УДК.517.5

©2003 р. О.Г.Орищин, О.Б.Скасків, О.М.Трусевич

Національний університет "Львівська політехніка", Львівський національний університет ім.І.Франка, Львівський пожежний інститут

ПРО ПОВНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛОГАРИФМІВ СУМИ Й МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДІВ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

Доведено теореми про повну еквівалентність логарифмів суми й максимального члена для додатних рядів Тейлора-Діріхле й кратних рядів Діріхле.

The theorems of asymptotic equality of logarithms of a sum and maximum term of positive Taylor-Dirichlet series and multiple Dirichlet series are proved.

Нехай $\tau(\sigma)$ - неспадна неперервна на $[0,+\infty)$ функція, $\psi(x)\uparrow+\infty$ $(x\to+\infty)$ - неперервна на $[0,+\infty)$ функція, а $\lambda{=}(\lambda_n)$ і $\beta{=}(\beta_n)$ - послідовності невід'ємних чисел. Через $S(\lambda,\beta,\tau)$ позначимо клас функцій F, визначених збіжним при $\sigma\geq 0$ рядом

$$F(\sigma)=\sum_{n=0}^{+\infty}F_n e^{\sigma\lambda_n+\tau(\sigma)\beta_n},F_n\geq 0\ \ (n\geq 0),$$

а через $S(\lambda,\beta,\tau,\psi)$ його підклас, що визначається умовою

$$F_n\leq e^{-\alpha_n\psi(\alpha_n)}\ \ (n\geq n_0) \tag{1}$$

(тут і всюди далі $\alpha_n=\lambda_n+\beta_n$). Для $F\in S(\lambda,\beta,\tau,\psi)$ і $\sigma\geq 0$ визначимо

$$\mu(\sigma,F)=\max\left\{F_n e^{\sigma\lambda_n+\tau(\sigma)\beta_n}\ :n\geq 0\right\}.$$

В [1] показано, що у випадку, коли $\tau(\sigma)\leq\sigma$ $(\sigma>0)$ і $\sup\{\lambda_n:n\geq 0\}=+\infty$, умова

$$\ln n=O(\psi(\alpha_n))\ \ (n\to+\infty) \tag{2}$$

є достатньою для того, щоб співвідношення

$$\ln F(\sigma)=(1+o(1))\ln\mu(\sigma,F) \tag{3}$$

виконувалось при $\sigma\to+\infty$ для кожної функції $F\in S(\lambda,\beta,\tau,\psi)$. З іншого боку [1], для кожної послідовності $\alpha_n=\lambda_n+\beta_n\nearrow$ такої, що $\sup\left\{\frac{\beta_n}{\lambda_n}\ :\ n\geq 1\right\}<+\infty$,

$$\ln n=o(\alpha_n\psi(\alpha_n))\ \ (n\to+\infty)$$

і умова (2) не виконується, а також для кожної функції $\tau(\sigma)$ такої, що $0<\tau'(\sigma)\leq 1$ $(\sigma>0)$ і кожної додатної сталої h існують функція $F\in S(\lambda,\beta,\tau,\psi)$ і послідовність $\sigma_n\uparrow+\infty$ такі, що для всіх $k\geq 1$

$$\ln F(\sigma_k)\geq(1+h)\ln\mu(\sigma_k,F),$$

тобто співвідношення (3) не може виконуватись.

Виявляється, що в підкласі $S_\Phi(\lambda,\beta,\tau,\psi)$ класу $S(\lambda,\beta,\tau,\psi)$, який визначається умовою

$$\ln\mu(\sigma)\geq\Phi(\sigma)\quad(\sigma\geq\sigma_0), \tag{4}$$

де $\Phi(\sigma)$ - додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція, умову (2) можна уточнити. Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо* $\sup\{\lambda_n:n\geq 0\}=+\infty,\ \tau(\sigma)\leq\sigma\,(\sigma>0)\,,F\in S_\Phi(\lambda,\beta,\tau,\psi)$ *і*

$$\ln n=o\left(\Phi\left(\psi(\alpha_n)-\frac{2\ln n}{\alpha_n}\right)\right)\quad(n\to+\infty), \tag{5}$$

то при $\sigma\to+\infty$ *виконується співвідношення (3).*

Теорема 2. *Якщо* $\sup\{\lambda_n:n\geq 0\}=+\infty,\ \tau(\sigma)\leq\sigma\,(\sigma>0)\,,F\in S(\lambda,\beta,\tau,\psi)$ *і виконуються умови*

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}=+\infty,$$

$$\ln n = O\left(\Phi\left(\psi(\alpha_n) - \frac{2\ln n}{\alpha_n}\right)\right) \ (n \to +\infty),$$

то при $\sigma \to +\infty$ виконується співвідношення (3).

Нескладно перевірити, що теореми 1 і 2 рівносильні. Тому наведемо лише доведення теореми 1.

Доведення теореми 1. Зауважимо спочатку, що із умови (5) випливає, що $\psi(\alpha_n) - \dfrac{2\ln n}{\alpha_n} \to +\infty \, (n \to +\infty)$,

$$\ln n < \frac{1}{2}\alpha_n \psi(\alpha_n) \quad (n \to +\infty).$$

Тому $\alpha_n \to +\infty \, (n \to +\infty)$ і, отже, для всіх досить великих n

$$\frac{\ln n}{\alpha_n \psi(\alpha_n)} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\sigma}{\psi(\alpha_n)}\right),$$

тобто

$$-\alpha_n \psi(\alpha_n) + \sigma \alpha_n < -\frac{3}{2}\ln n. \qquad (6)$$

Нехай $N(\sigma)$ - найменше з тих значень $m \geq n_0$, що для всіх $n \geq m$ і при фіксованому $\sigma > 0$ виконується нерівність (6). Тоді, скориставшись означенням класу $S(\lambda, \beta, \tau, \psi)$, нерівностями $\tau(\sigma) \leq \sigma$, (6) і $F_n \exp\{\sigma\lambda_n + \tau(\sigma)\beta_n\} \leq \mu(\sigma, F)$, при $\sigma \to +\infty$ отримуємо

$$F(\sigma) \leq \sum_{n=0}^{N(\sigma)-1} F_n \exp\{\sigma\lambda_n + \tau(\sigma)\beta_n\} +$$

$$+ \sum_{n=N(\sigma)}^{+\infty} \exp\{-\alpha_n\psi(\alpha_n) + \sigma\alpha_n\} \leq$$

$$\leq \mu(\sigma, F)\, N(\sigma) + \sum_{n=N(\sigma)}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Враховуючи, що при цьому $N(\sigma) \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$, при $\sigma \to +\infty$ маємо

$$\frac{\ln F(\sigma)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leq 1 + \frac{\ln(N(\sigma) - 1)}{\ln \mu(\sigma, F)} + o(1). \quad (7)$$

За означенням $N(\sigma)$, маємо при $n = N(\sigma) - 1$

$$-\alpha_n \psi(\alpha_n) + \sigma\alpha_n \geq -2\ln n,$$

звідки $\sigma \geq \psi(\alpha_n) - 2\frac{\ln n}{\alpha_n}$ $(\sigma \to +\infty)$, $n = N(\sigma) - 1$.

Із (7) за умовами (4) і (5) остаточно при $n = N(\sigma) - 1$ і $\sigma \to +\infty$ отримуємо

$$1 \leq \frac{\ln F(\sigma)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{\ln n}{\Phi\left(\psi(\alpha_n) - \dfrac{2\ln n}{\alpha_n}\right)} + o(1) = 1 + o(1).$$

Теорему 1 доведено.

Відзначимо, що у випадку цілих рядів Діріхле (тобто $\beta_n = 0, n \geq 0$ і клас $S(\lambda, 0, \psi, 0) \overset{def}{\equiv} S(\lambda, \psi)$)

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{\sigma\lambda_n} \qquad (8)$$

отримуємо наступні наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $\Phi_0(\sigma)$ - неперервно диференційовна функція із зростаючою похідною, $\varphi_0(\sigma)$ функція, обернена до $\Phi_0(\sigma)$, $\psi_0(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi_0(\sigma)}{\Phi_0'(\sigma)}$ - асоційована за Ньютоном з Φ_0. Якщо для цілого ряду Діріхле (8) виконуються умови*

$$\Phi(\sigma) \leq \ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi_0(\sigma) \quad (\sigma \geq \sigma_0),$$

та при $n \to +\infty$

$$\ln n = o\left(\Phi\left(\psi_0(\varphi_0(\lambda_n)) - \frac{2\ln n}{\lambda_n}\right)\right), \quad (9)$$

то при $\sigma \to +\infty$ є правильним співвідношення (3).

Доведення. У [2,с.18-19] доведено, що нерівність $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi_0(\sigma)$ $(\sigma \geq \sigma_0)$ виконується тоді й тільки тоді, коли

$$\ln F_n \leq -\lambda_n \psi_0(\varphi_0(\lambda_n)) \ (n \geq n_0).$$

Тому, вибираючи в теоремі 1 $\psi(t) = \psi_0(\varphi_0(t))$, негайно отримуємо твердження наслідку 1.

Безпосередньо з наслідку 1 при $\Phi(\sigma)=Be^{\sigma\omega}$ і $\Phi_0(\sigma)=Ae^{\rho\sigma}$ отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2. *Якщо для цілого ряду Діріхле (8) виконуються умови*

$$Be^{\sigma\omega} \leq \ln\mu(\sigma,F) \leq Ae^{\rho\sigma}\,(\sigma \geq \sigma_0), \qquad (10)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln n}{\lambda_n^{\omega/\rho}}\right)=0, \qquad (11)$$

де $\omega,\ \rho,\ A,\ B \in (0,+\infty)$, *то співвідношення (3) є правильним при* $\sigma\to+\infty$.

Справді,

$$\psi_0(x)=x-\frac{1}{\rho}, \quad \varphi_0(x)=\frac{1}{\rho}\ln\frac{\sigma}{A\rho},$$

тому

$$\Phi\left(\psi_0(\varphi_0(\lambda_n))-\frac{2\omega}{\lambda_n}\ln n\right)=$$

$$=\exp\left\{\frac{\omega}{\rho}\ln\frac{\lambda_n}{Ae\rho}-\frac{2\omega}{\lambda_n}\ln n\right\}$$

і за умовою (11) маємо $\ln n=o\left(\lambda_n^{\omega/\rho}\right)$ $(n\to+\infty)$.

Позаяк, необхідно $\omega\leq\rho$, то $\ln n=o(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$ і, отже, умова (9) рівносильна умові (11).

Зауважимо, що якщо вибрати $\lambda_n=\ln n$ і $\ln F_n=-\frac{1}{\rho}\lambda_n\ln\frac{\lambda_n}{A}$, то безпосередньо перевіряється (див.[3]), що при $\sigma\to+\infty$

$$\ln\mu(\sigma,F)=\frac{A}{e\rho}e^{\rho\sigma}+o(1)$$

та

$$\ln F(\sigma)\geq(e^{\rho}+o(1))\ln\mu(\sigma),$$

де $A,\rho>0$. Тобто при $\omega=\rho$ в (10) умова (11) є, взагалі кажучи, непокращуваною.

Наведемо також наступний наслідок.

Наслідок 3. *Якщо для цілого ряду Діріхле (8) виконуються умови* $A\sigma^2\leq \ln\mu(\sigma,F)\leq\ \leq Be^{\rho\sigma}\,(\sigma\geq\sigma_0)$, *де* $A,\ B\ ,\rho\in(0,+\infty)$ *та*

$$\ln n=o\left(\ln^2\lambda_n\right)(n\to+\infty), \qquad (12)$$

то співвідношення (3) є правильними при $\sigma\to+\infty$.

Справді,

$$\Phi\left(\psi_0(\varphi_0(\lambda_n))-\frac{2\ln n}{\lambda_n}\right)=$$

$$=B\left(\frac{1}{\rho}\ln\frac{\lambda_n}{Ae\rho}-\frac{2\ln n}{\lambda_n}\right)^2,$$

тому за умовою (12) $\ln n=o\left(\ln^2\lambda_n\right)$ $(n\to+\infty)$ і $\ln n=o(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$. Отже, умови (9) і (12) рівносильні.

Цікаво порівняти умову (12) з умовою $\ln n=\mathrm{O}(\ln\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$, яка забезпечує (див. [4]) справедливість співввідношення (3) в класі цілих рядів Діріхле скінченного порядку за Ріттом (тобто $\ln\mu(\sigma,F)\leq Be^{\rho\sigma}$).

Гіпотеза. *Умови (12), (11), (9), (5) є необхідними для справедливості при* $\sigma\to+\infty$ *співвідношення (3) у відповідних класах.*

На жаль, довести правильність цієї гіпотези авторам не вдалось.

Подібно до теореми 1 і 2, можна довести наступну теорему.

Нехай $S^p(\lambda)$, $p\geq1$ - клас цілих кратних рядів Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{\|n\|=0}^{+\infty}F_n\exp\langle z,\lambda_n\rangle,$$

де $\lambda=\{\lambda_n\}\subset R_+^p$, $\lambda_n=\left(\lambda_{n_1}^{(1)},\ldots,\lambda_{n_p}^{(p)}\right)$, $n=(n_1,\ldots,n_p)\in Z_+^p$, $\|n\|=n_1+\ldots+n_p$, $z=(z_1,\ldots,z_p)\in C^p$, $\langle z,\lambda_n\rangle=z_1\lambda_{n_1}^{(1)}+\ldots+z_p\lambda_{n_p}^{(p)}$. Якщо $\psi(t)$ - додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,\ +\infty)$ функція, то через $S^p(\lambda,\psi)$ позначимо підклас $S^p(\lambda)$ такий, що

$$|F_n|\leq\exp\{-\alpha_n\psi(\alpha_n)\}\quad(\|n\|\geq k_0),$$

тут і надалі $\alpha_n=\|\lambda_n\|$.

Нехай

$$\gamma(F)\overset{def}{=}\left\{\sigma\in R^p:\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\mu(t\sigma,F)=+\infty\right\}$$

– конус зростання функції F, тут $|\sigma|=\sqrt{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_p^2}$, $\mu(\sigma,F)=\max\left\{|F_n|\,e^{\langle\sigma,\lambda_n\rangle}:\ n\in Z_+^p\right\}$.

Теорема 3. *Нехай* $\Phi(t)$ *- додатна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *функція. Якщо* $F \in S^p(\lambda, \psi)$ *і* $(\exists \beta > p)$ *:*

$$\overline{\lim_{\|n\| \to +\infty}} \frac{\ln \|n\|}{\Phi\left(\psi(\alpha_n) - \beta \frac{\ln \|n\|}{\alpha_n}\right)} < +\infty, \quad (13)$$

а також для деякого конуса K *з вершиною в початку координат* O

$$\lim_{|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(|\sigma|)} = +\infty,$$

то

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \quad (14)$$

при $|\sigma| \to +\infty \quad (\sigma \in K)$*, де* $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| \,:\, t \in R^p\}$.

Наслідок 4. *Для того, щоб для кожної функції* $F \in S^p(\lambda, \psi)$ *при* $|\sigma| \to +\infty \quad (\sigma \in K)$ *виконувалось співвідношення (11), необхідно й досить, щоб*

$$\ln \|n\| = \mathrm{O}(\psi(\alpha_n)) \quad (\|n\| \to +\infty), \quad (15)$$

де K *— довільний конус із вершиною в точці* O *такий, що*$\overline{K} \setminus \{\} \subset \gamma(F)$.

Доведення наслідку 4. Відомо ([5]), що

$$\lim_{|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma|} = +\infty.$$

Тому, вибираючи в теоремі 3 $\Phi(t) \equiv t$, отримуємо достатність умови (15) в наслідку 4.

Для того, щоб довести необхідність, потрібно у випадку, коли умова (15) не виконується, подібно як і в [4], побудувати цілий ряд Діріхле вигляду

$$f(t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} f_n e^{\alpha_n t}, \quad f_n \geq 0, \quad t \in R \quad ,$$

для якого $|f_n| \leq \exp\{-\alpha_n \psi(\alpha_n)\} \quad (\|n\| \geq 1)$ і для деякого $h > 0$ і деякої послідовності $t_k \uparrow +\infty \quad (k \to +\infty)$

$$\ln f(t_k) > (1 + h) \ln \mu(t_k, f).$$

Тоді очевидно, що функція F, яка визначена рядом

$$F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} f_n \exp\langle z, \lambda_n \rangle$$

належить до $S^p(\lambda, \psi)$, а також $\mu(\sigma_k, F) = \mu(t_k, f)$ для $\sigma_k = (t_k, t_k, \ldots, t_k) \in R^p$ та $\ln F(\sigma_k) > (1 + h) \ln \mu(\sigma_k, F)$.

Залишається зауважити, що завжди промінь $l_0 = \{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in R^p \colon \sigma_1 = \sigma_2 == \ldots = \sigma_p > 0\}$ належить до кожного конуса $\gamma(F)$. І тому для кожного конуса K, який містить промінь l_0, співвідношення (14) виконуватись не може.

Доведення теореми 3. За умовою (13) теореми 3 для $\beta > p$ маємо

$$\psi(\alpha_n) - \beta \frac{\ln \|n\|}{\alpha_n} \to +\infty \quad (\|n\| \to +\infty).$$

Тому для $\|n\| \geq k_1$ і $p < \beta_1 < \beta$

$$\frac{\ln \|n\|}{\alpha_n \psi(\alpha_n)} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\beta_1}\left(1 - \frac{\sigma^\wedge}{\psi(\alpha_n)}\right),$$

де

$$\sigma^\wedge = \max\left\{\sigma_j \,:\, 1 \leq j \leq p, \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_p)\right\}$$

і $\sigma \in K$.

Очевидно, що $\sigma^\wedge > 0$. Тому для $\|n\| \geq k_1$

$$-\alpha_n \psi(\alpha_n) + \langle \sigma, \lambda_n \rangle \leq -\alpha_n \psi(\alpha_n) + \sigma^\wedge \alpha_n < < -\beta_1 \ln \|n\|. \quad (16)$$

Якщо тепер позначити $N(\sigma)$ - найменше з тих k_1, що для всіх $\|n\| \geq k_1$ виконується друга нерівність з (16), то, як і вище, отримаємо для $\sigma \in K$

$$M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma, F)(N(\sigma))^p + \sum_{\|n\|=N(\sigma)}^{+\infty} \exp\{-\beta \ln \|n\|\} \leq \mu(\sigma, F)(N(\sigma))^p + + \sum_{k=N(\sigma)}^{+\infty} (k+1)^{p-1} \exp\{-\beta \ln k\}.$$

Звідки при $|\sigma| \to +\infty \quad (\sigma \in K)$

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \le 1 + \frac{p \ln (N(\sigma) - 1)}{\ln \mu(\sigma, F)} + o(1).$$

За означенням $N(\sigma)$, існує n таке, що $\|n\| = N(\sigma) - 1$ та $-\alpha_n \psi(\alpha_n) + \sigma^\wedge \alpha_n \ge -\beta_1 \ln \ \|n\|$, тобто $|\sigma| \ge \sigma^\wedge \ge \psi(\alpha_n) - \beta_1 \frac{\ln \|n\|}{\alpha_n}$, тому

$$\frac{\ln(N(\sigma)-1)}{\ln \mu(\sigma, F)} \le$$

$$\le o\left(\frac{\ln ||n||}{\Phi\left(\psi(\alpha_n) - \beta_1 \frac{\ln\|n\|}{\alpha_n}\right)}\right) = o(1)$$

при $|\sigma| \to +\infty, \quad \sigma \in K$. При цьому ми скористались тим, що умова (13) виконується для кожного $\beta_1 < \beta$. Теорему 3 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* Про повну еквівалентність логарифмів суми та максимального члена додатного ряду типу Тейлора-Діріхле // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех-мат.— 1999.— Вип.54.— С.175—-179.

2. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле.— К.: ІСДО, 1993. — 168 с.

3. *Шеремета М.Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле// Мат. сборн. — 1979. — **110**, N 1. — С.102—116.

4. *Шеремета М.Н.* О соотношениях между максимальным членом и масимумом модуля целого ряда Дирихле// Мат. заметки. — 1992. — **51**, N 5. — С.141—148.

5. *Скасків О.Б., Луцишин М.Р.* Про мінімум модуля кратного ряду Діріхле// Укр. мат. журн. — 1992. — **44**,N 9. — С.1296—1298.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.2002