УДК 517.98

©2004 р. С.Б. Боднарук, В.В. Городецький, В.П. Ратушняк*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
*Коломийський економіко-правовий коледж від Київського національного торговельно-економічного університету, Коломия

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Розвивається теорія задачі Коші для диференціально-операторних рівнянь нескінченного порядку з оператором, спектр якого є суто дискретним. Описуються множини початкових значень гладких розв'язків таких рівнянь. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші у просторах лінійних функціоналів нескінченного порядку типу ультрарозподілів.

Theory of the Cauchy problem is developed for the differential-operator equations of the infinite order with totally discrete spectrum of operator. The sets of initial values of the smooth solutions are described for such equations. The correct solvability of the Cauchy problem is established on the spaces of linear functionals of the infinite order of the ultradistribution type.

Зображенню розв'язків диференціально-операторних рівнянь першого порядку вигляду

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0, \qquad (1)$$

та дослідженню їх граничних значень присвячені праці [1—7]. М.Л. Горбачуком та В.І. Горбачук (див. [1—3]) встановлено, що коли A — невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H, то загальний розв'язок рівняння (1) подається у вигляді

$$u(t) = e^{-t\hat{A}}f, \quad f \in H_-,$$

де H_- — сукупність всіх лінійних неперервних функціоналів над простором аналітичних векторів оператора A. Звідси випливає, що задача Коші для такого рівняння коректно розв'язна у просторі H_-. Даний результат в [4,5] перенесено на ширший клас операторів, що діють у банаховому просторі. У працях [2,3,5] дається також відповідь на питання про те, як повинен поводитись розв'язок рівняння (1), щоб його граничне значення в нулі належало до певного простору, розміщеного між H та H_-.

У випадку більш загального рівняння першого порядку

$$\alpha(t)u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], \qquad (2)$$

де $\alpha > 0$ — скалярна неперервна на $(0, T]$ функція, питання про зображення розв'язку і його поведінку в околі нуля для невід'ємного самоспряженого оператора A у гільбертовому просторі вивчалось у праці [6], а для генератора аналітичної півгрупи у банаховому просторі — в [7] (зазначимо, що оскільки функція α у точці $t = 0$ може дорівнювати нулеві або нескінченності, то рівняння (2), взагалі кажучи, вироджується).

У даній статті аналогічні питання вивчаються у випадку, коли оператор A у рівнянні (1) є невід'ємним самоспряженим оператором нескінченного порядку вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k B^k$, де $B \geq 0$ — самоспряжений оператор у гільбертовому просторі з суто дискретним спектром.

1. Простори основних та узагальнених елементів. Формальні ряди Фур'є. Нехай H — сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\| \cdot \|$, $\{e_k, k \geq 1\}$ — ортонормований базис в H. Позначимо

$$\Phi_m = \{\varphi \in H \,|\, \varphi = \sum_{k=1}^{m} c_{k,\varphi} e_k, \ c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}\},$$

$$\Phi = \lim_{m \to \infty} \operatorname{ind} \Phi_m.$$

Отже, послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ до елемента $\varphi \in \Phi$, якщо

$$\exists\, m \exists\, \nu_0\, \forall\, \nu \geq \nu_0 : \varphi_\nu \in \Phi_m;$$

$$c_{k,\varphi_\nu} \underset{\nu\to\infty}{\to} c_{k,\varphi}, \forall\, k \in \{1, ..., m\}.$$

Очевидно, що Φ лежить щільно в H.

Через Φ' позначимо простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю:

$$(\Phi' \ni f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\Phi'}{\to}} f \in \Phi') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (< f_n, \varphi > \underset{n\to\infty}{\to} < f, \varphi >, \forall\, \varphi \in \Phi)$$

(тут $< f, \varphi >$ позначає дію функціонала f на елемент $\varphi \in \Phi$).

Зіставлення

$$H \ni \varphi \mapsto f_\varphi \in \Phi' :< f_\varphi, \psi >= (\varphi, \psi),\ \forall\, \psi \in \Phi,$$

визначає вкладення $H \subset \Phi'$. Елементи з Φ' називаються узагальненими.

Нехай s — простір усіх числових послідовностей $\{s_k, k \geq 1\}$ з покоординатною збіжністю. Відображення

$$\Phi' \ni f \overset{F}{\mapsto} \{c_k(f) =< f, e_k >, k \in \mathbb{N}\} \in s$$

є ізоморфізмом; при цьому збіжність у Φ' рівносильна покоординатній збіжності відповідних послідовностей в s. Зауважимо, що F відображає Φ у множину фінітних послідовностей в s, а H — в l_2.

Нехай $f \in \Phi'$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, де $c_k =< f, e_k >$, називається рядом Фур'є елемента $f \in \Phi'$, а числа c_k — його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f. Навпаки, довільний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [3]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Звідси випливає також, що $\bar{\Phi} = \Phi'$.

Нехай G — неперервна на $[0, \infty)$ функція така, що

$$\exists\, c > 0\ \forall\, x \in [0, +\infty) :\ G(x) \geq c;$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{G^2(k)} < +\infty.$$

За функцією G у просторі Φ' побудуємо оператор

$$\hat{A} : \Phi' \ni f \mapsto F^{-1}\{G(k)c_k(f), k \geq 1\} \in \Phi',$$

$$c_k(f) =< f, e_k >,$$

тобто

$$\hat{A}f \equiv \hat{A}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e_k\right) := \sum_{k=1}^{\infty} G(k)c_k(f)e_k \in \Phi'.$$

Легко бачити, що оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в Φ'.

Теорема 1. *Нехай A — звуження оператора $\hat{A}$ на H. Тоді A — невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $D(A)$, причому $\Phi \subset D(A)$.*

Доведення. Оскільки H — гільбертів простір, $\{e_k, k \geq 1\}$ — ортонормована система (базис) в H, то з означення оператора A випливає, що

$$D(A) = \left\{\varphi \in H \mid \sum_{k=1}^{\infty} G^2(k)|c_k(\varphi)|^2 < \infty,\right.$$

$$\left. c_k(\varphi) = (\varphi, e_k), k \in \mathbb{N}\right\}. \tag{3}$$

Якщо $\varphi \in \Phi \subset H \subset \Phi'$, то $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{m(\varphi)} c_k e_k$, $c_k = (\varphi, e_k)$; при цьому

$$A\varphi = \hat{A}\varphi = F^{-1}\{G(1)e_1, ..., G(m)e_m, 0, ...\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} G(k)c_k(\varphi)e_k.$$

Отже, для $\varphi \in \Phi$ умова (3) виконується, тобто $\Phi \subset D(A)$. Цим доведено, що $\overline{D(A)} = H$.

Оператор A симетричний в H, бо

$$(A\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} G(k) c_k(\varphi) \overline{c_k(\psi)} = (\varphi, A\psi),$$

$$\{\varphi, \psi\} \subset D(A).$$

Оскільки $\overline{D(A)} = H$, то існує оператор A^*, область визначення $D(A^*)$ якого складається з тих елементів $\psi \in H$, для яких існують елементи $\psi^* \in H$, що задовольняють співвідношення $(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*)$ для довільного $\varphi \in D(A)$; при цьому $A^*\psi = \psi^*$.

Доведемо, що $A^* \subseteq A$ (бо включення $A \subseteq A^*$ для симетричного оператора є очевидним). Нехай $\psi \in D(A^*)$ і $A^*\psi = \psi^*$. Покладемо

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\psi) e_k, \psi^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\psi^*) e_k.$$

Тоді

$$c_k(\psi^*) = (\psi^*, e_k) = \overline{(e_k, A^*\psi)} = \overline{(Ae_k, \psi)} =$$

$$= (\psi, Ae_k) = G(k)(\psi, e_k) = G(k) c_k(\psi)$$

(тут ми скористались тим, що $e_k \in D(A)$ при кожному $k \in \mathbb{N}$, причому e_k є власним вектором оператора A, а $G(k)$ — відповідне власне число). Звідси знаходимо, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} G^2(k) |c_k(\psi)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\psi^*)|^2 =$$

$$= \|\psi^*\|_H^2 < \infty,$$

тобто $\psi \in D(A)$. Крім того,

$$A\psi = \sum_{k=1}^{\infty} G(k) c_k(\psi) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\psi^*) e_k = \psi^*.$$

Отже, $A^* \subseteq A$. Невід'ємність оператора A перевіряється безпосередньо. Теорема доведена.

Як наслідок дістаємо, що **спектр оператора A суто дискретний з єдиною граничною точкою в нескінченності.**

Уведемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних елементів оператора A. Припустимо, що монотонно зростаюча послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел володіє властивостями:

1) $\exists M > 0 \, \exists h > 0 \, \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \; m_{n+1} \leq M h^n m_n$; $m_0 = 1$;

2) $\forall \alpha > 0 \, \exists c_\alpha > 0 \, \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \; m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$.

Позначимо

$$H_\infty(A) = \lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{pr} H_\alpha(A), \quad H_\alpha(A) = D(A^\alpha)$$

($D(A^\alpha)$ — область визначення оператора A^α),

$$(\varphi, \psi)_{H_\alpha} = (\varphi, \psi) + (A^\alpha \varphi, A^\alpha \psi),$$

$$\forall \{\varphi, \psi\} \subset D(A^\alpha),$$

$$H_\alpha < m_n >= \{\varphi \in H_\infty(A) \,|\, \exists c > 0 :$$

$$\|A^n \varphi\| \leq c \alpha^n m_n, \alpha > 0, n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Простір $H_\alpha < m_n > \supset \Phi$ є банаховим відносно норми

$$\|\varphi\|_{H_\alpha < m_n >} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|A^n \varphi\|}{\alpha^n m_n}.$$

Будемо вважати, що $H_\infty < m_n > := \lim\limits_{\alpha \to \infty} \mathrm{ind}\, H_\alpha < m_n >$. Очевидно, що $\Phi \subset H_\infty < m_n > \subset H_\infty(A) \subset H$, причому всі вкладення щільні та неперервні. Якщо через $H_\infty^{'}(A)$, $H_\alpha^{'} < m_n >$ позначити простори антилінійних неперервних функціоналів над $H_\infty(A)$, $H_\alpha < m_n >$ відповідно, то, згідно з [3], прийдемо до ланцюжка щільних і неперервних вкладень $H \subset H_\infty^{'}(A) \subset H_\infty^{'} < m_n > \subset \Phi'$; при цьому

$$H_\infty^{'} < m_n >= \lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{pr}\, H_\alpha^{'} < m_n > .$$

Простори $G_{\{\beta\}}(A) = H_\infty < n^{n\beta} >$, $\beta > 0$, називаються просторами Жевре порядку β, породженими оператором A; $G_{\{1\}}(A)$ збігається з множиною аналітичних векторів оператора A [3].

Нехай

$$\rho(\lambda) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^n}{m_n}, \quad \lambda \in [1, +\infty).$$

Із властивостей послідовності $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ неперервна, монотонно зростає (швидше ніж λ^n, $\forall n \in \mathbb{N}$) і $\rho(\lambda) \geq 1$, $\forall \lambda \in [1, +\infty)$. Як випливає з наступного твердження, функція ρ володіє ще однією важливою властивістю.

Лема 1. *Функція* $\ln \rho$ *— опукла на* $(1, +\infty)$*, тобто*

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset (1, +\infty) :$$

$$\ln \rho(x_1) + \ln \rho(x_2) \leq \ln \rho(x_1 + x_2) \qquad (4)$$

(означення (4) відповідає означенню опуклої функції f *з [8]:* $f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2)$*,* $x_1 > 0$*,* $x_2 > 0$*).*

Доведення. Очевидно, що нерівність (4) рівносильна нерівності

$$\rho(x_1)\rho(x_2) \leq \rho(x_1 + x_2). \qquad (5)$$

Для доведення (5) досить встановити, що

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq 1, \quad \{x_1, x_2\} \subset (1, +\infty).$$

Нехай $x_1 \leq x_2$. Оскільки ρ монотонно зростає на проміжку $(1, +\infty)$, то $\rho(x_1) \leq \rho(x_2)$. Отже,

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{\rho^2(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)}.$$

За означенням, $\rho(x_2) = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{x_2^n}{m_n}$, $x_2 \in (1, +\infty)$. Розглянемо послідовність $\{\varepsilon_k = \beta_k \rho(x_2), k \in \mathbb{N}\}$, де послідовність $\{\beta_k, k \in \mathbb{N}\}$ додатних чисел монотонно прямує до нуля, причому $\beta_1 < 1$. Тоді для заданого $\varepsilon_k > 0$ знайдеться номер $n_k = n_k(\varepsilon_k)$ такий, що

$$\frac{x_2^{n_k}}{m_{n_k}} > \rho(x_2) - \varepsilon_k = \rho(x_2) - \beta_k \rho(x_2), \ k \geq 1,$$

тобто

$$\rho(x_2) < \frac{1}{1 - \beta_k} \frac{x_2^{n_k}}{m_{n_k}}, \quad k \geq 1.$$

Відповідно,

$$\rho(x_1 + x_2) \geq \frac{(x_1 + x_2)^{n_k}}{m_{n_k}}, \quad k \geq 1.$$

Урахувавши ці нерівності, знайдемо, що

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{\rho^2(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq$$

$$\leq \frac{x_2^{2n_k} m_{n_k}}{(1 - \beta_k)^2 m_{n_k}^2 (x_1 + x_2)^{n_k}} \leq$$

$$\leq \frac{x_2^{n_k}}{(1 - \beta_k)^2 m_{n_k}}, \quad k \geq 1$$

(тут враховано, що $x_1 + x_2 \geq x_2$). Крім того, $\rho(\alpha) \geq \dfrac{\alpha^n}{m_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для довільного $\alpha \in [1, +\infty)$, або

$$\forall \alpha \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \ m_n \geq \frac{\alpha^n}{\rho(\alpha)}.$$

Отже,

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{x_2^{n_k}}{(1 - \beta_k)^2} \inf_{\alpha \geq 1} \frac{\rho(\alpha)}{\alpha^{n_k}}, k \geq 1.$$

Уведемо позначення:

$$\inf_{\alpha \geq 1} \frac{\rho(\alpha)}{\alpha^{n_k}} := \rho_{n_k}, k \geq 1.$$

У праці [9] доведено, що послідовність $\{\rho_{n_k}, k \geq 1\}$ володіє властивістю: $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[n_k]{\rho_{n_k}} = 0$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{k_0} = n_{k_0}(\varepsilon) \ \forall n_k \geq n_{k_0} : \ \rho_{n_k} < \varepsilon^{n_k}.$$

Візьмемо $\varepsilon = \dfrac{(1 - \beta_1)^2}{x_2}$. Для всіх $n_k \geq n_0$, справджуються нерівності

$$\frac{\rho(x_1)\rho(x_2)}{\rho(x_1 + x_2)} \leq \frac{x_2^{n_k}}{(1 - \beta_k)^2} \rho_{n_k} \leq$$

$$\leq \frac{x_2^{n_k} (1 - \beta_1)^{2n_k}}{(1 - \beta_k)^2 x_2^{n_k}} \leq$$

$$\leq \frac{(1 - \beta_1)^2}{(1 - \beta_k)^2} \leq 1, \quad \{x_1, x_2\} \subset (1, +\infty),$$

що й потрібно було довести.

Із результатів, одержаних у [3], випливає, що простір $H_\infty < m_n >$ збігається з індуктивною границею гільбертових просторів

$$H_{\{\alpha\}} = \left\{ f \in \Phi' \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \rho^2 \times \right.$$

$$\times\left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right) < +\infty, \lambda_k := G(k)\Bigg\},$$

скалярний добуток в $H_{\{\alpha\}}$ визначається формулою

$$(f,g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\left(\frac{\lambda_k}{\alpha}\right).$$

З точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів простори $H_\infty < m_n >$ та $H'_\infty < m_n >$ описуються так:

$$(f \in H_\infty < m_n >) \Leftrightarrow (\exists\, \mu > 0\ \exists\, c > 0 :$$
$$|c_k(f)| \le c\rho^{-1}(\mu\lambda_k), k \ge 1);$$
$$(f \in H'_\infty < m_n >) \Leftrightarrow (\forall\, \mu > 0\ \exists\, c = c(\mu) > 0 :$$
$$|c_k(f)| \le c\rho(\mu\lambda_k), k \ge 1).$$

Якщо $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp(\lambda^{1/\beta})$, тобто в цьому випадку для $f \in \Phi'$ правильними є співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists\, \mu > 0\ \exists\, c > 0 :$$
$$|c_k(f)| \le c\exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta}), k \ge 1);$$
$$(f \in G'_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\forall\, \mu > 0\ \exists\, c = c(\mu) > 0 :$$
$$|c_k(f)| \le c\exp(\mu\lambda_k^{1/\beta}), k \ge 1).$$

Розглянемо нескінченно диференційовну функцію $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, яка набуває на $\mathbb{R}$ невід'ємних значень, монотонно зростає на $\mathbb{R}$, і побудуємо в просторі Φ' за оператором $\hat{A}$ оператор нескінченного порядку $\varphi(\hat{A})$:

$$\varphi(\hat{A})f = \sum_{j=0}^{\infty} b_j A^j f, \quad \forall\, f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)e_k \in \Phi'.$$

Оскільки

$$A^j f = F^{-1}\{G^j(k)c_k(f), k \ge 1\} \equiv$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{\infty} G^j(k)c_k(f)e_k,$$

то

$$\varphi(\hat{A})f = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\left(\sum_{k=1}^{\infty} G^j(k)c_k(f)e_k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j G^j(k)\right)e_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\varphi(G(k))e_k \equiv$$
$$\equiv \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k)c_k(f)e_k, \quad \lambda_k = G(k).$$

Нехай A_φ — звуження оператора $\varphi(\hat{A})$ на H. Тоді A_φ — невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною областю визначення $D(A_\varphi)$, причому $\Phi \subset D(A_\varphi)$. Доведення цього твердження аналогічне доведенню теореми 1. З'ясуємо, за яких умов на функцію φ оператор A_φ буде неперервним у просторі $H_\infty < m_n >$. Для цього розглянемо узагальнений елемент F_φ з простору Φ', побудований за функцією φ:

$$F_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(G(k))e_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_k)e_k.$$

Теорема 2. *Оператор A_φ неперервний у просторі $H_\infty < m_n >$ тоді і лише тоді, коли $F_\varphi \in H'_\infty < m_n >$.*

Доведення. Нехай $F_\varphi \in H'_\infty < m_n >$, тобто

$$\forall\, \mu > 0\ \exists\, c = c(\mu) > 0\ \forall\, k \ge 1 :$$
$$\varphi(\lambda_k) \le c\rho(\mu\lambda_k). \tag{6}$$

Доведемо, що тоді $A_\varphi\psi \in H_\infty < m_n >$ для довільного елемента $\psi \in H_\infty < m_n >$. Оскільки

$$c_k(A_\varphi\psi) = (A_\varphi\psi, e_k) = (\psi, A_\varphi e_k) =$$
$$= \varphi(\lambda_k)(\psi, e_k) = \varphi(\lambda_k)c_k(\psi),$$

то досить довести, що

$$\exists\, \mu_0 > 0\ \exists\, c_0 > 0\ \forall\, k \ge 1 :$$
$$\varphi(\lambda_k)|c_k(\psi)| \le c_0\rho^{-1}(\mu_0\lambda_k).$$

За умовою $\psi \in H_\infty < m_n >$, тобто

$$\exists\, \mu_1 > 0\ \exists\, c_1 > 0\ \forall\, k \ge 1 :$$
$$|c_k(\psi)| \le c_1\rho^{-1}(\mu_1\lambda_k).$$

Отже,

$$\varphi(\lambda_k)|c_k(\psi)| \le cc_1\rho(\mu\lambda_k)\rho^{-1}(\mu_1\lambda_k) =$$
$$= cc_1 e^{\ln\rho(\mu\lambda_k)} e^{-\ln\rho(\mu_1\lambda_k)} =$$
$$= cc_1 e^{\ln\rho(\mu\lambda_k)-\ln\rho(\mu_1\lambda_k)}.$$

Візьмемо параметр μ з проміжку $(0,\mu_1)$. Врахувавши нерівність опуклості (4), для функції $\ln\rho$ знайдемо, що

$$\ln\rho(\mu\lambda_k) - \ln\rho(\mu_1\lambda_k) \le$$
$$\le -\ln\rho((\mu_1-\mu)\lambda_k) \equiv -\ln\rho(\mu_0\lambda_k),$$

де $\mu_1 - \mu = \mu_0$. Тоді

$$\varphi(\lambda_k)|c_k(\psi)| \le c_0 e^{-\ln\rho(\mu_0\lambda_k)} = c_0\rho^{-1}(\mu_0\lambda_k),$$

звідки й випливає, що $A_\varphi\psi \in H_\infty < m_n >$.

Доведемо, що A_φ — неперервний оператор у просторі $H_\infty < m_n >$, тобто що кожну обмежену множину цього простору оператор A_φ відображає в обмежену множину цього ж простору.

Нехай L — обмежена множина в просторі $H_\infty < m_n >$. Оскільки $H_\infty < m_n >= \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$, то L — обмежена множина в деякому гільбертовому просторі $H_{\{\alpha_0\}}$, тобто $\exists\, b>0\ \forall\,\psi\in L:$

$$\|\psi\|_{H_{\{\alpha_0\}}} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\psi)|^2\rho^2\left(\frac{\lambda_k}{\alpha_0}\right) \le b,$$

або, що рівносильно,

$$\exists\, b>0\ \forall\,\psi\in L:\ |c_k(\psi)| \le b\rho^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\alpha_0}\right),\ k\ge 1.$$

У нерівності (6) нехай $\mu = \dfrac{1}{2\alpha_0}$. Тоді, скориставшись нерівністю опуклості (4), знайдемо, що

$$|c_k(A_\varphi\psi)| = \varphi(\lambda)|c_k(\psi)| \le cb^{-1}\rho^{-1}\times$$
$$\times\left(\left(\frac{1}{\alpha_0}-\mu\right)\lambda_k\right) = b_1\rho^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{2\alpha_0}\right),\ k\ge 1,$$

де $b_1 = cb$. Отже, множина $A_\varphi L$ обмежена у просторі $H_{\{2\alpha_0\}}$, тобто у просторі $H_\infty < m_n >$.

Обернене твердження доводиться аналогічно з використанням нерівності опуклості (4).

Зауваження 1. *Умова $F_\varphi \in H'_\infty < m_n >$ еквівалентна такій умові на функцію φ:*

$$\forall\,\mu>0\ \exists\, c=c(\mu)>0:$$
$$0<\varphi(\lambda)\le c\rho(\mu\lambda),\quad \lambda\in[0,+\infty).$$

Зауваження 2. *Якщо функція φ задовольняє умову*

$$\exists\,\mu_0>0\ \exists\, c_0>0:\ 0<\varphi(\lambda)\le c_0\rho(\mu_0\lambda),$$

то оператор A_φ неперервно відображатиме простір $H_{\alpha+\mu_0} < m_n >$ у простір $H_\alpha < m_n >$ для довільного $\alpha>0$.

2. Диференціально-операторні рівняння з оператором, спектр якого є суто дискретним. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u'(t) + A_\varphi u(t) = 0,\quad t\in(0,T],\quad 0<T<\infty, \tag{7}$$

де A_φ — оператор, побудований за функцією φ (див. п.1), який діє у просторі $H_\infty < m_n >$. Вважаємо, що φ додатково задовольняє ще таку умову:

$$\exists\, p_0\in\mathbb{N}\ \exists\,\varepsilon_0>0\ \exists\, c_0>0:$$
$$\varphi(\lambda) \ge \sqrt[p_0]{\rho(\varepsilon_0\lambda)},\quad \lambda\in\left[\frac{1}{\varepsilon_0},+\infty\right). \tag{8}$$

Рівняння (7) називатимемо еволюційним рівнянням нескінченного порядку.

Під розв'язком рівняння (7) розумітимемо функцію $u:(0,T]\mapsto H_\infty < m_n >$, яка сильно неперервно диференційовна в H і задовольняє рівняння (7).

Теорема 3. *Для довільного $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H'_\infty < m_n >$ функція*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-t\varphi(\lambda_k))c_k e_k$$

є розв'язком рівняння (7), при цьому $u(t)\in H_\infty < m_n >$ при кожному $t\in(0,T]$.

Доведення. Доведемо, що $u(t) \in H_\infty < m_n >$ при кожному $t > 0$. Оскільки $H_\infty < m_n >= \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$, то досить вказати $\alpha_0 > 0$ таке, що $u(t) \in H_{\{\alpha_0\}}$, тобто довести, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(u(t))|^2 \rho^2 \left(\frac{\lambda_k}{\alpha_0}\right) < +\infty.$$

За умовою $f \in H'_\infty < m_n >$, тобто

$$\forall \mu > 0 \ \exists c = c(\mu) > 0 : \ |c_k| \le c\rho(\mu\lambda_k), \ k \ge 1.$$

Отже, врахувавши (8), а також те, що $c_k(u(t)) = c_k e^{-t\varphi(\lambda_k)}$, знайдемо, що

$$|c_k(u(t))| \le c\rho(\mu\lambda_k)e^{-t\varphi(\lambda_k)} \le$$

$$\le \frac{c(p_0)!\rho(\mu\lambda_k)}{t^{p_0}\varphi^{p_0}(\lambda_k)} \le \tilde{c}\rho(\mu\lambda_k)\rho^{-1}(\varepsilon_0\lambda_k) \le$$

$$\le \frac{\tilde{c}M}{\mu h\lambda_k}\rho^{-1}(\varepsilon_0\lambda_k)\sup_n \frac{\mu^{n+1}\lambda_k^{n+1}h^{n+1}}{m_{n+1}} \le$$

$$\le \tilde{c}'\frac{1}{\lambda_k}\rho^{-1}(\varepsilon_0\lambda_k)\rho(\mu h\lambda_k) =$$

$$= \frac{\tilde{c}'}{\lambda_k}e^{\ln\rho(\mu h\lambda_k) - \ln\rho(\varepsilon_0\lambda_k)} \le$$

$$\le \frac{\tilde{c}'}{\lambda_k}e^{-\ln\rho((\varepsilon_0 - \mu h)\lambda_k)} = \frac{\tilde{c}'}{\lambda_k}\rho^{-1}((\varepsilon_0 - \mu h)\lambda_k),$$

$$\tilde{c}' = \frac{\tilde{c}M}{\mu h}, \quad \tilde{c} = \frac{c(p_0)!}{t^{p_0}}$$

(тут ми скористались також нерівністю опуклості (4)). Нехай $\mu = \dfrac{\varepsilon_0}{2h}$. Тоді

$$|c_k(u(t))| \le \frac{\tilde{c}}{\lambda_k}\rho^{-1}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\lambda_k\right).$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(u(t))|^2\rho^2\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\lambda_k\right) \le \tilde{c}'\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2} < +\infty,$$

тобто $u(t) \in H_{\{\frac{2}{\varepsilon_0}\}}$. Звідси випливає, що $u(t) \in H_\infty < m_n >$ при кожному $t > 0$.

Далі встановлюємо сильну неперервну диференційовність $u(t)$ в H ($u \in C^1((0,T], H)$) і безпосередньо переконуємося в тому, що $u(t)$ задовольняє рівняння (7).

Наслідок 1. *Граничне значення $u(t)$ при $t \to +0$ існує в просторі $H'_\infty < m_n >$, тобто*

$$u(t) \to f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H'_\infty < m_n >, \quad t \to +0.$$

Задача Коші для рівняння (7) полягає у відшуканні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкову умову $u(0) = \lim\limits_{t\to+0} u(t) = f$, де границя береться у просторі Φ'. Попередні теореми приводять до наступного твердження.

Теорема 4. *Задача Коші для рівняння (7) коректно розв'язна у просторі початкових даних $H'_\infty < m_n >$. Її розв'язок зображається формулою*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\exp(-t\varphi(\lambda_k))c_k e_k,$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H'_\infty < m_n >,$$

причому $u(t) \in H_\infty < m_n >$ при кожному $t > 0$ і $u(t) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $H'_\infty < m_n >$.

Зазначимо, що простір $H'_\infty < m_n >$ є максимальним простором початкових значень, у якому задача Коші для рівняння (7) є розв'язною у вказаному сенсі.

Як приклад розглянемо функцію $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{(n!)^\beta}$, $\beta > 0$.

Відомо (див.[10]), що для довільного $\varepsilon > 0$ існують додатні сталі c_1, c_2 такі, що

$$c_1\exp(\beta\lambda^{1/\beta}) \le \varphi(\lambda) \le c_2\exp(\beta(1+\varepsilon)\lambda^{1/\beta}).$$

Отже, функція φ задовольняє умову (8) з параметрами: $p_0 = 1$, $\varepsilon_0 = \beta$. Припустимо, що $m_n = n^{n\beta}$, $\beta > 0$. Тоді $\rho(\lambda) \sim \exp(\lambda^{1/\beta})$, тобто $H_\infty < n^{n\beta} >= G_{\{\beta\}}(A)$. Внаслідок теореми 4 та зауваження 2 задача Коші для еволюційного рівняння нескінченного порядку

$$u'(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{(k!)^\beta}u(t) = 0, \quad t > 0, \qquad (9)$$

буде коректно розв'язною в просторі початкових даних $H'_{\infty} < n^{n\beta} >= G'_{\{\beta\}}(A)$, причому $u(t) \in H_{\frac{\beta}{2}} < n^{n\beta} >\subset G_{\{\beta\}}(A)$ при кожному $t > 0$.

Зокрема, якщо за функцію G взяти неперервну однорідну порядку $\gamma > \frac{1}{2}$ функцію вигляду $G(x) = |x|^{\gamma}$, а за Φ — простір усіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx},\ x \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{Z}_+, c_{k,p} \in \mathbb{C},$$

то в цьому випадку $\hat{A}$ збігається з оператором дробового диференціювання, який діє в просторі узагальнених періодичних функцій [11], A_{φ} — з оператором дробового диференціювання нескінченного порядку. Задача Коші для рівняння (9) у цьому випадку коректно розв'язна в просторі періодичних ультрарозподілів $G'_{\{\beta\}}([0, 2\pi])$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* О граничных значениях решений однородных дифференциальных решений // Докл. АН СССР.— 1976.— **228**, N 5.— С.1021—1024.

2. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений // Мат. сб.— 1977.— **102**, N 1.— С.124—150.

3. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка, 1984.— 283 с.

4. *Князюк А.* Граничные значения решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Докл. АН УССР. Сер.А.— 1984.— N 9.— С.12—14.

5. *Князюк А.* Граничные значения бесконечно дифференцируемых полугрупп. Препринт.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1985.— N 69.— 47 с.

6. *Горбачук М.Л., Пивторак Н.И.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, N 8.— С.1317—1324.

7. *Горбачук В.М., Мацишин И.Т.* О решениях эволюционных уравнений с вырождением в банаховом пространстве // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1986.— С.5—10.

8. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

9. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Про одне узагальнення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр.— Вип. 134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.30—37.

10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ.— М.: Наука, 1969.— 576 с.

11. *Городецький В.В., Дрінь Я.М.* Параболічні псевдодиференціальні рівняння у просторах узагальнених періодичних функцій // Доп. АН УРСР.— 1991.— N 8.— С.18—22.

Стаття надійшла до редколегії 26.11.2003