УДК 517.982

©2003 р. М.М.Попов

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

# ВІДТВОРЮВАНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Пропонується новий метод доведення ряду відомих теорем про властивості деяких класичних банахових просторів. Метод грунтується на застосуванні елементарної леми (леми 1), яка дозволяє значно економити більшість доведень, відомих раніше. Одержані також узагальнення теореми І.Лінденштрауса, А.Олевського та А.Пелчиньського про точну відтворюваність системи Гаара та теореми Дж.Бургейна та Г.Розенталя про відсутність знаковкладень простору $L_1$ в $c_0$.

We present a new method to prove a number of the well-known theorems on properties of some classical Banach spaces. It is based on an elementary lemma (Lemma 1) which makes the most of the known proofs more short. Besides, we prove generalizations of the J.Lindenstrauss, A.M.Olevskii and A.Pełczyński theorem on precise reproducibility of the Haar system and the J.Bourgain and H.Rosenthal theorem on the non-existence of sign-embeddings of the space $L_1$ into $c_0$.

**1. Попередні відомості.** Ми використовуємо стандартні поняття та позначення з теорії банахових просторів (див. [5,6]).

Неодноразово ми будемо використовувати лему про близькі базиси [5, с.5] (далі $\{x_n\}$ означає $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$).

**Лема 0.** *Нехай $\{x_n\}$ – нормалізований (тобто $\|x_n\| = 1$) базис (Шаудера) в банаховому просторі $X$ з базисною константою $K$. Нехай $\{y_n\}$ – послідовність векторів з $X$, для якої*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K}.$$

*Тоді $\{y_n\}$ – також базис, еквівалентний базису $\{x_n\}$ (якщо $\{x_n\}$ – базисна послідовність, тобто базис у замиканні своєї лінійної оболонки, то $\{y_n\}$ – також базисна послідовність, еквівалентна $\{x_n\}$).*

Неважко переконатися в тому, що стандартний базис у просторі $c_0$ або $l_p$ з $1 \le p < \infty$ (тобто базис

$$e_n = < \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots >,$$

$n \ge 1$) еквівалентний кожному квазінормалізованому своєму блок-базису (послідовність $\{x_n\}$ називається квазінормалізованою, якщо $0 < \inf\limits_n \|x_n\|$ та $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$). Базис з такою властивістю називається досконало однорідним. Для зручності банахів простір, в якому існує досконало однорідний базис, назвемо також досконало однорідним. М.Ципін [5, с.59; 11] довів, що кожний досконало однорідний банахів простір ізоморфний одному з просторів $c_0$, $l_p$, $1 \le p < \infty$ (хоча цей факт ми не використовуємо).

Через $\mathcal{L}(X, Y)$ ми позначаємо простір усіх лінійних обмежених операторів, які діють з $X$ в $Y$, а через $[x_i : i \in I]$ – замикання лінійної оболонки множини $\{x_i : i \in I\}$.

Запис $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ означає, що базиси $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ еквівалентні.

Системою типу Радемахера на вимірній множині $A \subseteq [0, 1]$ додатної міри будемо називати довільну систему вимірних функцій $\{r_n(A)\}$ з властивостями

(i) $(r_n(A))^2 = \chi_A$ (характеристична функція множини $A$);

(ii) $\int r_n(A) d\mu = 0$ та $\int r_n(A) r_m(A) d\mu = 0$ при $n \neq m$.

Нехай $X$ та $Y$ – банахові простори з квазінормалізованими базисами $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ відповідно. Будемо говорити, що базис $\{x_n\}$ мажорується базисом $\{y_n\}$ ($\{y_n\}$ мажорує

$\{x_n\}$) та записувати: $\{x_n\} \leq \{y_n\}$, якщо існує $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ з $Tx_n = y_n$. Іншими словами, $\{x_n\} \leq \{y_n\}$, якщо із збіжності ряду $\sum\limits_n \alpha_n x_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_n \alpha_n y_n$. Отже, умова $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ рівносильна тому, що $\{x_n\} \leq \{y_n\} \leq \{x_n\}$.

## 2. Основна лема про відтворюваність.

**Лема 1**. *Нехай $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, для якого $\dim\ker T < \infty$; $\{y_n\}$ – нормалізований базис в $Y$; $\varepsilon > 0$ та $n_0$ – натуральне число.*

*а) Для кожного нескінченновимірного підпростору $X_0 \subseteq X$ існують $x_0 \in X_0$ ($\|x_0\| = 1$) та $y_0 = \sum\limits_{i=n_0+1}^{n_1} \alpha_i y_i$ при деяких $n_1 > n_0$ та $\{\alpha_i\}_{i=n_0+1}^{n_1}$ такі, що $\|Tx_0 - y_0\| < \varepsilon$.*

*б) Для кожної слабко збіжної до нуля послідовності $\{x_n\} \subseteq X$ існують $x_j \in \{x_n\}$ та $y_0 = \sum\limits_{i=n_0+1}^{n_1} \alpha_i y_i$ при деяких $n_1 > n_0$ та $\{\alpha_i\}_{i=n_0+1}^{n_1}$ такі, що $\|Tx_j - y_0\| < \varepsilon$.*

**Доведення**. Нехай $X_1 = T^{-1}([y_i : i > n_0])$. Оскільки $\dim\ker T < \infty$, то $\mathrm{codim} X_1 < \infty$.

а) Виберемо $x_0 \in X_0 \bigcap X_1$ з $\|x_0\| = 1$. Оскільки $Tx_0 \in [y_i : i > n_0]$, то існує $y_0$ з потрібною властивістю.

б) Виберемо $x_j \in \{x_n\}$ та $x_0 \in X_1$ так, щоб $\|x_j - x_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2\|T\|}$. Тоді $\|Tx_j - Tx_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Як і у випадку а), оскільки $Tx_0 \in [y_i : i > n_0]$, то існує $y_0$ з потрібною властивістю.

**Зауваження 1**. *Замість базису $\{y_n\}$ можна розглядати скінченновимірний розклад $Y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$; при цьому $y_0$ буде мати вигляд $y_0 = \sum\limits_{i=n_0+1}^{n_1} y_i$, де $y_i \in Y_i$.*

**Зауваження 2.** *Замість нескінченновимірного підпростру $X_0 \subset X$ можна розглядати скінченнновимірний з умовою*

$$\dim X_0 > n_0 + \dim\ker T.$$

## 3. Досконало однорідні банахові простори.

Цей параграф не містить нових результатів, однак усі вони є наслідками лем 0 та 1.

**Твердження 2.** *Кожний нескінченновимірний підпростір $X_0$ досконало однорідного банахового простору $X$ містить підпростір $X_1 \subseteq X_0$, ізоморфний $X$.*

**Доведення.** Застосуємо лему 1 (як крок рекурсії) до тотожного оператора $I \in \mathcal{L}(X,X)$ та досконало однорідного базису $\{y_n\}$ в $X$ і побудуємо послідовність $\{y_n\} \subseteq X_0$ ($\|x_n\| = 1$), яка буде, за лемою 0, еквівалентна певному блок-базису базиса $\{y_n\}$. Отже, $X_1 = [x_n : n \geq 1]$ ізоморфний $X$.

**Твердження 3**. *Досконало однорідний банахів простір має один (з точністю до еквівалентності) досконало однорідний базис.*

**Доведення.** Нехай $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ – досконало однорідні базиси в $X$. Застосовуючи лему 1а до тотожнього оператора $I \in \mathcal{L}(X,X)$, а також використовуючи лему 0, побудуємо два еквівалентні між собою блок-базиси відповідно базисів $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$.

**Твердження 4.** *Кожна квазінормалізована слабко збіжна до нуля послідовність у досконало однорідному банаховому просторі $X$ з досконало однорідним базисом $\{x_n\}$ містить підпослідовність, еквівалентну $\{x_n\}$.*

Доведення очевидне з використанням лем 0 та 1.

Два нескінченновимірні банахові простори $X$ та $Y$ називаються цілком непорівнянними, якщо не існує нескінченновимірних ізоморфних підпросторів $X_0 \subseteq X$ та $Y_0 \subseteq Y$.

**Твердження 5.** *Кожні два неізоморфні досконало однорідні банахові простори цілком непорівнянні.*

**Доведення.** Нехай $X$ та $Y$ – досконало однорідні простори; $X_0 \subseteq X$ та $Y_0 \subseteq Y$ – нескінченновимірні підпростори та $T : X_0 \to Y_0$ – ізоморфізм. Нехай $\tilde{X}_0$ – підпростір $X_0$, ізоморфний $X$ (див. твердження 2) і $\tilde{T}$ – звуження $T$ на $\tilde{X}_0$. Нехай $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ – досконало однорідні базиси в $\tilde{X}_0$ та $Y$

відповідно. Використовуючи леми 0 та 1, побудуємо нормалізовані блок-базиси $\{u_n\}$ базису $\{x_n\}$ та $\{v_n\}$ базису $\{y_n\}$ такі, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tu_n - v_n\| < \frac{1}{2k},$$

де $K$ — константа базису $\{y_n\}$. Маємо

$$\{x_n\} \sim \{u_n\} \sim \{Tu_n\} \sim \{v_n\} \sim \{y_n\},$$

отже, $X$ ізоморфний $Y$.

**Твердження 6 (Теорема Пітта).** *Кожний оператор* $T \in \mathcal{L}(l_p, l_r)$ *при* $1 \le r < p < \infty$ *– компактний.*

**Доведення.** Нехай $T \in \mathcal{L}(l_p, l_r)$. У силу рефлексивності $l_p$, достатньо з кожної слабко збіжної до нуля нормалізованої послідовності $\{u_n\} \subseteq l_p$ виділити підпослідовність $\{u_{k_n}\}$, для якої $\|Tu_{k_n}\|$ прямує до нуля. Нехай, навпаки, $\{Tu_n\}$ – квазінормалізована. За твердженням 4 виділимо з $\{u_n\}$ підпослідовність $\{u_{k_n}\}$, еквівалентну стандартному базису в просторі $l_p$, а з $\{Tu_{k_n}\}$ (нагадаємо, що обмежений оператор слабко збіжну до нуля послідовність переводить у слабко збіжну до нуля) – підпослідовність $\{Tu_{k_n}\}$, еквівалентну базису в просторі $l_r$. Звідси би випливало, що якщо $\sum\limits_n \|\alpha_n\|^p < \infty$, то ряд $\sum\limits_n \alpha_n u_{i_{k_n}}$ збіжний в $l_p$, тому $\sum\limits_n \|\alpha_n\|^r < \infty$. Це неможливо, наприклад, для $\alpha_n = n^{-1/r}$.

## 4. Відтворюванність системи Гаара в переставляльно-інваріантних банахових просторах функцій на $[0, 1]$.

Будемо використовувати скорочення: "ПІБП" – переставляльно-інваріантний банахів простір (класів еквівалентних вимірних) функцій на відрізку $[0, 1]$ (див. [6]). Модельні та найважливіші приклади ПІБП – класичні простори $L_p$, $1 \le p < \infty$.

Під системою Гаара в ПІБП $E$ ми будемо розуміти нормалізовану в $E$ систему Гаара (означення див. [5, с.3]).

Базис $\{x_n\}$ у банаховому просторі $X$ називається точно відтворюванним, якщо для кожного ізометричного вкладення $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ простору $X$ у простір $Y$ з базисом $\{y_n\}$ та для кожного $\varepsilon > 0$ існує блок-базис $\{z_n\}$ базиса $\{y_n\}$, $(1+\varepsilon)$ – еквівалентний $\{x_n\}$ (див. [6, с.158]).

Наступна теорема анонсована А.М.Олевським в [7] та доведена в [4] та [6, с.158].

**Теорема (І.Лінденштраус, А.М.Олевський, А.Пелчиньський).** *Система Гаара в кожному сепарабельному ПІБП на* $[0, 1]$ *точно відтворювана.*

Ми доведемо загальну теорему простішим шляхом.

**Теорема 7.** *Нехай $E$ – сепарабельний ПІБП; $X$ – банахів простір з нормалізованим базисом $\{e_n\}$; $T \in \mathcal{L}(E, X)$ з* $\ker T < \infty$*: $\varepsilon > 0$. Існують: послідовність $\{h_n\}$ в $E$, ізометрично еквівалентна системі Гаара в $E$, та блок-базис $\{u_n\}$ базиса $\{e_n\}$ такі, що* $\sum\limits_n \|Th_n - u_n\| < \varepsilon$.

**Доведення.** Згідно з теоремою В.А.Родіна та Є.М.Семенова ([8], [6, с.160]), кожна система типу Радемахера в сепарабельному ПІБП слабко прямує до нуля (у випадку просторів $L_p$, $1 \le p < \infty$, в цьому неважко переконатися безпосередньо). Далі шукані послідовності $\{h_n\}$ та $\{u_n\}$ будуємо очевидним шляхом єз використанням леми 1б, де в якості наступної до побудованих функцій $h_1, ..., h_k$ вибираємо $h_{k+1} \in \{r_n(A_{k+1})\}$ з наперед обраним носієм $A_{k+1}$ та довільної (нормалізованої в $E$) системи типу Радемахера $\{r_n(A_{k+1})\}$.

**Наслідок 8** (Узагальнення теореми Лінденштрауса-Олевського-Пелчинського). *Нехай $E$ – сепарабельний ПІБП; $X$ – банахів простір з нормалізованим базисом $\{e_n\}$; $T \in \mathcal{L}(E, X)$– ізоморфне вкладення; $\varepsilon > 0$. Існує блок-базис $\{u_n\}$ базису $\{e_n\}$, $(1 + \varepsilon) \cdot \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ – еквівалентний системі Гаара в $E$.*

**Доведення.** Достатньо уточнити Лему 0: для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta$ таке, що з умови $\sum\limits_n \|x_n - y_n\| < \delta$ випливає, що $\{x_n\}$ $(1 + \varepsilon)$ – еквівалентна $\{y_n\}$; це уточнення випливає з доведення [5, с.6].

**5. Знаковкладення просторів $L_p$, $1 \le p < \infty$.** Згідно з [8], ін'єктивний оператор $T \in \mathcal{L}(L_1, X)$ називається знаковкладенням, якщо він обмежений знизу на "знаках", тобто існує $\delta > 0$ таке, що для довільної $A \subset [0,1]$ з $\mu(A) > 0$ та довільного $x \in L_1$ з властивістю $x^2 = \chi_A$ має місце $\|T_x\| \ge \delta\|x\|$. Як помітив Г.Розенталь [9] (див. також [2]), якщо звуження ін'єктивного оператора $T \in \mathcal{L}(L_1, X)$ на будь-який підпростір $L_1(A)$, $A \subset [0,1]$, $\mu(A) > 0$ не є знаковкаладенням, то має місце сильніша умова, ніж безпосереднє заперечення означення: для кожного $\varepsilon > 0$ та кожної $A \subset [0,1]$, $\mu(A) > 0$ існує $x \in L_1$ з $x^2 = \chi_A$, $\int x\,d\mu = 0$ та $\|Tx\| < \varepsilon\|x\|$.

Ми будемо розглядати поняття знаковкладення для операторів $T \in \mathcal{L}(L_1, X)$ з $1 \le p < \infty$; при цьому означення зберігається без змін. Тільки при $p > 1$ зауваження Розенталя вже не має місця (розглянемо, наприклад, оператор тотожного вкладення $I : L_p \to L_r$ при $1 \le r < p < \infty$).

Дж.Бургейн та Г.Розенталь [1] довели, що не існує знаковкладення простору $L_1$ у простір $c_0$ (див. лема 2.8 з [1]). Більш коротке доведення цього результату є в [3].

Наступний наслідок теореми 7 допоможе нам ще простіше довести узагальнений варіант цього результату.

**Наслідок 9.** *Нехай $X$ – банахів простір з базисом $\{e_n\}$, $1 \le p < \infty$; $T \in \in \mathcal{L}(L_1, X)$ – знаковкладення та $\varepsilon > 0$. Існують: квазінормований блок-базис $\{u_n\}$ базису $\{e_n\}$ та система $\{h_n\}$, ізометрично еквівалентна системі Гаара в $L_p$, такі, що $\sum \|Th_n - u_n\| < \varepsilon$ та $\{h_n\} \le \{u_n\}$.*

**Доведення.** Якщо раптом $\varepsilon > \dfrac{1}{2k}$, то скористаємось теоремою 7 з $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2k}$ (де $k$ – константа базису $\{e_n\}$). Оскільки $T$ – знаковкладення, то $\{Th_n\}$ – квазінормалізована система, а, отже, і $\{u_n\}$ – квазінормалізована базисна послідовність, еквівалентна $\{Th_n\}$ (за лемою 0). Тоді $\{h_n\} \le \{Th_n\} \sim \{u_n\}$.

Розглянемо тепер питання про можливість знаковкладення простору $L_p$, $1 \le p < \infty$ в інші банахові простори, зокрема в досконало однорідні. Відзначимо, що питання про існування знаковкладення простору $L_1$ в інший банахів простір, який не містить підпросторів, ізоморфних $L_1$, яке було сформульовано в [9], розв'язано позитивно в [10]: побудовано підпростір $X$ простору $L_1$ який не містить підпросторів, ізоморфних $L_1$ (при цьому фактор-відображення $T : L_1 \to L_1/X$ зобов'язано бути знаковкладенням), причому фактор-простір $L_1/X$ також не містить ізоморфної копії $L_1$.

**Теорема 10.** *Нехай $1 \le p < \infty$; $X \in \in \{c_0, l_r : 1 \le r < \infty\}$ та $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$ – знаковкладення. Тоді*

*(i) $X \ne c_0$;*

*(ii) $p = r$;*

*(iii) $p \ge 2$.*

**Доведення.** Нехай $\delta > 0$ таке, що для довільного знака $h \in L_p$: $\|Th\| \ge \delta\|h\|$. Скористаємось наслідком 9 з $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$ та стандартним базисом у просторі $X$. Тоді

$$\|u_n\| \ge \|Th_n\| - \|u_n - Th_n\| \ge \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

та

$$\sum_n \left\| \frac{Th_n}{\|u_n\|} - \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\| \le \frac{\delta}{2}, \quad \sum_n \|Th_n - u_n\| < \frac{1}{2},$$

отже, $\{Th_n\}$ еквівалентна стандартному базису в $X$.

Доведемо одночасно (i) та (ii). З доведення теореми 7 випливає, що (як і у вихідній системі Гаара) якщо розглянути суму $z = h_{2^n+1} + ... + h_{2^{n+1}}$ так званої "$n$-ї пачки" нашої системи $\{h_i\}$, то $z$ є знак, помножений на $2^{n/p}$. Отже,

$$\delta \cdot 2^{n/p} = \delta\|z\| \le \|Tz\| \le \alpha \left\| \sum_{k=1}^{2^n} e_k \right\| \le$$

$$\le \beta\|Tz\| \le \beta \cdot \|T\| \cdot \|z\| = \beta \cdot \|T\| \cdot 2^{n/p},$$

де $\alpha$ та $\beta$ – деякі константи, незалежні від $n$. Звідси одержуємо (i) та (ii).

Оскільки система типу Радемахера $\{r_n\}$ є блок-базисом системи Гаара, то $\{Tr_n\}$ є блок-базисом базису $\{Th_n\}$ і також еквівалентна $\{e_n\}$. З нерівності Хінчина [5, с.66] маємо

$$\gamma \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i T r_i \right\| \leq$$

$$\leq \|T\| \cdot \lambda \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2},$$

отже, (iii) доведено.

**Зауваження.** *Поняття знаковкладення можна було б також розглядати для операторів $T \in \mathcal{L}(E, X)$ з довільного сепарабельного ПІБП $E$ й уточнити з допомогою цього теорему 10.*

**Теорема 11.** *Нехай*

$$X \in \{c_0, l_p : 1 \leq p < \infty\};$$

*$E$ – сепарабельний ПІБП на $[0,1]$ з індексами Бойда $p_E$ та $q_E < \infty$. Нехай $T \in \mathcal{L}(E, X)$ – знаковкладення. Тоді*

*(i) $X \neq c_0$;*

*(ii) $p_E = p = q_E$;*

*(iii) $p \geq 2$.*

Доведення таке ж саме, тільки ще використовується теорема 2.b.6 з [6, с.141].

**Проблема 1.** *Нехай $p > 2$. Чи існує знаковкладення $T \in \mathcal{L}(L_p, l_p)$?*

**Проблема 2.** *Нехай $1 < p < \infty$; $p \neq 2$ та $T \in \mathcal{L}(L_p, X)$ – знаковкладення. Чи вкладається ізоморфно $L_p$ в $X$?*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Bourgain J, Rosenthal H.P.* Applications of the theory of semi-embeddings to Banach space theory // J. Funct. Anal., 1983. – V.52. – P.149-188.

2. *Ghoussoub N., Rosenthal H.P.* Martingales, $G_\delta$-embeddings and quotients of $L_1$ // Math. Ann., 1983. – V.264, N3. – P.321-332.

3. *Kadets V.M, Popov M.M.* On the Liapunov convexity theorem with applications to sign-embeddings // Укр. мат. журн., 1992. – Т.44, N9. – С.1192-1200.

4. *Lindenstrauss J, Pełczyński.* Contributions to the theory of classical Banach Spaces // J. Funct. Anal., 1971. – V.8. – P.225-249.

5. *Lindenstrauss J, Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. I. – 1977. – Springer. – Berlin etc. 190p.

6. *Lindenstrauss J, Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. II. – 1979. – Springer. – Berlin etc. 243p.

7. *Олевский А.М.* Ряды Фурье и функции Лебега // Успехи мат. наук, 1967. – Т.22. – С.236-239.

8. *Rodin V.A, Semyonov E.M.* Rademacher series in symnetric spaces // Anal. Math., 1975. – V.1, N3. – P.207-222.

9. *Rosenthal H.P.* Sign-embeddings of $L^1$. – Lect. Notes in Math. – Springer. – 1983. – N995. – P.155-165.

10. *Talagrand M.* The three-space problem for $L_1$// J. Amer. Math. Soc, 1990. – V.3, N1. – P.9-29.

11. *Zippin M.* On perfectly homogeneous bases in Banach spaces // Isr. J. Math, 1966. – V.4. – P.265-272.


Стаття надійшла до редколегії 20.12.2002