УДК 517.57

©2004 р. О.В. Веселовська

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

ПРО РІСТ СУБГАРМОНІЙНИХ У ПРОСТОРІ R^m ФУНКЦІЙ З РАДІАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ МАС

Доведено, що із скінченності нижнього порядку субгармонійної в R^m функції з радіальним розподілом мас Рісса випливає скінченність її порядку за Пойа.

For an subharmonic function in R^m with radial distribution of Riesz mass sequence the finity of Polya order from finity of lower order is proved.

У 1986 р. Д.Б. Майлзом [1] для характеристики Неванлінни $T(r,f)$ цілої у площині функції f скінченного порядку з нулями, розташованими на скінченній системі променів, що виходять з початку координат, доведена нерівність $T(\alpha r,f) < MT(r,f)$, $r > r_0$, де $\alpha > 1$, M — додатна стала.

У даній праці визначається аналогічна нерівність для субгармонійної в просторі R^m функції скінченного нижнього порядку, маси Рісса якої зосереджені на додатній частині x_1-осі. Крім того, доводиться, що із скінченності нижнього порядку даної функції випливає скінченність її порядку за Пойа.

Позначимо

$$S^m = \{x \in R^m : |x| = 1\}, \quad \omega_m = \operatorname{mes} S^m,$$

$$d_m = \begin{cases} 1, & m = 2, \\ m-2, & m > 2. \end{cases}$$

Нехай u — субгармонійна в R^m, $m \geq 2$, функція, а Δ — оператор Лапласа. Оскільки $\Delta u \geq 0$ в розумінні узагальнених функцій, то кожній функції u відповідає єдиний розподіл мас $\mu_u = 1/(d_m\omega_m)\Delta u$, який називається розподілом мас, асоційованих за Ріссом із субгармонійною функцією u [2, с. 55—58].

Розподіл мас μ в R^m зосереджений [3, с. 589] на множині X, якщо $\mu(CX) = 0$, де CX — доповнення до множини X.

Функція

$$T(r,u) = \frac{1}{\omega_m}\int\limits_{S^m} u^+(r\xi)dS(\xi), \; u^+ = \max(u;0),$$

називається характеристикою Неванлінни [4, с.145] функції u, а величини

$$\lambda(u) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln T(r,u)}{\ln r},$$

$$\rho(u) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln T(r,u)}{\ln r},$$

$$\rho^*(u) = \sup\{s : \varlimsup_{r,A\to\infty} \frac{T(Ar,u)}{A^s T(r,u)} = +\infty\}$$

— її нижнім порядком, порядком [4, с. 161—162] та порядком за Пойа [5] відповідно.

Теорема 1. *Нехай u — субгармонійна функція скінченного нижнього порядку і розподіл мас, асоційованих за Ріссом з функцією u, зосереджений на додатній частині x_1-осі. Тоді існує стала $M > 0$ така, що*

$$T(\alpha r,u) < MT(r,u) \qquad (1)$$

при $r > r_0$ і $\alpha > 1$.

Для доведення даної теореми нам потрібні деякі відомості про сферичні гармоніки (більш детально див., наприклад, [6, с. 157—174]).

Сферичною гармонікою або сферичною функцією Лапласа степеня k, $k \in Z_+ = \{0,1,2,...\}$, яку ми будемо позначати через $Y^{(k)}$, називається звуження на одиничну сферу S^m, $m \geq 2$, однорідного гармонійного многочлена степеня k. Множину сферичних гармонік степеня k можна розглядати як підпростір простору $L^2(S^m)$ дійснозначних функцій зі скалярним добутком

$$(f,g)=\frac{1}{\omega_m}\int\limits_{S^m} f(x)g(x)dS,$$

де dS — елемент площі сфери S^m. Якщо $\{Y_1^{(k)},...,Y_{\gamma_k}^{(k)}\}$ — ортонормований базис у цьому підпросторі, то $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\{Y_1^{(k)},...,Y_{\gamma_k}^{(k)}\}$ буде ортонормованим базисом у просторі $L^2(S^m)$. Тут $\gamma_k=(2k+m-2)(k+m-3)!/(k!(m-2)!)$ — кількість лінійно-незалежних сферичних гармонік степеня k.

Рядом Фур'є-Лапласа функції $f\in L^1(S^m)$ називається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}Y^{(k)}(x;f),\quad x\in S^m,$$

де

$$Y^{(k)}(x;f)=a_1^{(k)}Y_1^{(k)}(x)+...+a_{\gamma_k}^{(k)}Y_{\gamma_k}^{(k)}(x),$$

$$a_j^{(k)}=(f,Y_j^{(k)}),\quad j=1,...,\gamma_k,$$

$(f,Y_j^{(k)})$ — скалярний добуток в $L^2(S^m)$. При $m=2$ маємо звичайний тригонометричний ряд Фур'є. Сферичні гармоніки $Y^{(k)}(x;f)$ можуть бути виражені співвідношеннями

$$Y^{(k)}(x;f)=\frac{2(k+\nu)}{d_m\omega_m}\int\limits_{S^m}P_k^{\nu}[(x,\xi)]f(\xi)dS(\xi), \tag{2}$$

де $\nu=\dfrac{m-2}{2}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в R^m, а P_k^{ν} — многочлени Гегенбауера, що визначаються з розкладу

$$\frac{1-\tau^2}{(1-2\tau t+\tau^2)^{\nu+1}}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+\nu}{d_m}P_k^{\nu}(t)\tau^k,$$

$$|t|\le 1,\quad 0\le\tau<1.$$

Відомо, що

$$\max_{-1\le t\le 1}|P_k^{\nu}(t)|=P_k^{\nu}(1)=\frac{(k+2\nu-1)!}{(d_m-1)!k!}. \tag{3}$$

Сферичні гармоніки, асоційовані із субгармонійною функцією u, позначимо $c_k(x,r;u)=Y^{(k)}(x;u_r)$, $r>0$, $x\in S^m$, де $u_r=u(rx)$.

Доведення теореми 1. Через μ позначимо розподіл мас, асоційованих за Ріссом з функцією u, і, не зменшуючи загальності, будемо припускати, що $u(0)=0$ і $\alpha=2$. Згідно з результатами А.С. Колокольнікова [7], із скінченності нижнього порядку функції u випливає скінченність її порядку $\rho=\rho(u)$. Тому за теоремою Брело-Адамара [4, с. 165]

$$u(y)=J_p(y;\mu)+\Phi(y),$$

де $J_p(y;\mu)$ — канонічний інтеграл Вейєрштрасса роду p [4, с. 163], а $\Phi(y)=\sum\limits_{j=1}^{l}Y^{(j)}(x)r^j$, $y=rx$, $r>0$, $x\in S^m$, — гармонійний многочлен степеня $l\le[\rho]$.

Якщо $l\ge p+1$, то, використовуючи відоме співвідношення $T(r,J_p(y;\mu))=o(r^{p+1})$, $r\to\infty$, [8], отримаємо $T(r,u)=br^l+o(r^{p+1})$, $r\to\infty$, де b — деяка додатна стала. Звідси

$$T(2r,u)<2^{\rho+1}T(r,u)$$

при $r>r_0$.

Нехай тепер $l\le p$. Тоді відомі формули [9] для сферичних гармонік $c_k(x,r;u)$, асоційованих з функцією u, запишуться у вигляді:

$$c_k(x,r;u)=Y^{(k)}(x)r^k+P_k^{\nu}[(x,e)]\times$$

$$\times\left(\int\limits_{|y|\le r}\frac{r^k}{|y|^{k+2\nu}}d\mu(y)-\int\limits_{|y|\le r}\frac{|y|^k}{r^{k+2\nu}}d\mu(y)\right),$$

$$1\le k\le p;$$

$$c_k(x,r;u)=-P_k^{\nu}[(x,e)]\times$$

$$\times\left(\int\limits_{|y|>r}\frac{r^k}{|y|^{k+2\nu}}d\mu(y)+\int\limits_{|y|\le r}\frac{|y|^k}{r^{k+2\nu}}d\mu(y)\right),$$

$$k\ge p+1, \tag{4}$$

де $x\in S^m$, $e=(1,0,...,0)$ — одиничний вектор x_1-осі, а P_k^{ν} — многочлени Гегенбауера степеня k і порядку ν.

Оцінимо кожну із сферичних гармонік $c_k(x, r; u)$. Нехай $N(r, \mu) = d_m \int\limits_0^r \frac{n(t, \mu)}{t^{m-1}} dt$, $n(t, \mu) = \int\limits_{|\tau| \le t} d\mu(\tau)$. У [9] показано, що $c_0(x, 2r; u) = c_0(2r; u) = N(2r, \mu)$. Запишемо $N(2r, \mu)$ у вигляді суми $N(2r, \mu) = N(r, \mu) + [N(2r, \mu) - N(r, \mu)]$. Перший доданок на підставі першої фундаментальної теореми Неванлінни для субгармонійних функцій [4, с. 146] має оцінку

$$N(r, \mu) \le T(r, u). \tag{5}$$

Для другого доданку справджується нерівність

$$N(2r, \mu) - N(r, \mu) = d_m \int\limits_r^{2r} \frac{n(t, \mu)}{t^{2\nu+1}} dt \le$$

$$\le d_m n(2r, \mu) \int\limits_r^{2r} \frac{dt}{t^{2\nu+1}} \le 2^{2\nu} \frac{n(2r, \mu)}{(2r)^{2\nu}}.$$

Розглянемо різницю $\frac{1}{2^{p+2\nu+1} r^{2\nu}} [n(2r, \mu) - n(r/2, \mu)]$. За допомогою формул (4), в яких візьмемо $x = e$, отримуємо

$$\frac{1}{2^{p+2\nu+1} r^{2\nu}} [n(2r, \mu) - n(r/2, \mu)] \le$$

$$\le \int\limits_{r/2 < |y| \le 2r} \frac{r^{p+1}}{|y|^{p+2\nu+1}} d\mu(y) \le$$

$$\le \int\limits_{|y| > r/2} \frac{r^{p+1}}{|y|^{p+2\nu+1}} d\mu(y) = 2^{p+1} \times$$

$$\times \left| \frac{c_{p+1}(e, r/2; u)}{P_{p+1}^{\nu}(1)} + \int\limits_{|y| \le r/2} \frac{|y|^{p+1}}{(r/2)^{p+2\nu+1}} d\mu(y) \right| \le$$

$$\le \frac{2^{p+1}}{P_{p+1}^{\nu}(1)} |c_{p+1}(e, r/2; u)| + 2^{p+1} \frac{n(r/2, \mu)}{(r/2)^{2\nu}}.$$

Оскільки, згідно зі співвідношеннями (2), (3), (5)

$$|c_k(x, r; u)| \le \frac{2(k+\nu)}{d_m \omega_m} P_k^{\nu}(1) \int\limits_{S^m} |u(r\xi)| dS(\xi) \le$$

$$\le 4 \frac{k+\nu}{d_m} P_k^{\nu}(1) T(r, u), \quad k \in \mathrm{Z}_+, \tag{6}$$

і

$$T(2r, u) \ge N(2r, \mu) \ge$$

$$\ge d_m n(r, \mu) \int\limits_r^{2r} \frac{dt}{t^{2\nu+1}} \ge \frac{n(r, \mu)}{2r^{2\nu}}, \tag{7}$$

то

$$\frac{1}{2^{p+2\nu+1} r^{2\nu}} [n(2r, \mu) - n(r/2, \mu)] \le$$

$$\le 2^{p+3} \frac{p+\nu+1}{d_m} T(r, u) + 2^{p+2} T(r, u) \le$$

$$\le 2^{p+3}(p+2) T(r, u). \tag{8}$$

Звідси, враховуючи (7), знаходимо

$$\frac{n(2r, \mu)}{(2r)^{2\nu}} \le \frac{n(r/2, \mu)}{(2r)^{2\nu}} +$$

$$+ 2^{2p+4}(p+2) T(r, u) \le 2^{2p+5}(p+2) T(r, u). \tag{9}$$

Отже,

$$c_0(2r; u) \le T(r, u) + 2^{2p+2\nu+5}(p+2) T(r, u) \le$$

$$\le 2^{2p+2\nu+6}(p+2) T(r, u).$$

Нехай $1 \le k \le p$. Тоді

$$|c_k(x, 2r; u)| \le$$

$$\left| Y^{(k)}(x)(2r)^k + P_k^{\nu}[(x, e)] \int\limits_{|y| \le r/2} \frac{(2r)^k}{|y|^{k+2\nu}} d\mu(y) \right| +$$

$$+ P_k^{\nu}(1) \left(\int\limits_{r/2 < |y| \le 2r} \frac{(2r)^k}{|y|^{k+2\nu}} d\mu(y) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|y| \le 2r} \frac{|y|^k}{(2r)^{k+2\nu}} d\mu(y) \right).$$

Оскільки на підставі формул (4)

$$Y^{(k)}(x)(2r)^k + P_k^{\nu}[(x, e)] \int\limits_{|y| \le r/2} \frac{(2r)^k}{|y|^{k+2\nu}} d\mu(y) =$$

$$= 4^k \left(Y^{(k)}(x)(r/2)^k + P_k^\nu[(x,e)] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{|y|\le r/2} \frac{(r/2)^k}{|y|^{k+2\nu}} d\mu(y) \right) =$$

$$= 4^k \left(c_k(x, r/2; u) + P_k^\nu[(x,e)] \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{|y|\le r/2} \frac{|y|^k}{(r/2)^{k+2\nu}} d\mu(y) \right),$$

то, скориставшись нерівностями (6)—(9), отримаємо

$$|c_k(x, 2r; u)| \le 2^{2k} \left(|c_k(x, r/2; u)| + P_k^\nu(1) \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{|y|\le r/2} \frac{|y|^k}{(r/2)^{k+2\nu}} d\mu(y) \right) +$$

$$+ P_k^\nu(1) \left(\int\limits_{r/2<|y|\le 2r} \frac{(2r)^k}{|y|^{k+2\nu}} d\mu(y) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|y|\le 2r} \frac{|y|^k}{(2r)^{k+2\nu}} d\mu(y) \right) \le$$

$$\le 2^{2k} |c_k(x, r/2; u)| + P_k^\nu(1) \left(2^{2k} \frac{n(r/2, \mu)}{(r/2)^{2\nu}} + \right.$$

$$\left. + 2^{2k+2\nu} \frac{n(2r, \mu) - n(r/2, \mu)}{r^{2\nu}} + \frac{n(2r, \mu)}{(2r)^{2\nu}} \right) \le$$

$$\le 2^{4p+4\nu+5}(p+2) P_k^\nu(1) T(r, u).$$

Припустимо тепер, що $k \ge p+1$. Позначимо

$$I_k = I_k(r; x) =$$

$$-P_k^\nu[(x,e)] \int\limits_{|y|>2r} \frac{(2r)^k}{|y|^{k+2\nu}} d\mu(y).$$

Враховуючи нерівності (6) і (7), маємо

$$|I_k| \le P_k^\nu(1) \int\limits_{|y|>2r} \left(\frac{2r}{|y|} \right)^k \frac{d\mu(y)}{|y|^{2\nu}} \le$$

$$\le P_k^\nu(1) \int\limits_{|y|>2r} \left(\frac{2r}{|y|} \right)^{p+1} \frac{d\mu(y)}{|y|^{2\nu}} \le$$

$$\le P_k^\nu(1) \int\limits_{|y|>r/2} \frac{(2r)^{p+1}}{|y|^{p+2\nu+1}} d\mu(y) =$$

$$= 2^{2p+2} P_k^\nu(1) \left| \frac{c_{p+1}(e, r/2; u)}{P_{p+1}^\nu(1)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{|y|\le r/2} \frac{|y|^{p+1}}{(r/2)^{p+2\nu+1}} d\mu(y) \right| \le 2^{2p+2} P_k^\nu(1) \times$$

$$\times \left(2^2 \frac{p+\nu+1}{d_m} T(r,u) + \frac{n(r/2, \mu)}{(r/2)^{2\nu}} \right) \le$$

$$\le 2^{2p+4} \frac{p+\nu+1}{d_m} P_k^\nu(1) T(r,u) + 2^{2p+3} P_k^\nu(1) \times$$

$$\times T(r,u) \le 2^{2p+4}(p+2) P_k^\nu(1) T(r,u).$$

Підставляючи отриману оцінку у формули (4) і використовуючи нерівність (9), знаходимо

$$|c_k(x, 2r; u)| \le$$

$$\le |I_k| + P_k^\nu(1) \int\limits_{|y|\le 2r} \frac{|y|^k}{(2r)^{k+2\nu}} d\mu(y) \le$$

$$\le 2^{2p+4}(p+2) P_k^\nu(1) T(r,u) + P_k^\nu(1) \frac{n(2r, \mu)}{(2r)^{2\nu}} \le$$

$$\le 2^{2p+6}(p+2) P_k^\nu(1) T(r,u).$$

Тепер доведемо нерівність (1). Відомо [4, с. 66], що інтеграл Пуассона є найкращою гармонійною мажорантою субгармонійної функції в кулі. Тому для функції u при $r < R$ виконується

$$u(rx) \le \frac{R^{2\nu}}{\omega_m} \int\limits_{S^m} \frac{(R^2 - r^2) u(R\xi) dS(\xi)}{[R^2 - 2Rr(x,\xi) + r^2]^{\nu+1}}.$$

Розкладемо інтеграл Пуассона в ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k c_k(x, R; u)$ (див.[9]). Тоді

$$u^+(rx) \le \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k c_k(x, R; u) \right|.$$

Вважаючи, що $R = \sqrt{2} r$ і використовуючи отримані раніше оцінки на сферичні гармоніки, асоційовані з функцією u, маємо

$$u^+(rx) \le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^k \left| c_k(x, \sqrt{2} r; u) \right| \le$$

$$\bigl(2^{2p+2\nu+6}(p+2)+$$

$$+\,2^{4p+4\nu+5}(p+2)\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k}P_k^{\nu}(1)+$$

$$+2^{2p+6}(p+2)\sum_{k=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k}P_k^{\nu}(1)\Biggr)\times$$

$$\times T\left(\frac{r}{\sqrt{2}},u\right).$$

На підставі співвідношення (3) ряд у попередній нерівності збігається, а тому вираз у фігурних дужках є сталою, яку ми позначимо через M_p.

Отже,

$$T(r,u)\le M_pT\left(\frac{r}{\sqrt{2}},u\right),$$

звідки

$$T(2r,u)\le M_pT\left(\sqrt{2}r,u\right)\le M_p^2T(r,u),$$

що потрібно було довести.

Теорема 2. *Якщо нижній порядок субгармонійної в R^m функції u, маси Рісса якої зосереджені на додатній частині x_1-осі, скінченний, то скінченний і її порядок за Пойа.*

Доведення теореми 2. Покажемо, що скінченність порядку за Пойа функції u еквівалентна нерівності (1).

Дійсно, якщо $\rho* = \rho*(u) < \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться стала $B > 0$ така, що

$$T(Ar,u)\le BA^{\rho^*+\varepsilon}T(r,u)$$

при $A > A_0 > 1$, $r > r_0$. Вибравши $A = 2A_0$, отримаємо

$$T(2r,u)<T(2A_0r,u)\le B_1T(r,u),$$

де $B_1 = B\cdot(2A_0)^{\rho^*+\varepsilon}$.

Навпаки, з нерівності (1) випливає, що

$$T(Ar,u)=T(2^{\log_2 A}r,u)<$$

$$<M^{\log_2 A+1}T(r,u)=MA^{\log_2 M}T(r,u)$$

і, отже, $\rho^*(u) < \infty$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Miles J.* On the growth of meromorphic functions with radially distributed zeros and poles // Pacif. J. Math.— 1986.— **122**, N 1.— P.147—167.

2. *Ронкин Л.И.* Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Наука, 1971.— 432 с.

3. *Шварц Л.* Анализ. Т.1.— М.: Мир, 1972.— 824 с.

4. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М.: Мир, 1980.— 304 с.

5. *Drasin D., Shea D.F.* Polya peaks and the osscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— 34.— P.403—411.

6. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 336 с.

7. *Колокольников А.С.* О росте субгармонических в пространстве функций со специальным распределением масс // Теория функций, функц. анализ и их прилож.— 1974.— Вып. 21.— С.42—56.

8. *Азарин В.С.* Теория роста субгармонических функций. Тексты лекций. Ч.2.— Харьков: ХГУ, 1982.— 74 с.

9. *Кондратюк А.А.* Сферические гармоники и субгармонические функции // Мат. сб.— 1984.— **125** (167), N 2.— С.147—166.

Стаття надійшла до редколегії 7.12.2003