УДК 517.524

©2003 р. А.К.Прикарпатський, М.І.Копич

Університет гірництва та металургії, Краків, Польща.
Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

КАНОНІЧНО ІНТЕГРОВНА НЕЛІНІЙНА ДИНАМІЧНА СИСТЕМА ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Побудовано нову канонічно інтегровну нелінійну динамічну систему типу Шредінгера, використовуючи потенціал взаємодії δ-подібного типу й схему вторинного квантування. Знайдено нескінченну ієрархію законів збереження в явному вигляді. Для безпосереднього пошуку зображення типу Лакса динамічної системи пропонується застосування градієнтно-голономного методу.

Based on a manyparticle δ-like interaction potential and the second quantization scheme a new Shredinger type canonically integrable dynamical system is constructed. An infinite hierarchy of conservation laws is found in exact form. The gradient-holonomic algorithm is discussed subject to direct searching a Lax type representation supposed to exist for this dynamical system.

1. Дво- і багаточастинкові квантові задачі механіки з потенціалом взаємодії типу δ- Дірака розглянуто в [1]. Років п'ятнадцять назад у [2] інтенсивно вивчалася квантово-механічна система на осі $\mathbf{R}^1$ з N-частинковим гамільтоніаном вигляду:

$$H_N := -\sum_{j=s}^{N} \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \alpha \sum_{j<k=1}^{N} \delta(x_j - x_k) + +i\hbar\beta \sum_{j<k=1}^{N} \delta'(x_j - x_k), \tag{1}$$

де $x_j \in \mathbf{R}$, $j = \overline{1,N}$, $\hbar$– стала Планка і $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ – деякі довільні дійсні параметри. Оператор (1) у вторинно-квантованому зображенні має вигляд

$$\mathbf{H} := \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbf{R}} dx \psi_x^+ \psi_x + +\frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbf{R}} dx \psi^+(x)\psi^+(x)\psi(x)\psi(x) + +\frac{i}{4}\beta \int\limits_{\mathbf{R}} dx (\psi^+(x)\psi^+(x)\psi(x)\psi_x(x) - -\psi_x^+(x)\psi^+(x)\psi(x)\psi(x), \tag{2}$$

де для всіх $x, y \in \mathbf{R}$ оператор $\psi(x)$ і його спряжений $\psi^+(y)$ задовольняють такі співвідношення комутації:

$$[\psi(x), \psi(y)] = 0 = [\psi^+(y), \psi^+(x)]$$

$$[\psi(x), \psi^+(y)] = \hbar\delta(x - y). \tag{3}$$

Використовуючи гамільтоніан (2), можна побудувати наступні еволюційні рівняння Гайзенберга для канонічних полів $\psi(x), \psi^+(x) : \Phi \to \Phi$, $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{d\psi}{dt} := \frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}, \psi] = -\frac{i}{2}\psi_{xx} + i\alpha\psi^+\psi^2 + \beta\psi^+\psi\psi_x$$

$$\frac{d\psi^+}{dt} := \frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}, \psi^+] = \frac{i}{2}\psi_{xx}^+ - i\alpha\psi\psi^+\psi^+ + \beta\psi_x^+\psi^+\psi. \tag{4}$$

Відповідна квазікласична редукція рівнянь (4) одержується при $\hbar \to 0$ і $\frac{i}{\hbar}[\cdot,\cdot] \to \{\cdot,\cdot\}$, де $\{\cdot,\cdot\}$ – стандартна (канонічна) дужка Пуассона на функціональному просторі $M \in W_2^2(\mathbf{R}; \mathbf{C}^2) \ni (\psi, \psi^*)$ при $\hbar \to 0$. Отримана нелінійна динамічна система (4) типу Шредінгера на функціональному многовиді M, як доведено у [2], є цілком інтегровною за Лаксом як у квантовому, так і у квазікласичному випадках.

2. На основі попередніх міркувань природним є узагальнити гамільтоніан (1), додаючи двочастинкову взаємодію δ-типу $H_N \to H_N^\xi$, $\xi \in \mathbf{R}$, де

$$H_N^\xi := \sum_{j=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \alpha \sum_{j<k=1}^{N} \delta(x_j - x_k) +$$

$$+ i\beta\hbar \sum_{j<k=1}^{N} \delta'(x_j - x_k) + \xi\hbar^2 \sum_{j<k=1}^{N} \delta''(x_j - x_k). \tag{5}$$

Відповідне до (5) двічі квантоване зображення задається оператором $\mathbf{H}^\xi : \Phi \to \Phi$, де

$$\mathbf{H}_N^\xi := \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} dx \psi_x^+ \psi_x +$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbf{R}} \psi^+(x)\psi^+(x)\psi(x)\psi(x) +$$

$$+ \frac{i\beta}{4} \int_{\mathbf{R}} dx(\psi^+(x)\psi^+(x)\psi(x)\psi_x(x) -$$

$$- \psi_x^+(x)\psi^+(x)\psi(x)\psi(x)) +$$

$$+ \frac{\xi}{2} \int_{\mathbf{R}} dx(\psi^+(x)\psi_x^+(x)\psi(x)\psi_x(x)). \tag{6}$$

Як результат, можна записати нову динамічну систему типу Шредінгера за допомогою еволюційного рівняння Гайзенберга

$$\psi_t := \frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}^\xi, \psi] = -\frac{i}{2}\psi_{xx} + i\alpha\psi^+\psi^2 +$$

$$+ \beta\psi^+\psi\psi_x - \frac{i\xi}{2}(\psi^+\psi\psi_{xx} + \psi^+\psi_x\psi_x),$$

$$\psi_t^+ := \frac{i}{\hbar}[\mathbf{H}^\xi, \psi] = \frac{i}{2}\psi_{xx}^+ - i\alpha\psi^+\psi^+\psi +$$

$$+ \beta\psi_x^+\psi^+\psi + \frac{i\xi}{2}(\psi_{xx}^+\psi^+\psi + \psi_x^+\psi_x^+\psi), \tag{7}$$

яка має бути цілком інтегровною за Лаксом в обидвох випадках, як у квантовому, так і у квазікласичному ($\hbar \to 0$). Дослідження питання інтегровності буде запропоновано в наступній роботі з використанням градієнтно-голономного алгоритму, розвинутого в [3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Gesztesy F., Holden H.* Journal of Physics // — 1987, — N20, — p.5157.
2. *Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н., Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты // — Київ: Наук. думка, — 1987, — 295с.
3. *Prykarpatsky A., Mykytiuk I.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds // — Netherlands: Kluwer, — 1998, — 560p.

Стаття надійшла до редколегії 14.11.2002