathcal{J}_{2n+1}$ порожня, якщо $g_{11}=0$ або $g_{n+1,n}+g_{n,n+1}=0$ при $n\geq 1$.

Теорема 5. *Нехай елементи ДНД (21) задовольняють умови (7), (34) і*

$$|z_{10}|+|z_{01}|+2|z_{11}|\le 1. \qquad (40)$$

Тоді ДНД (21) збіжний, якщо виконується хоча б одна з умов

(A) $z_{10}+z_{01}+2z_{11}\ne -1$ *або* $g_{10}+g_{01}+g_{11}=0$*;*

(B) якщо $g_{11}=0$*, то існує індекс* j*,* $j\ge 2$*, такий, що виконується хоча б одна з таких умов при* $i=0$ *:*

a) $(z_{i+j,i}+1)(z_{i,i+j}+1)\ne 0$ *або* $g_{i+j,i}=0$ *або* $g_{i,i+j}=0$*, якщо* $g_{i+1,i}\ne 0$ *і* $g_{i,i+1}\ne 0$*;*

b) $z_{i+j,i}\ne -1$ *або* $g_{i+j,i}=0$*, якщо* $g_{i+1,i}\ne 0$ *ё* $g_{i,i+1}=0$*;*

c) $z_{i,i+j}\ne -1$ *або* $g_{i,i+j}=0$*, якщо* $g_{i+1,i}=0$ *ё* $g_{i,i+1}\ne 0$*;*

(C) якщо $g_{10}+g_{01}=0$*, то існують індекси* i *й* j*,* $i\ge 1$*,* $j-i\ge 2$*, такі, що виконується хоча б одна з умов a)-c) або*

$$(z_{i+1,i}+z_{i,i+1}+1)l\left(z_{i+1,i+1}+\frac{1}{4}\right)\ne 0,$$

$$g_{i+1,i}+g_{i,i+1}=0, \qquad g_{i+1,i+1}=0;$$

(D) якщо $\mathcal{J}_1\ne\emptyset$ *і* $g_{11}\ne 0$*, то існують індекси* i *й* j*,* $i\ge 0$*,* $j-i\ge 2$*, такі, що виконується хоча б одна з умов a)–c) або*

$$(z_{i+2,i+1}+z_{i+1,i+2}+1)l\left(z_{i+2,i+2}+\frac{1}{4}\right)\ne 0,$$

$$g_{i+2,i+1}+g_{i+1,i+2}=0, \qquad g_{i+2,i+2}=0.$$

Доведення. Згідно з теоремою 4, ДНД (25) збіжні. Використовуючи нерівності (34) і (36)—(40), можна показати, що значення ДНД (2) належать кругу $|z-1|\le 1$, а також справедливість нерівностей (26) і (27). Для розбіжності дробу (21) необхідно, щоб

$$Q_0=1+$$

$$+\lim_{n\to\infty} l\left(\frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}^{(n)}}+\frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}^{(n)}}+\frac{g_{11}z_{11}}{Q_{1}^{(n-1)}}\right)=0. \quad (41)$$

Очевидно, що ДНД (21) збіжний, якщо $g_{10}+g_{01}+g_{11}=0$. Далі можливі наступні випадки:

i) $\mathcal{J}_1\ne\emptyset$, $g_{11}=0$;

ii) $g_{10}+g_{01}=0$, $g_{11}\ne 0$;

iii) $\mathcal{J}_1\ne\emptyset$, $g_{11}\ne 0$.

Нехай $\mathcal{J}_1\ne\emptyset$ і $g_{11}=0$. Тоді, враховуючи нерівності (36), співвідношення (41) запишемо у вигляді

$$\lim_{n\to\infty} l\left(\frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}^{(n)}}+\frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}^{(n)}}\right)=$$

$$=\frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}}+\frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}}=-1. \qquad (42)$$

Оскільки $|z_{10}|+|z_{01}|+2|z_{11}|\le 1$ і $|Q_{10}|\ge g_{10}$, $|Q_{01}|\ge g_{01}$, то повинні виконуватися умови

$$|z_{10}|+|z_{01}|+2|z_{11}|=1,$$

$$\frac{g_{ij}}{|Q_{ij}|}=1 \quad \text{для всёх} \quad ij\in\mathcal{J}_1. \qquad (43)$$

Із співвідношень (27), (42) і (43) випливає, що

$$z_{10}+z_{01}+2z_{11}=-1,$$

$$Q_{ij}=g_{ij} \quad \text{і} \quad ij\in\mathcal{J}_1.$$

Тут можливі такі випадки:

1) $g_{10}=0$, $g_{01}\ne 0$;

2) $g_{10}\ne 0$, $g_{01}=0$;

3) $g_{10}\ne 0$, $g_{01}\ne 0$.

Оскільки

$$Q_{10}=1+(1-g_{10})\lim_{n\to\infty}\frac{g_{20}z_{20}}{Q_{20}^{(n)}},$$

$$Q_{01}=1+(1-g_{01})\lim_{n\to\infty}\frac{g_{02}z_{02}}{Q_{02}^{(n)}},$$

то у випадку 3) для розбіжності дробу (21) необхідно, щоб

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_{20}z_{20}}{Q_{20}^{(n)}}=-1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{g_{02}z_{02}}{Q_{02}^{(n)}}=-1.$$

Очевидно, що ДНД (21) збіжний, якщо $g_{20}=0$ або $g_{02}=0$. Нехай $g_{20}\ne 0$ і $g_{02}\ne 0$. Тоді, враховуючи нерівності (36), останні співвідношення запишемо у вигляді

$$\frac{g_{20}z_{20}}{Q_{20}}=-1, \quad \frac{g_{02}z_{02}}{Q_{02}}=-1.$$

Звідки, враховуючи нерівності (27), (34) і (36), отримуємо

$$z_{20}=-1,\ Q_{20}=g_{20},\ z_{02}=-1,\ Q_{02}=g_{02}.$$

У випадку 1) маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g_{20}z_{20}}{Q_{20}^{(n)}} = -1$. Очевидно, що ДНД (21) збіжний, якщо $g_{20} = 0$. Нехай $g_{20} \neq 0$. Тоді, для розбіжності дробу (21) необхідно, щоб $\dfrac{g_{20}z_{20}}{Q_{20}} = -1$. Звідки отримуємо $z_{20} = -1$, $Q_{20} = g_{20}$.

Випадок 2) аналогічний 1).

Застосовуючи далі метод математичної індукції при $g_{10} + g_{01} \neq 0$ і при умовах:

— $g_{i0} \neq 0$, $g_{0i} \neq 0$, $i \geq 2$, якщо $g_{10} \neq 0$, $g_{01} \neq 0$;

— $g_{i0} \neq 0$, $i \geq 2$, якщо $g_{10} \neq 0$, $g_{01} = 0$;

— $g_{0i} \neq 0$, $i \geq 2$, якщо $g_{10} = 0$, $g_{01} \neq 0$;

доходимо висновку, що для розбіжності дробу (21) необхідно виконання умови $z_{10}+z_{01}+2z_{11} = -1$, а також умов:

— $z_{i0} = -1$, $z_{0i} = -1$, $i \geq 2$, якщо $g_{10} \neq 0$, $g_{01} \neq 0$;

— $z_{i0} = -1$, $i \geq 2$, якщо $g_{10} \neq 0$, $g_{01} = 0$;

— $z_{0i} = -1$, $i \geq 2$, якщо $g_{10} = 0$, $g_{01} \neq 0$.

У випадку *ii*) співвідношення (41) запишемо у вигляді

$$\frac{g_{11}z_{11}}{Q_1} = -1. \tag{44}$$

Оскільки $|z_{10}|+|z_{01}|+2|z_{11}| \leq 1$ і $|Q_1| \geq g_{11}/2$, то повинні виконуватися умови

$$|z_{10}| + |z_{01}| + 2|z_{11}| = 1, \quad \frac{g_{11}}{|Q_1|} = 2. \tag{45}$$

Із співвідношень (26), (44) і (45) випливає, що $z_{10} + z_{01} + 2z_{11} = -1$ і $Q_1 = g_{11}/2$. Оскільки

$$Q_1 = 1 + \lim_{n\to\infty} l(\frac{(1-g_{11})g_{21}z_{21}}{Q_{21}^{(n)}} + \frac{(1-g_{11})g_{12}z_{12}}{Q_{12}^{(n)}} + \frac{g_{11}g_{22}z_{22}}{Q_2^{(n-2)}}\Big),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} l(\frac{(1-g_{11})g_{21}z_{21}}{Q_{21}^{(n)}} + \frac{(1-g_{11})g_{12}z_{12}}{Q_{12}^{(n)}} + \frac{g_{11}g_{22}z_{22}}{Q_2^{(n-2)}}\Big) = \frac{g_{11}}{2} - 1.$$

Очевидно, що ДНД (21) збіжний, якщо $g_{21}+g_{12} = 0$ або $g_{22} = 0$. Нехай $\mathcal{J}_3 \neq \emptyset$ і $g_{22} \neq 0$. Тоді для розбіжності дробу (21) необхідно, щоб

$$\frac{(1-g_{11})g_{21}z_{21}}{Q_{21}} + \frac{(1-g_{11})g_{12}z_{12}}{Q_{12}} + \frac{g_{11}g_{22}z_{22}}{Q_2} = \frac{g_{11}}{2} - 1.$$

Звідки, як і вище, отримуємо

$$z_{21} + z_{12} = -1, \quad z_{22} = -\frac{1}{4},$$

$$Q_{ij} = g_{ij} \quad \text{і} \quad ij \in \mathcal{J}_3, \quad Q_2 = \frac{g_{22}}{2}.$$

Застосовуючи далі метод математичної індукції при $g_{11} \neq 0$, $\mathcal{J}_{2n+1} \neq \emptyset$, $n \geq 1$, $g_{ii} \neq 0$, $i \geq 2$, і при умовах:

— $g_{i+j,i} \neq 0$, $g_{i,i+j} \neq 0$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 1$, $j-i \geq 2$;

— $g_{i+j,i} \neq 0$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} = 0$, $i \geq 1$, $j-i \geq 2$;

— $g_{i,i+j} \neq 0$, якщо $g_{i+1,i} = 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 1$, $j-i \geq 2$;

доходимо висновку, що для розбіжності дробу (21) необхідно виконання умов $z_{10} + z_{01} + 2z_{11} = -1$, $z_{i+1,i} + z_{i,i+1} = -1$, $z_{i+1,i+1} = -1/4$, $i \geq 1$, а також умов:

— $z_{i+j,i} = -1$, $z_{i,i+j} = -1$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 1$, $j-i \geq 2$;

— $z_{i+j,i} = -1$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} = 0$, $i \geq 1$, $j-i \geq 2$;

— $z_{i,i+j} = -1$, якщо $g_{i+1,i} = 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 1$, $j-i \geq 2$.

Нехай справджується випадок iii). Тоді, враховуючи нерівності (36)–(37), співвідношення (41) запишемо у вигляді

$$\lim_{n\to\infty} l(\frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}^{(n)}} + \frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}^{(n)}} + \frac{g_{11}z_{11}}{Q_1^{(n-1)}}\Big) = \frac{g_{10}z_{10}}{Q_{10}} + \frac{g_{01}z_{01}}{Q_{01}} + \frac{g_{11}z_{11}}{Q_1} = -1. \tag{46}$$

Оскільки $|z_{10}|+|z_{01}|+2|z_{11}| \leq 1$ і $|Q_{10}| \geq g_{10}$, $|Q_{01}| \geq g_{01}$, $|Q_1| \geq g_{11}/2$, то повинні виконуватися умови

$$|z_{10}| + |z_{01}| + 2|z_{11}| = 1,$$

$$\frac{g_{ij}}{|Q_{ij}|} = 1 \ \text{ і } ij \in \mathcal{J}_1, \ \frac{g_{11}}{|Q_1|} = 2. \tag{47}$$

Із співвідношень (26), (27), (46) і (47) випливає, що

$$z_{10} + z_{01} + 2z_{11} = -1, \quad Q_1 = \frac{g_{11}}{2},$$
$$Q_{ij} = g_{ij} \quad \text{і} \quad ij \in \mathcal{J}_1.$$

Застосовуючи далі метод математичної індукції при $g_{10}+g_{01}+g_{11} \neq 0$ $\mathcal{J}_{2n+1} \neq \emptyset$, $n \geq 1$, $g_{ii} \neq 0$, $i \geq 2$, і за умов:

— $g_{i+j,i} \neq 0$, $g_{i,i+j} \neq 0$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 0$, $j-i \geq 2$;

— $g_{i+j,i} \neq 0$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} = 0$, $i \geq 0$, $j-i \geq 2$;

— $g_{i,i+j} \neq 0$, якщо $g_{i+1,i} = 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 0$, $j-i \geq 2$;

доходимо висновку, що для розбіжності дробу (21) необхідно виконання умов $z_{10}+z_{01}+2z_{11} = -1$, $z_{i+1,i}+z_{i,i+1} = -1$, $z_{i+1,i+1} = -1/4$, $i \geq 1$, а також умов:

— $z_{i+j,i} = -1$, $z_{i,i+j} = -1$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 0$, $j-i \geq 2$;

— $z_{i+j,i} = -1$, якщо $g_{i+1,i} \neq 0$, $g_{i,i+1} = 0$, $i \geq 0$, $j-i \geq 2$;

— $z_{i,i+j} = -1$, якщо $g_{i+1,i} = 0$, $g_{i,i+1} \neq 0$, $i \geq 0$, $j-i \geq 2$.

З огляду на випадки i), ii) та iii) доходимо висновку, що виконання хоча б однієї з умов (A)—(D) забезпечує збіжність ДНД (21). ■

Теорема 6. *ДНД (21), елементи якого задовольняють одну з умов (7) або (8), абсолютно збіжний, якщо* $|z_{10}|+|z_{01}|+2|z_{11}| \leq r < 1$ *і виконуються умови (34).*

Доведення. Використовуючи співвідношення (36)—(39), які справедливі для ДНД (2), можна показати, що значенння ДНД (2) належать кругу $|z-1| \leq r$. Із доведення теореми 4 випливає, що підхідні дроби ДНД (21) утворюють монотонно зростаючу й обмежену зверху послідовність. Звідси доходимо висновку про абсолютну збіжність ДНД (21).

3. Висновки. Запропоновані ознаки збіжності можна використати при встановленні ознак збіжності типу Слешинського-Прінгсгейма для двовимірних неперервних дробів, а також при дослідженні збіжності функціональних двовимірних неперервних дробів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Wall H.S.* Analytic theory of continued fractions.— New York: Van Nostrand, 1948.— 433 p.

2. *Слешинский И.В.* К вопросу о сходимости непрерывных дробей // Мат. сборник.— 1888.— **XIV**.— С.337—343.

3. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.— М.: Мир, 1985.— 414 с.

4. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications.— Amsterdam: North-Holland, 1992.— 606 c.

5. *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби.— К.: Наук. думка, 1986.— 176 с.

6. *Боднар Д.И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1,i_2,\dots,i_k})\hat{g}_{i_1,i_2,\dots,i_k}x_{i_1,i_2,\dots,i_k}}{1}$ // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1982.— Вып. 15.— С.30—35.

7. *Боднар Д.И., Кучминская Х.И.* Абсолютная сходимость четной и нечетной части двумерной соответствующей цепной дроби // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1983.— Вып. 18. — С.30—34.

8. *Kuchminskaja Ch.* On the convergence of two-dimensional continued fractions // Constructive theory of functions.— Sofia: Publishing House of the Bulgarian Acad. Sci. 1984.— P.501—506.

9. *Дмитришин Р.І.* Багатовимірні аналоги g-дробів, їх властивості, ознаки збіжності: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук.— Львів, 1998.— 128 с.

10. *Kuchmins'ka Kh.* On sufficient conditions for convergence of two-dimensional continued fractions // Acta Applicandae Mathematicae.— 2000.— **61**, N 1.— P.175—183.

Стаття надійшла до редколегії 4.12.2003