УДК 519.21

©2004 р. **С.В. Антонюк, І.В. Юрченко, В.К. Ясинський**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПОВЕДІНКА ДРУГОГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З РОЗРИВНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ В КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

У роботі досліджується питання стійкості та нестійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з пуассонівськими збуреннями і нескінченною післядією в критичному випадку.

The problem of stability and destability in the mean square of the trivial solution of the stochastic functional differential equations systems with Poisson switchings and infinite aftereffect is investigated in the critical case.

Питання стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з пуассонівськими збуреннями у випадку скінченної післядії розглядалися в багатьох працях, зокрема в [2—4, 6, 8]. Аналогічні дослідження для випадку нескінченної післядії були проведені в праці [11] для детермінованих функціонально-диференціальних систем. Деякі аспекти теорії стійкості стохастичних функціонально-диференціальних систем із нескінченною післядією розглядалися в [7, 9, 10, 12—14]. У даній статті досліджується питання стійкості та нестійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь із пуассонівськими збуреннями та нескінченною післядією в критичному випадку. Подібні рівняння у випадку скінченної післядії розглядались у [8].

Нехай $(\Omega, F, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір, $\{F_t, t \geq 0\}$ — потік σ-алгебр, $F_t \subset F$; $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{D}_n \equiv \mathbb{D}([-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ — простір обмежених кусково-неперервних на $[-\infty, 0]$ функцій $\{\varphi(s),\ s \in [-\infty, 0]\}$, зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, неперервних справа при $s < 0$, які мають лівосторонні границі при $s = 0$, з нормою

$$\|\varphi\|_0 = \sup_{-\infty \leq s \leq 0} |\varphi(s)|;$$

$\mathfrak{N}_1$ — множина неперервних на $[0, \infty)$ детермінованих дійсних функцій $\{\alpha(t)\} \subset \mathbb{R}^1$ таких, що

$$\int_0^\infty \|2\alpha(t) + \alpha^2(t)\| dt < \infty;$$

$\mathfrak{N}_2$ — множина неперервних на $[0, \infty)$ додатних скалярних функцій $\{\beta(t) \geq 0\}$, для яких

$$\int_0^\infty (2\beta(t) + \beta^2(t)) dt < \infty;$$

$\{x_t \equiv x(t+\theta), -\infty < \theta \leq 0\} \in \mathbb{D}_n$, $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}^n$.

Розглянемо стохастичну динамічну систему Іто-Скорохода з післядією вигляду

$$dx(t) = a(x_t)dt + [I + B_1(t)]dW(t)b(x_t) + \\ + \int_U [I + B_2(t)] g(x_t, u) \tilde{\nu}(dt, du) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\infty, 0], \qquad (2)$$

де $\varphi(s) \in \mathbb{D}_n$, $a : \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n$, $b : \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{D}_n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ — лінійні неперервні функціонали, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, $I = \operatorname{diag}\{1, 1, ..., 1\}$, $B_i(t) = \operatorname{diag}\{b_{i1}(t), ..., b_{in}(t)\}$,

$$b_{ij}(t) \in \mathfrak{N}_1 \cup \mathfrak{N}_2; i = 1, 2; j = \overline{1, n};$$

матриця $W(t) = \{w_{lj}(t)\}$, $l,j = \overline{1,n}$, складається з однорідних попарно незалежних вінерівських процесів [2]; $\tilde{\nu}(t,A)$ — центрована пуассонівська міра з параметром $t\Pi(A)$ [4], при цьому $\{w_{lj}(t)\}$ і $\tilde{\nu}(t,A)$ попарно незалежні.

Для задачі (1), (2) існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок, який має скінченний момент другого порядку на $[0,T]$, $T>0$ [3].

Фундаментальний розв'язок рівняння

$$dy(t) = a(y_t)dt, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

позначимо через $h(t)$; $h(0)=I$, $h(s)\equiv 0$ для $s\in(-\infty,0]$,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t}\Lambda^{-1}(\lambda)d\lambda$$

для $t>s>0$, де $\Lambda(\lambda) = \lambda I - Ia(e^{\lambda s})$, а Γ — контур, який охоплює всі нулі функції $\det\Lambda(\lambda)=0$ [6].

Теорема. *Нехай*

1) тривіальний розв'язок рівняння (3) експоненціально стійкий;

2) матриця

$$Q \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \Bigg[(\Lambda^{-1}(it))_+^{②}(b(e^{its}))_+^{②} +$$

$$+\int\limits_U (\Lambda^{-1}(it))_+^{②}(g(e^{its},u))_+^{②}\frac{du}{|u|^{n+1}}\Bigg]dt$$

має корінь Перрона, який дорівнює одиниці ($r(Q)=1$).

Тоді:

I) тривіальний розв'язок системи (1), (2) стійкий у середньому квадратичному, якщо елементи матриці $B_{\max}(t) = \max\{B_i(t)\}$ належать до $\mathfrak{N}_1$ і монотонно спадають;

II) $\{x(t)\}\equiv 0$ нестійкий в середньому квадратичному, якщо елементи матриці $B_{\min}(t)=\min\{B_i(t)\}$ належать до $\mathfrak{N}_2$ і монтонно зростають.

Зауваження. ② означає, що кожен елемент матриці або вектора піднесений до квадрату; "+— елементи матриці беруться за модулем. Під $\max\{B_i(t)\}$ розуміємо нижню межу матриць-функцій $B(t)$ таких, що

$$B_i(t)\leq B(t), \quad i=1,2, \quad \forall\, t\geq 0;$$

$\min\{B_i(t)\}$ — верхня межа матриць-функцій $B(t)$, для яких $B(t)\leq B_i(t)$ для довільного $t\geq 0$.

Доведення. I) Доведемо стійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку задачі (1), (2) у випадку $r(Q)=1$. Використовуючи фундаментальний розв'язок рівняння (3), можна від задачі (1), (2) перейти до інтегрального рівняння [8]

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t h(t-\tau)[I+B_1(\tau)]dW(\tau)b(x_\tau) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_U h(t-\tau)[I+B_2(\tau)]g(x_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du),$$

$$t\geq 0, \tag{4}$$

де $y(t)$ — розв'язок рівняння (3), який задовольняє умову (2).

Застосовуючи до обох частин рівнянь (4) відповідно оператори $[I+B_1(t)]b(\cdot)$ і $[I+B_2(t)]g(\cdot,u)$, підносячи обидві частини одержаних рівнянь до квадрату, інтегруючи друге рівняння за $u\in U$ з ваговою функцією $\frac{1}{|u|^{n+1}}$, обчислюючи математичне сподівання $\mathbb{E}\,(\cdot)$ і додаючи одержані рівності, отримаємо

$$m(t) = f(t) + \int\limits_0^t \Bigg[(I+B_1(t))b^{②}(h_{t-\tau}) +$$

$$+(I+B_2(t))\int\limits_U g^{②}(h_{t-\tau},u)\frac{du}{|u|^{n+1}}\Bigg]m(\tau)d\tau,$$

$$t\geq 0, \tag{5}$$

де

$$m(t) = (I+B_1(t))^{②}\mu_b(t) +$$

$$+(I+B_2(t))^{②}\int\limits_U \mu_g(t,u)\frac{du}{|u|^{n+1}},$$

$$f(t) = (I + B_1(t))^{②} b^{②}(y_t) +$$
$$+(I + B_2(t))^{②} \int\limits_U g^{②}(y_t, u) \frac{du}{|u|^{n+1}},$$

$$\mu_b(t) = \mathbb{E}\{b^{②}(x_t)\}, \quad \mu_g(t,u) = \mathbb{E}\{g^{②}(x_t, u)\}.$$

Нехай $B_i(t) \in \mathfrak{N}_1$, $i = 1, 2$, й елементи даних матриць монотонно спадають. Доведемо спочатку обмеженість $m(t)$. Для цього покажемо обмеженість $\tilde{m}(t)$ як розв'язку системи

$$\tilde{m}(t) = f(t) +$$
$$+ \int\limits_0^t [I + B_{\max}(t)]^{②} k(t-s)\tilde{m}(s) ds, \qquad (6)$$

де

$$k(t) = b^{②}(h_t) + \int\limits_U g^{②}(h_t, u) \frac{du}{|u|^{n+1}}.$$

Розв'язки рівнянь (5), (6) пов'язані нерівністю $m(t) \le \tilde{m}(t)$, а $\{f(t)\}$ і $\{k(t)\}$ задовольняють згідно з умовою 1) теореми нерівність

$$\|f(t)\| + \|k(t)\| \le N \exp(-\varepsilon t), \quad \forall\, t \ge 0, \quad (7)$$

де $N > 0$, $\varepsilon > 0$.

Використовуючи пряме перетворення Лапласа [5] і повертаючись до оригіналу, рівняння (6) можна записати в такому вигляді

$$\tilde{m}(t) = f(t) + \int\limits_0^t H(t-\tau) f(\tau) d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t H(t-\tau) B^*(\tau) \tilde{m}(\tau) d\tau, \qquad (8)$$

де

$$B^*(\tau) = \operatorname{diag}\{2b_{\max,1}(\tau) + b^2_{\max,1}(\tau), \dots,$$
$$2b_{\max,n}(\tau) + b^2_{\max,n}(\tau)\},$$

$$H(t) = k(t) + \int\limits_0^t k(t-\tau)k(\tau) d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau k(t-\tau)k(\tau-\tau_1) d\tau d\tau_1 + \dots$$

З умови 2) теореми одержуємо, що

$$H(t) = A + \Delta(t),$$

де A — матриця розмірності $n \times n$ з додатними елементами, а елементи $\{\delta_{ij}(t)\}$ матриці $\{\Delta(t)\}$ — неперервні функції на $[0, \infty)$ такі, що

$$\lim_{t\to\infty} \delta_{ij}(t) = 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (9)$$

З урахуванням (9) одержимо, що

$$\tilde{m}(t) \le M + L \int\limits_0^t \|B^*(\tau)\| \tilde{m}(\tau) d\tau, \quad \forall\, t \ge 0,$$

де

$$M = \sup_{t\ge 0} \int\limits_0^t H(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad L = \sup_{t \ge 0} H(t).$$

Застосовуючи лему Гронуолла-Беллмана [1], можна записати нерівність

$$\tilde{m}(t) \le M \exp\left\{ L \int\limits_0^t \|B^*(\tau)\| d\tau \right\}, \quad \forall\, t \ge 0.$$

Якщо $B_i(t) \in \mathfrak{N}_1$, $i = 1, 2$, тоді

$$\int\limits_0^\infty \|B^*(\tau)\| d\tau < \infty$$

і, отже, $\sup\limits_{t\ge 0} \|\tilde{m}(t)\| < \infty$, а значить і $\sup\limits_{t \ge 0} \|m(t)\| < \infty$.

З (4) можна одержати співвідношення для других моментів розв'язку вихідного рівняння (1), (2)

$$\mu(t) = y^{②}(t) +$$
$$+ \int\limits_0^t h^{②}(t-\tau)[I + B^*(\tau)] m(\tau) d\tau, \qquad (10)$$

де $t \ge 0$, $\mu(t) = \mathbb{E}\{x^{②}(t)\}$.

Згідно з умовою 1) теореми одержуємо нерівність

$$\|y^{②}(t)\| + \|h^{②}(t)\| \le R\exp\{-\beta t\}, \quad \forall\, t \ge 0,$$

$R > 0$ і $\beta > 0$.

Враховуючи, що $\sup\limits_{t\ge 0}\|m(t)\| < \infty$ і $\int\limits_0^{\infty}\|B^*(\tau)\|d\tau < \infty$, одержимо, що $\sup\limits_{t\ge 0}\|\mu(t)\| < \infty$.

Це доводить першу частину теореми, оскільки початкові функції $\varphi(s) \in K$ є довільними, а стійкість у середньому квадратичному розв'язку лінійних систем еквівалентна обмеженості в середньому квадратичному кожного розв'язку [7].

II) Доведемо нестійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку задачі (1), (2) у критичному випадку $r(Q) = 1$.

Покладемо $B_i(t) \in \mathfrak{N}_2$, $i = 1, 2$. Для побудови розв'язку $y(t)$ рівняння (3) візьмемо функцію $\varphi(s) \in \mathbb{D}_n$ таку, що

$$\int\limits_0^{\infty} f(t)dt > \bar{0}, \tag{11}$$

де $f(t) = b^{②}(\theta_t y)$ (співвідношення (11) виконується внаслідок умови 2)).

Для доведення можна розглянути рівняння

$$\tilde{\tilde{m}}(t) = f(t) + \int\limits_0^t [I + B_{\min}(t)]^{②} k(t-\tau)\,\tilde{\tilde{m}}(\tau)d\tau, \tag{12}$$

розв'язок якого задовольняє нерівність $\tilde{\tilde{m}}(t) \le m(t)$.

Покажемо, що $\lim\limits_{t\to\infty}\|\,\tilde{\tilde{m}}(t)\| = \infty$.

Зауважимо, що рівняння (12) еквівалентне такому інтегральному рівнянню

$$\tilde{\tilde{m}}(t) = f(t) + \int\limits_0^t H(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t H(t-\tau)B^*(\tau)\,\tilde{\tilde{m}}(\tau)d\tau, \tag{13}$$

де $B^*(t)$ і $H(t)$ визначені вище.

Виходячи із співвідношень (7), (9) і (11), можна одержати нерівність

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t H(t-\tau)f(\tau)d\tau > \bar{0},$$

тому

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\int\limits_0^t H(t-\tau)B^*(\tau)\times \left[\int\limits_0^{\tau} H(\tau-\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1\right]d\tau\right\| = \infty. \tag{14}$$

Співвідношення (14) випливає з

$$\int\limits_0^{\infty}\|B^*(\tau)\|d\tau = \infty.$$

Неважко показати, що

$$\tilde{\tilde{m}}(t) \ge \int\limits_0^t H(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int\limits_0^t H(t-\tau)B^*(\tau)\left[\int\limits_0^{\tau} H(\tau-\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1\right]d\tau, \quad \forall\, t \ge 0.$$

Отже, згідно з (13),

$$\lim_{t\to\infty}\|\,\tilde{\tilde{m}}(t)\| = \infty,$$
$$\lim_{t\to\infty}\|m(t)\| = \infty. \tag{15}$$

Співвідношення (10) і (15) приводять до $\lim\limits_{t\to\infty}\|\mu(t)\| = \infty$, що й доводить теорему.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— К.: Наук. думка, 1969.— 354 с.

3. *Гихман И.И., Кадырова И.И.* Некоторые результаты исследования стохастических дифференциальных уравнений // В кн.: Теория случайных процессов. Т.1.— К.: Наук. думка, 1973.— С.51—68.

4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.— К.: Наук. думка, 1982.— 567 с.

5. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования.— М.: Наука, 1969.— 367 с.

6. *Слюсарчук В.Е., Ясинский В.К.* Устойчивость решений линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений в критическом случае.— Рукоп. деп. в ВИНИТИ.— 31.03.1977.— N 1236-77 ДЕП.

7. *Юрченко I.В., Ясинська Л.I., Ясинський В.К.* Методи стохастичного моделювання систем.— Чернівці: Вид-во "Прут", 2002.— 416 с.

8. *Ясинская Л.И.* Устойчивость линейных функционально-дифференциальных систем с разрывными траекториями в критическом случае.— Рукоп. деп. в ВИНИТИ.— 30.06.1982.— N 3667-82 ДЕП.

9. *Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.— Снятин: Над Прутом, 1996.— 448 с.

10. *Ясинский И.В., Ясинский В.К.* Лекции по теории стохастического моделирования: Частина 4. Стохастические динамические системы с бесконечным последействием.— Черновцы: Зеленая Буковина, 2000.— 160 с.

11. *Азбелев Н.В., Рахматулина Л.Ф.* Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения.— 1978.— **24**, N 5.— С.771—797.

12. *Ясинський В.К., Антонюк С.В.* Поведінка другого моменту розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з пуассонівськими збуреннями // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика.— 2003.— Вип.160.— С.111—117.

13. *Ясинская Л.И., Антонюк С.В.* Устойчивость в среднем квадратическом линейных сингулярных стохастических дифференциально-функциональных уравнений с неограниченным последействием // 2nd International Conference "Aplimat" (Bratislava, February 5—7, 2003).— Bratislava, 2003.— С.719—724.

14. *Ясинский В.К., Антонюк С.В.* Устойчивость в среднем квадратическом решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений со всей предисторией // 2nd International Conference "Aplimat" (Bratislava, February 5—7, 2003).— Bratislava, 2003.— С.725—732.

Стаття надійшла до редколегії 23.06.2003