УДК 519.21

©2003 р. В.К. Ясинський, С.В. Антонюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

# ПОВЕДІНКА ДРУГОГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Одержано необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості та достатні умови необмеженості в середньому квадратичному тривіального розв'язку рівнянь Іто-Скорохода з необмеженою післядією з урахуванням пуассонівських збурень.

The necessary and sufficient conditions of asymptotic stability and sufficient conditions of unboundedness in the mean square is obtained for trivial solution of Ito-Skorokhod equations with infinite aftereffect and Poisson disturbances.

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbb{P})$ з потоком $\sigma$-алгебр $\{F_t, t \in [0,T]\}$, $F_0 \subset F$; $\mathbb{R}$ — дійсний одновимірний евклідовий простір з нормою $|x|$ елемента $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_T$ — простір Скорохода функцій $\{\varphi(\theta)\}$, $-\infty < \theta \leq T$ зі значеннями в $\mathbb{R}$, які мають у кожній точці області $(-\infty, T]$ границі зліва і справа й неперервні справа, причому при $\theta \to -\infty$ також існує границя [1].

Випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}$ визначений для $t \geq 0$ стохастичним функціонально-диференціальним рівнянням Іто-Скорохода [1], [2], [5]

$$dx(t) = a(x_t)dt + b(x_t)dw(t) + \int\limits_{\mathbb{R}} g(x_t, u)\tilde{\nu}(dt, du), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad \forall\, t \in (-\infty, 0], \tag{2}$$

де $\varphi(t) \in \mathbb{D}_T$; надалі всю траєкторію процесу $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}$ до моменту $t$ будемо позначати $x_t \equiv \{x(t+\theta), -\infty < \theta \leq 0\}$; $\{w(t) \equiv w(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}$ — вінерівський процес; $\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - t\Pi(A)$, $A \subset \mathbb{R}$ — центрована пуассонівська міра в $\mathbb{R}$ з параметром $t\Pi(A) = M\{\nu(t,A)\}$, при цьому $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{\nu}(t,A)\}$ попарно незалежні та $F_t$-вимірні при $t > 0$. $\{a(\varphi,\omega)\}$, $\{b(\varphi,\omega)\}$, $\{g(\varphi,u,\omega)\}$ — випадкові функції, що відповідно визначені на $\mathbb{D}\times\Omega$ та $\mathbb{D}\times\mathbb{R}\times\Omega$. Простір $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}_0$ будемо вважати метричним з метрикою $\rho_{\mathbb{D}}$ простору Скорохода функцій без розривів другого роду [4; розд.VI, §5].

Щоб спростити розгляд поведінки випадкових процесів $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}$ без розривів другого роду, розглянемо більш просту метрику, яка породжується напівнормою

$$\|\varphi\| = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{0} |\varphi(\theta)|^2 K(d\theta) \right\}^{1/2}, \tag{3}$$

де $K(\cdot)$ — деяка скінченна міра, що визначена на борелівських множинах на півпрямій $(-\infty, 0]$; $K(-\infty, 0) = K < \infty$ [1], [5].

**Означення.** *Під розв'язком стохастичного функціонально-диференціального рівняння (1) з початковою умовою (2) будемо розуміти сепарабельний процес $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}$, визначений при $t \in (-\infty, 0]$ співвідношенням (2), вимірний відносно $\sigma$-алгебри $F_t \times L_t$ ($L_t$ — $\sigma$-алгебра борелевих множин на $(-\infty, t]$) і такий, що при кожному $t \in [0, \infty)$:*

$$x(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t a(x_s)ds + \int\limits_0^t b(x_s)dw(s) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} g(x_s, u)\tilde{\nu}(ds, du) \tag{4}$$

*з імовірністю одиниця.*

Позначимо через $H_1$ [1], [5] простір випадкових процесів $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}$ такий, що $\{x(t)\}$ узгоджений з $\{F_t, t \in [0,T]\}$, вибіркові функції процесу $\{x(t)\}$ з імовірністю одиниця належать $\mathbb{D}_T$, і з нормою

$$\|x(t)\|_2 \equiv \{ \sup_{0\le t\le T} M\{|x(t)|^2\}\}^{1/2} < \infty. \quad (5)$$

Через $H_0$ позначимо простір $F_0$-вимірних функцій $\varphi : (-\infty, 0] \times \Omega \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|\varphi\|_0 \equiv \{ \sup_{-\infty<\theta\le 0} M\{|\varphi(\theta)|^2\}\}^{1/2}. \quad (6)$$

Припустимо, що $a, b : \mathbb{D} \times \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{D}\times\mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$ вимірні за сукупністю змінних і для довільних $\varphi, \psi \in \mathbb{D}$:

$$|a(\varphi)|^2 + |b(\varphi)|^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} |g(\varphi,u)|^2 \Pi(du) \le$$

$$\le \int\limits_{-infty}^{0} (1 + |\varphi(\theta)|^2) dK(\theta), \quad (7)$$

$$|a(\varphi) - a(\psi)|^2 + |b(\varphi) - b(\psi)|^2 +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} |g(\varphi,u) - g(\psi,u)|^2 \Pi(du) \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 dK(\theta). \quad (8)$$

Тоді з [1; теорема 3, с.186—190, теорема 4, с.191-193], [5; теорема 6.2.1, с.184—186] випливає, що для довільного $\varphi \in \mathbb{D}$ існує єдиний розв'язок $\{x(t)\}$ з $\mathbb{D}_T$ задачі (1), (2) з точністю до стохастичної еквівалентності такий, що

$$M\{ \sup_{0\le s\le T} |x(s)|^2 \,|\, F_t\} \le A(1 + \|\varphi\|_0^2),$$

$$M\{ \sup_{t\le s\le t+h} |x(s) - x(t)|^2 \,|\, F_t\} \le B(1 + \|\varphi\|_0^2)h,$$

де $A, B$ — сталі, які залежать тільки від $T$ і $K$.

Позначимо через $\mathfrak{M}_1^T$ і $\mathfrak{M}_2^T$ простори випадкового процесу $f_1(t)$ і випадкової функції $f_2(t,u)$, вимірних при $t \in [0,T]$ і $u \in \mathbb{R}$ відносно сімейства $\{F_t\}$, відповідно такі, що

$$\int\limits_0^T M\{|f_2(t)|^2\} dt < \infty,$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{M|f_2(t_2,u)|^2}{|u|^2} du dt < \infty,$$

$\mathfrak{N}_T \equiv \mathfrak{M}_1^T \vee \mathfrak{M}_2^T$.

Припускаємо, що власні значення твірного оператора півгрупи розв'язків рівняння

$$dy(t) = a(y_t)dt \quad (9)$$

лежать у лівій півплощині. Розглянемо випадковий процес

$$z(t) = \int\limits_0^t h_1(t,\tau) g_1(\tau) dw(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} h_2(t,\tau) g_2(\tau,u) \tilde{\nu}(d\tau, du), \quad (10)$$

де $g_1 \in \mathfrak{M}_1^T$, $g_2 \in \mathfrak{M}_2^T$, $\{h_i(t,\tau)\}$, $\left\{\dfrac{dh_i(t,\tau)}{dt}\right\}$, $i = 1, 2$, визначені й неперервні за сукупністю змінних $(t \ge \tau \ge 0)$.

Згідно з [2], якщо $\{g_1(t) \equiv g_1(t,\omega)\}$, $\{g_2(t,u)\} \equiv \{g_2(t,u,\omega)\}$ — неперервні майже скрізь випадкові процеси й вони належать простору $\mathfrak{N}_T$, то випадковий процес $\{z(t) \equiv z(t,\omega)\}$ має стохастичний диференціал

$$dz(t) = \left[ \int\limits_0^t \frac{dh_1(t,\tau)}{dt} g_1(\tau) dw(\tau) \right] dt +$$

$$+ \left[ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dh_2(t,\tau)}{dt} g_2(t,u) \tilde{\nu}(d\tau, du) \right] dt +$$

$$+ h_1(t,t) g_1(t) dw(t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} h_2(t,t) g_2(t,u) \tilde{\nu}(dt, du).$$

Назвемо фундаментальним розв'язком рівняння (9) розв'язок, побудований за початковою функцією $\varphi(\theta) = 0$ при $\theta \in (-\infty, 0)$, $\varphi(0) = 1$ і позначимо його через $h(t)$. Тоді $h(t) = 0$ при $t < 0$, $h(0) = 1$ при $t = 0$ і при $t > 0$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

де $V(\lambda) = \lambda - a(e^{\lambda\theta})$ — квазіполіном рівняння (9), а $\Gamma$ — контур, що охоплює всі корені рівняння $V(\lambda) = 0$ [6].

**Лема.** *Розв'язок задачі (1), (2) з використанням $\{h(t)\}$ можна подати у вигляді*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_0^t h(t-\tau) b(x_\tau) dw(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} h(t-\tau) g(x_\tau, u) \tilde{\nu}(d\tau, du), \qquad (11)$$

*де $\{y(t)\}$ — розв'язок (9), побудований за $\{\varphi(\theta)\}$.*

**Доведення.** Випадковий процес, що задається виразом (11), має, згідно з вищенаведеним, стохастичний диференціал вигляду

$$dx(t) = dy(t) + b(x_t) dw(t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}} g(x_t, u) \tilde{\nu}(dt, du) +$$

$$+ \Big[ \int\limits_0^t \frac{dh(t-\tau)}{dt} b(x_\tau) dw(\tau) \Big] dt +$$

$$+ \Big[ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{dh(t-\tau)}{dt} g(x_\tau, u) \tilde{\nu}(d\tau, du) \Big] dt,$$

який збігається з (1).

Дійсно, за означенням фундаментального розв'язку

$$\frac{dh(t-\tau)}{dt} = a(h_{t-\tau}(\theta)).$$

Згідно з лінійністю оператора $a(\cdot)$, одержимо

$$\int\limits_0^t \frac{dh(t-\tau)}{dt} b(x_\tau) dw(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_R \frac{dh(t-\tau)}{dt} g(x_\tau, u) \tilde{\nu}(d\tau, du) =$$

$$= a \Big[ \int\limits_0^t h(t-\tau) b x_\tau dw(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_R h(t-\tau) g(x_\tau, u) \tilde{\nu}(d\tau, du) \Big] =$$

$$= a(x_t - y_t),$$

що й доводить лему.

Одержимо необхідні і достатні умови належності розв'язку рівняння (1) простору $\mathfrak{N}_\infty$.

**Теорема 1.** *Необхідною і достатньою умовою належності простору $\mathfrak{N}_\infty$ будь-якого лінійного оператора $f(x_t)$, $f(x_t, u)$ : $D_T \to R$, $D_T \times R \to R$ для довільних $t \in [0, \infty)$ і $u \in R$, які визначені на $x_t \in \mathbb{D}$, є виконання нерівності*

$$B \equiv \int\limits_0^\infty [b(h_t)]^2 dt + \int\limits_0^\infty \int\limits_R \frac{[g(h_t, u)]^2}{|u|^2} du dt < 1, \qquad (12)$$

де $\{x(t)\}$ — розв'язок задачі (1), (2).

**Доведення**. **Необхідність.** Якщо $f(\cdot) \in \mathfrak{N}_\infty$, $f(\cdot, u) \in \mathfrak{N}_\infty$, то $b(x_t) \in \mathfrak{N}_\infty$ і $g(x_t, u) \in \mathfrak{N}_\infty$.

Зрозумілим є перехід від (1) до рівнянь

$$b(x_t) = b(y_t) + \int\limits_0^t b(h_{t-\tau}) b(x_\tau) dw(\tau) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_R b(h_{t-\tau}) g(x_\tau, u) \tilde{\nu}(d\tau, du),$$

$$g(x_t, u) = g(y_t, u) + \int\limits_0^t g(h_{t-\tau}, u) b(x_\tau) dw(\tau) +$$

$$+\int_0^t\int_R g(h_{t-\tau},u)g(x_\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du),$$

Підносячи обидві частини цих рівнянь до квадрату, застосувавши операцію математичного сподівання і використовуючи властивості стохастичних інтегралів [7], можна одержати

$$\mu_b(t)=[b(y_t)]^2+\int_0^t[b(h_{t-\tau})]^2\mu_b(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{R}}[b(h_{t-\tau})]^2\mu_g(\tau,u)\frac{dud\tau}{|u|^2}, \qquad (13)$$

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u_1)}{|u_1|^2}du_1=\int_{\mathbb{R}}\frac{[g(y_t,u_1)]^2}{|u_1|^2}du_1+$$

$$+\int_{\mathbb{R}}\int_0^t[g(h_{t-\tau},u_s)]^2\frac{\mu_b(\tau)du_1d\tau}{|u_1|^2}+$$

$$+\int_{\mathbb{R}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\frac{[g(h_{t-\tau},u_s)]^2}{|u_1|^2}\mu_g(\tau,u)\frac{dud\tau du_1}{|u|^2}, \qquad (14)$$

де

$$\mu_b(t)\equiv M\{[b(x_t)]^2\},\mu_g(t,u)\equiv M\{[g(x_t,u)]^2\}.$$

Інтегруючи (7),(8) за $t$ від 0 до $\infty$, змінюючи порядок інтегрування й додаючи їх, одержимо

$$\int_0^\infty\mu_b(t)dt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt>$$

$$>B\Big[\int_0^\infty\mu_b(t)dt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt\Big],$$

що й доводить необхідність.

**Достатність.** Після інтегрування (13) і (14) за $t$ від 0 до $\infty$, одержимо

$$\int_0^\infty\mu_b(t)dt=\frac{1}{1-B}\Big\{\int_0^\infty[b(y_t)]^2dt\times$$

$$\times\Big(1-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{[g(h_t,u)]^2dudt}{|u|^2}\Big)+$$

$$+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{[g(y_t,u)]^2}{|u|^2}dudt\int_0^\infty[b(h_t)]^2dt\Big\};$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt=\frac{1}{1-B}\Big\{\Big(1-\int_0^\infty[b(h_t)]^2dt\times$$

$$\times\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{[g(y_t,u)]^2}{|u|^2}dudt+$$

$$+\int_0^\infty[b(y_t)]^2dt\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{[g(h_t,u)]^2}{|u|^2}dudt\Big\},$$

де $B$ визначено у (12).

Нехай виконується умова (12) ($B<1$), тоді з одержаних рівностей випливає, що $b(x_t)\in\mathfrak{N}_\infty$ і $g(x_t,u)\in\mathfrak{N}_\infty$. Аналогічно (13), (14) можна виписати для довільної функції $f\in\mathfrak{N}_\infty$ співвідношення

$$\int_0^\infty\mu_f(t)dt=\int_0^\infty[f(y_t)]^2dt+$$

$$+\int_0^\infty[f(h_t)]^2dt\int_0^\infty\mu_b(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty[f(h_\tau)]^2dt\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt, \qquad (15)$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_f(t,u)}{|u|^2}dudt=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{[f(y_t,u)]^2}{|u|^2}dudt+$$

$$+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{[f(h_t,u)]^2}{|u|^2}dudt\int_0^\infty\mu_b(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{[f(h_t,u)]^2}{|u|^2}dudt\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt. \qquad (16)$$

Згідно з припущенням, усі інтеграли справа існують, тому $\mu_f(t) \in L_1(0,\infty)$. Звідси випливає, що $f(\cdot) \in \mathfrak{N}_\infty$, $f(\cdot,u) \in \mathfrak{N}_\infty$ для всіх $u \in \mathbb{R}$. Теорема 1 доведена.

**Наслідок 1.** *При виконанні умов теореми 1 тривіальний розв'язок задачі (1), (2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному.*

**Доведення.** При виконанні припущення для довільного розв'язку $\{y(t)\}$ рівняння (9), побудованого за початковою функцією $\{\varphi(\theta)\}$, виконується нерівність

$$|y(t)| \leq Ne^{-\beta t}\|\varphi\|_2, \quad N>0, \quad \beta>0.$$

Отже, з (13) і (14) випливає, що

$$\int\limits_0^\infty \mu_b(t)dt \leq \frac{N^2\|b\|^2\|\varphi\|_2^2}{2\beta(1-B)}\times$$

$$\times\Bigg\{\Bigg(1-\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{[g(h_t,u)]^2}{|u|^2}dudt\Bigg)+$$

$$+\frac{N^2|y|^2\|\varphi\|_2^2}{2\beta}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{du}{|u|^2}\Bigg\};$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt \leq \frac{N^2\|g\|^2\|\varphi\|_2^2}{2\beta(1-B)}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{du}{|u|^2}\Bigg\{\Bigg(1-\int\limits_0^\infty[b(h_t)]^2dt\Bigg)+N^2\|b\|^2\|\varphi\|_2^2\Bigg\}.$$

З (16) неважко одержати нерівність

$$M\{x^2(t)\} \leq N^2e^{-2\beta t}\|\varphi\|_2^2|h(t)|\int\limits_0^\infty\mu_b(t)dt+$$

$$+\|h_t\|_2\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt.$$

Звідси випливає стійкість у середньому квадратичному.

Доведемо, що для довільних $f(\cdot), f(\cdot,u) \in D_T$

$$\lim_{t\to\infty}\mu_f(t)=0, \quad \lim_{t\to\infty}\mu_f(t,u)=0, \qquad (17)$$

для довільного $u \in \mathbb{R}$.

З (15) і (16) випливає нерівність

$$\mu_f(t) \leq N^2\|f\|^2e^{-2\beta t}\|\varphi\|_2^2+$$

$$+\|f\|^2|h(t)|^2\Bigg\{\int\limits_0^\infty\mu_b(t)dt+\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}dudt\Bigg\}.$$

Оскільки $\mu_b(t) \in L_1[0,\infty)$ і $\mu_g(t,u) \in L_1[0,\infty)$ для довільних $u \in \mathbb{R}$, тоді справджуються співвідношення (11), а отже,

$$\lim_{t\to\infty}M\{x^2(t)\}=0.$$

Наслідок 1 доведено.

**Теорема 2.** *Якщо $B=1$, то в довільному околі нуля знайдеться така початкова функція, що $\lim\limits_{t\to\infty}M\{x^2(t)\}\neq 0$ .*

**Доведення.** Візьмемо за початкову функцію

$$\varphi(\theta)=\begin{cases}0, & t\in(-\infty,0),\\ \delta, & \theta=0.\end{cases}$$

Тоді $y(t)=\delta h(t)$ — розв'язок (9) і

$$\mu_b(t)=\delta^2[b(h_t)]^2+\int\limits_0^t[b(h_{t-\tau})]^2\mu_b(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}[b(h_{t-\tau})]^2\frac{\mu_g(\tau,u)}{|u|^2}dud\tau;$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2}du=\delta^2\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{[g(h_t,u)]^2}{|u|^2}du+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{[g(h_{t-\tau},u)]^2}{|u|^2}\mu_b(\tau)dud\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{[g(h_{t-\tau},u_1)]^2}{|u_1|^2}\frac{\mu_g(\tau,u)}{|u|^2}du_1dud\tau.$$

Застосувавши перетворення Лапласа [3] до одержаних рівнянь, легко виписати зображення

$$\mu_b(\lambda)=\frac{\delta^2H_b(\lambda)}{1-H_b(\lambda)-H_g(\lambda)};$$

$$M_g(\lambda) = \frac{\delta^2 H_g(\lambda)}{1 - H_b(\lambda) - H_g(\lambda)},$$

де

$$M_b(\lambda) = L\{\mu_b(t)\}; \quad H_b(\lambda) = L\{[b(h_t)]^2\},$$

$$M_g(\lambda) = L\left\{\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mu_g(t,u)}{|u|^2} du\right\};$$

$$H_g(\lambda) = L\left\{\frac{[g(h_t,u)]^2}{|u|^2} du\right\}.$$

Зауважимо, що $\{M_b(\lambda)\}$, а також $\{M_g(\lambda)\}$ має полюс у точці $\lambda = 0$, а решта полюсів знаходиться в півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$, тоді оригінал $\{\mu_b(t)\}$ (аналог $\{\mu_g(t)\}$) можна подати у вигляді $P(t) + e^{-\beta t}Q(t)$, де $P(t)$ — многочлен, $Q(t)$ — обмежена функція і $\beta > 0$. Отже, $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_b(t)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_g(t)$ існують. Оскільки $\{H_b(\lambda)\}$ і $\{H_g(\lambda)\}$ — аналітичні функції в точці $\lambda = 0$, то можливі наступні зображення [3]:

$$H_b(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \lambda^t, \quad 0 \le \alpha_0 = \int\limits_0^{\infty} [b(h_t)]dt \le 1,$$

$$\alpha_1 = -\int\limits_0^{\infty} t[b(h_t)]^2 dt < \infty,$$

$$\alpha_i = \frac{1}{i!} H^{(i)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}, \quad i = 2, 3, ...$$

$$H_g(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} b_j \lambda^j,$$

$$0 \le b_0 \le \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{[g(h_t,u)]^2}{|u|^2} du dt \le 1,$$

$$b_1 = -\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{t[g(h_t,u)]^2}{|u|^2} du dt < \infty,$$

$$b_j = \frac{1}{j!} H^{(j)}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}, \quad j = 2, 3, ...$$

Використовуючи відоме граничне співвідношення [3], можна одержати, що

$$\lim_{t\to\infty} \mu_b(t) = \delta^2 \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda H_b(\lambda)}{1 - H_b(\lambda) - H_g(\lambda)} =$$

$$= -\frac{\delta^2 \alpha_0}{\alpha_1 + b_1} \ne 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mu_g(t) = \delta^2 \lim_{\lambda\to 0} \frac{\lambda H_g(\lambda)}{1 - H_b(\lambda) - H_g(\lambda)} =$$

$$= -\frac{\delta^2 b_0}{\alpha_1 + b_1} \ne 0.$$

Якщо $\alpha_0 \ne 0$, $b_0 \ne 0$, тоді перетворитися на нуль може тільки одна з границь, що випливає з умови теореми 2. Припустимо протилежне, тоді з нерівностей $\mu_b(t) \le \|b\| M\{x^2(t)\}$, $\mu_g(t) \le \|g\| M\{x^2(t)\}$ одержимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_b(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \mu_g(t) = 0$, що й доводить теорему 2.

**Теорема 3.** *Якщо $B > 1$, тоді в довільному малому околі нуля знайдеться така початкова функція, що другий момент розв'язку (1), (2) необмежено зростає.*

**Доведення.** Застосувавши $L$-перетворення до (13) і (14), можна одержати, що

$$M_b(\lambda) = \frac{Y_b(\lambda)[1 - H_b(\lambda)] + H_b(\lambda) Y_g(\lambda)}{1 - H_b(\lambda) - H_g(\lambda)},$$

$$M_g(\lambda) = \frac{Y_g(\lambda)[1 - H_b(\lambda)] + H_g(\lambda) Y_b(\lambda)}{1 - H_b(\lambda) - H_g(\lambda)},$$

де

$$Y_b(\lambda) \equiv L\{[b(y_t)]^2\}, Y_g(\lambda) \equiv L\left\{\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(y_t,u)}{|u|^2} du\right\}.$$

Згідно з припущенням,

$$[b(y_t)]^2 \to 0; \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{[g(y_t,u)]^2}{|u|^2} \to 0; [b(h_t)]^2 \to 0;$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{[g(h_t,u)]^2}{|u|^2} \to 0 \qquad t \to \infty.$$

Звідси випливає, що $Y_b(\lambda), Y_g(\lambda), H_b(\lambda)$ і $H_g(\lambda)$ — аналітичні функції в півплощині $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Полюси $H_b(\lambda)$ і $M_g(\lambda)$ можуть з'явитися у правій півплощині тільки при $H_b(\lambda) + H_g(\lambda) = 1$, тобто при виконанні умови

$$f(\lambda) = L\left\{[b(h_t)]^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{[g(h_t,u)]^2}{|u|^2} du\right\} = 1. \tag{18}$$

Під знаком $L$-перетворення у (18) стоїть невід'ємна функція, тому $|P(\lambda)|$ досягає найбільшого значення на дійсній осі. За умовою теореми 3 одержимо, що $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$. Тоді, враховуючи неперервність $\{f(\lambda)\}$ як функції дійсного аргументу, знайдеться таке $\lambda_0 > 0$, при якому $f(\lambda_0) = 1$. А це означає, що $\{M_b(\lambda)\}$ і $\{M_g(\lambda)\}$ мають у правій півплощині хоча б по одному полюсу і відповідні оригінали $\{\mu_b(t)\}$ і $\{\mu_g(t,u)\}$ ведуть себе при $t \to \infty$ як $e^{ct}$, де $c$ — дійсна частина найбільш віддаленого справа зображення. Отже, $\lim_{t\to\infty} \mu_b(t) = \infty$ і $\lim_{t\to\infty} \mu_g(t,u) = \infty$ для довільних $u \in \mathbb{R}$, тоді

$$\lim_{t\to\infty} M\{x^2(t)\} = \infty,$$

що й доводить теорему 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.3.— М.: Наука, 1975.— 496 с.

2. *Ясинская Л.И., Ясинский В.К.* Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом решения стохастических дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, N 1.— С.89—98.

3. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и $z$-преобразования.— М.: Наука, 1969.— 367 с.

4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.1.— М.: Наука, 1972.— 664 с.

5. *Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е.* Управление системами с последействием.— М.: Наука, 1992.— 334 с.

6. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

7. *Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Стохастичні динамічні системи із скінченною післядією.— Чернівці: Прут, 2000.— 560 с.

Стаття надійшла до редколегії 01.10.2002