

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

**ПРО ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ  
ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ  
ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

Встановлено деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь.

We establish some properties of the fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for the parabolic system of integro-differential equations.

У теорії задачі Коші (ЗК) для різних класів параболічних систем ключову роль відіграє фундаментальна матриця розв'язків (ФМР), за допомогою якої визначається розв'язок задачі [1-3]. Важливим також є встановлення властивостей ФМР, які дозволяють дослідити коректність поставленої задачі, а також становлять самостійний інтерес.

У даній статті розглядається параболічна система інтегро-диференціальних рівнянь з оператором типу Фредгольма. ЗК для цієї системи досліджена в [4]. Крайова задача для параболічної системи з інтегральним оператором типу Вольтерри-Фредгольма розглядалась в [5]. Тут встановлюються деякі властивості ФМР, зокрема нормальність, єдиність, зв'язок між коефіцієнтами системи та ФМР. При цьому, у порівнянні з властивостями ФМР для параболічної системи диференціальних рівнянь [6], тут потрібно накладати додаткові умови на ядро інтегрального оператора.

Розглянемо в  $\Pi = [0, T] \times \mathbb{R}^n$  систему

$$L(t, x, D, K)u(t, x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, x) D_x^k u - \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, \xi) u(t, \xi) d\xi = 0, \quad (1)$$

У розгорненому записі система має вигляд

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{|k| \leq 2b} A_{(k_1, \dots, k_n)}^{i1}(t, x) \frac{\partial^{|k|} u_1}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \dots +$$

$$+ \sum_{|k| \leq 2b} A_{(k_1, \dots, k_n)}^{iN}(t, x) \frac{\partial^{|k|} u_N}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} K_{ij}(t, x, \xi) u_j(t, \xi) d\xi, \\ i = 1, \dots, N, \quad |k| = k_1 + \dots + k_n.$$

Нехай виконуються наступні умови.

(I) Система (1) рівномірно параболічна в шарі  $\Pi$  [1].

(II) Коефіцієнти системи  $A_k(t, x)$  визначені в шарі  $\Pi$ , обмежені, неперервні по  $t$ , причому рівномірно щодо  $x$  при  $|k| = 2b$ , і  $A_k \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$ .

(III) Існують похідні  $D_x^k A_k(t, x)$ ,  $|k| \leq 2b$ , які є обмеженими, неперервними по  $t$  і гельдеровими по  $x$  рівномірно щодо  $t$  з показником  $\alpha$  в  $\Pi$ .

(IV) Елементи ядра  $K = (K_{ij})_{ij=1}^N$  задовольняють нерівності [4]

$$|D_x^m K_{ij}(t, x, \xi)| \leq C_m t^{-\frac{n+|m|+2b-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t, x, \xi)}, \quad (2)$$

$$t > 0, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |m| = 0, 1,$$

$$\rho(t, \tau, x, \xi) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i - \xi_i|}{(t - \tau)^{1/2b}} \right)^q, \quad q = \frac{2b}{2b - 1},$$

$$\rho(t, x, \xi) \equiv \rho(t, 0, x, \xi).$$

(V) Для ФМР  $Z$  відповідної параболічної системи та інтегрального ядра  $K$  виконується рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, z) Z(t, \tau, z, \xi) dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \tau, x, z) K(\tau, z, \xi) dz.$$

Остання умова забезпечує нормальність та єдиність ФМР ЗК для системи (1).

За умов (I), (II), (IV) існує ФМР  $\Gamma$  системи (1), яка досліджена в [4] і зображується наступним чином

$$\Gamma(t, \tau, x, \xi) = Z(t, \tau, x, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \beta, x, z) R(\beta, \tau, z, \xi) dz \equiv Z + W,$$

де

$$R(t, \tau, x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu}(t, \tau, x, \xi),$$

$$H_{\nu}(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} H_1(t, \beta, x, z) \times \times H_{\nu-1}(\beta, \tau, z, \xi) dz, \quad \nu = 2, 3, \dots,$$

$$H_1(t, \tau, x, \xi) = H = \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, z) Z(t, \tau, z, \xi) dz.$$

Для похідних правильні оцінки [4]:

$$|D_x^k Z(t, \tau, x, \xi)| \leq C_k (t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}} e^{-c\rho(t, \tau, x, \xi)},$$

$$|D_x^k W(t, \tau, x, \xi)| \leq C_k (t - \tau)^{-\frac{n+|k|-\alpha}{2b}} \times \times \sum_{m=1}^{\infty} C'_m \prod_{p=1}^m \frac{2b}{2b+(p-2)\alpha} e^{-(c_{\nu_o}-\varepsilon)\rho((\nu_o+m)t, \tau, x, \xi)},$$

$$|k| \leq 2b, \quad t > \tau, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

де константи  $C'_m, c_{\nu_o}, \nu_o$  визначені в [4].

Якщо виконується умова (III), то для системи (1) існує спряжена за Лагранжем система

$$L^* v(\tau, \xi) \equiv -\frac{\partial v}{\partial \tau} - \sum_{|k| \leq 2b} (-1)^{|k|} D_{\xi}^k \left( \bar{A}'_k(\tau, \xi) v \right) - \int_{\mathbb{R}^n} K^*(\tau, \xi, x) v(\tau, x) dx = 0, \quad (4)$$

$$K^*(\tau, \xi, x) = \bar{K}'(\tau, x, \xi),$$

в якій риска означає комплексне спряження, а штрих – транспонування матриці. Аналогічно як і в [4] побудуємо для цієї системи ФМР ЗК

$$\Gamma^*(\tau, t, \xi, x) = Z^*(\tau, t, \xi, x) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} Z^*(\tau, \beta, \xi, z) R^*(\beta, t, z, x) dz \equiv Z^* + W^*,$$

де

$$R^*(\tau, t, \xi, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu}^*(\tau, t, \xi, x),$$

$$H_{\nu}^*(\tau, t, \xi, x) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} H_1^*(\tau, \beta, \xi, z) \times \times H_{\nu-1}^*(\beta, t, z, x) dz, \quad \nu = 2, 3, \dots,$$

$$H_1^* = H^* = \int_{\mathbb{R}^n} K^*(\tau, \xi, z) Z^*(\tau, t, z, x) dz.$$

Враховуючи зображення (1) і (4) для операторів  $L$  і  $L^*$ , розглянемо такий вираз для  $u, v \in C_{t,x}^{(1,2b)}(\Pi)$ :

$$\bar{v}' Lu - (\overline{L^* v})' u = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}' \cdot u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} B_i(\bar{v}', u) - \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}' K(t, x, \xi) u(t, \xi) d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t, \xi) K(t, \xi, x) d\xi \cdot u,$$

де  $B_i(\bar{v}', u)$  – білінійні форми, які містять похідні  $D_x^k(\bar{v}' \cdot A_k), D_x^k u$  з  $|k| \leq 2b - 1$ .

Проінтегруємо дану рівність по області  $|x| < R, R > 0, t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{|x| < R} (\bar{v}' Lu - (\overline{L^* v})' u)(t, x) dx = \int_{|x| < R} (\bar{v}' u)(t, x) \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{|x|=R} \sum_{i=1}^n B_i(\bar{v}', u)(t, x) \cos(\nu, x_i) dS_x - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{|x| < R} \bar{v}'(t, x) \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, \xi) u(t, \xi) d\xi dx +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{|x| < R} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t, \xi) K(t, \xi, x) d\xi \cdot u(t, x) dx,$$

де  $\nu$  – зовнішня нормаль до поверхні  $|x| = R$ .

Спрямуємо  $R \rightarrow \infty$ . Якщо білінійні форми  $B_i(\bar{v}', u)$  досить швидко прямують до нуля при  $|x| \rightarrow \infty$ , то з попередньої рівності одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' Lu - (\overline{L^*v})' u)(t, x) dx = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' u)(t, x) \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t, x) \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, \xi) u(t, \xi) d\xi dx + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}'(t, \xi) K(t, \xi, x) d\xi \cdot u(t, x) dx. \end{aligned}$$

Очевидно, що останні два інтеграли рівні, якщо в одному з них змінити порядок інтегрування. Тому остаточно одержимо таку формулу

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' Lu - (\overline{L^*v})' u)(t, x) dx = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' u)(t, x) \Big|_{t_1}^{t_2} dx. \end{aligned} \quad (5)$$

*Наслідок.* Якщо  $u$  і  $v$  – розв'язки однорідних систем  $Lu = 0$  і  $L^*v = 0$  відповідно, то інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\bar{v}' u)(t, x) dx$$

не залежить від  $t$ .

Встановимо далі властивості ФМР ЗК  $\Gamma(t, \tau, x, \xi)$ .

**1<sup>0</sup>.** Якщо виконується умова (V), то ФМР ЗК  $\Gamma$  є нормальною, тобто матриця

$$\Gamma^*(\tau, t, \xi, x) = \bar{\Gamma}'(t, \tau, x, \xi) \quad (6)$$

по аргументах  $(\tau, \xi) \in \Phi$ МР ЗК для спряженої до (1) системи (4).

*Доведення.* Враховуючи конструкції ФМР, достатньо показати, що

$$W^*(\tau, t, \xi, x) = \bar{W}'(t, \tau, x, \xi).$$

Розглянемо спочатку

$$\begin{aligned} H^*(\tau, t, \xi, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K^*(\tau, \xi, z) Z^*(\tau, t, z, x) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{K}'(\tau, z, \xi) \bar{Z}'(t, \tau, x, z) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{Z(t, \tau, x, z) K(\tau, z, \xi)})' dz = \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, z) Z(t, \tau, z, \xi) dz \right)' = \bar{H}'(t, \tau, x, \xi). \end{aligned}$$

Тут ми скористались властивістю спряжених матриць та умовою (V). Використовуючи метод індукції, для повторних ядер встановлюємо рівності

$$\begin{aligned} H_\nu^*(\tau, t, \xi, x) &= \\ &= \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \bar{H}'_1(\beta, \tau, z, \xi) \bar{H}'_{\nu-1}(t, \beta, x, z) dz = \\ &= \left( \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} H_{\nu-1}(t, \beta, x, z) H_1(\beta, \tau, z, \xi) dz \right)' = \\ &= \bar{H}'_\nu(t, \tau, x, \xi), \quad \nu = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Отже,

$$R^*(\tau, t, \xi, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\nu^* = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{H}'_\nu = \bar{R}'(t, \tau, x, \xi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} W^*(\tau, t, \xi, x) &= \\ &= \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \bar{Z}'(\beta, \tau, z, \xi) \bar{R}'(t, \beta, x, z) dz = \\ &= \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{R(t, \beta, x, z) Z(\beta, \tau, z, \xi)})' dz \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv (\overline{R ** Z})'$$

У скорочених позначеннях за допомогою оператора символічної згортки розглянемо детальніше вираз

$$\begin{aligned} R ** Z &= \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} ** Z = \\ &= H_1 ** Z + \sum_{\nu=2}^{\infty} (H_1 ** H_{\nu-1}) ** Z. \end{aligned}$$

З умови (V) випливає, що

$$\begin{aligned} H_1 ** Z &= \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, \beta, x, z) \times \\ &\times K(\beta, z, y) Z(\beta, \tau, y, \xi) dz dy = Z ** H_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Скористаємось далі асоціативністю оператора символічної згортки і рівністю (7)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=2}^{\infty} (H_1 ** H_{\nu-1}) ** Z &= \sum_{\nu=2}^{\infty} (H_{\nu-1} ** H_1) ** Z = \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1} ** (H_1 ** Z) = \\ &= \sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1} ** (Z ** H_1) = \sum_{\nu=2}^{\infty} (H_{\nu-1} ** Z) ** H_1 = \\ &= Z ** \left( \sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1} ** H_1 \right). \end{aligned}$$

Тут останній перехід правильний, оскільки

$$\begin{aligned} H_{\nu-1} ** Z &= \\ &= \underbrace{\left( \dots \left( (H_1 ** H_1) ** H_1 \right) ** \dots ** H_1 \right)}_{\nu-1} ** Z = \\ &= Z ** \underbrace{\left( H_1 ** (H_1 ** \dots ** (H_1 ** H_1) \dots) \right)}_{\nu-1} = \\ &= Z ** H_{\nu-1}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} R ** Z &= Z ** H_1 + Z ** \left( \sum_{\nu=2}^{\infty} H_{\nu-1} ** H_1 \right) = \\ &= Z ** \sum_{\nu=1}^{\infty} H_{\nu} = Z ** R, \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} W^*(\tau, t, \xi, x) &= (\overline{R ** Z})' = \\ &= (\overline{Z ** R})' = \bar{W}'(t, \tau, x, \xi). \end{aligned}$$

А це означає, що твердження про нормальність ФМР ЗК  $\Gamma$  вірне.

**2<sup>0</sup>.** Існує тільки одна нормальна ФМР ЗК  $\Gamma$ , що задовольняє нерівності (3).

*Доведення.* Нехай  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  – дві нормальні ФМР ЗК. Тоді поклавши в (5)  $v(\beta, y) = \Gamma_1^*(\beta, t, y, x)$ ,  $u(\beta, y) = \Gamma_2(\beta, \tau, y, \xi)$ , скориставшись рівністю (6) і наслідком з формули Гріна, одержимо, що інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(t, \beta, x, y) \Gamma_2(\beta, \tau, y, \xi) dy = \Phi(t, \tau, x, \xi)$$

не залежить від  $\beta$ . Згідно з означенням ФМР ЗК  $\Gamma_1, \Gamma_2$  маємо

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow t} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(t, \beta, x, y) \Gamma_2(\beta, \tau, y, \xi) dy &= \\ &= \Gamma_2(t, \tau, x, \xi) = \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \tau} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(t, \beta, x, y) \Gamma_2(\beta, \tau, y, \xi) dy &= \\ &= \Gamma_1(t, \tau, x, \xi) = \Phi, \end{aligned}$$

тобто  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

**3<sup>0</sup>.** ФМР ЗК  $\Gamma$  задовольняє функціональне рівняння

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \tau, x, \xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) \Gamma(\beta, \tau, y, \xi) dy, \\ &\tau < \beta < t, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (8)$$

*Доведення.* Розглянемо розв'язок ЗК  $u_1 = \Gamma(t, \tau, x, \xi)$  з початковою умовою  $u_1|_{t=\beta} = \Gamma(\beta, \tau, x, \xi)$ . З іншого боку, розв'язок  $u_2 = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) \Gamma(\beta, \tau, y, \xi) dy$  теж задовольняє початкову умову  $u_2|_{t=\beta} = \Gamma(\beta, \tau, x, \xi)$ . За теоремою єдиності в класі обмежених функцій  $u_1 = u_2$ , тобто виконується рівність (8).

**4<sup>0</sup>.** Правильні наступні рівності

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{t - \tau} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, \xi) d\xi - E \right) =$$

$$= A_{(0,\dots,0)}(t, x) + \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x, \xi) d\xi, \quad (9)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{1}{t - \tau} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, y) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy = r_1! \cdot \dots \cdot r_n! A_{(r_1, \dots, r_n)}(t, x), \quad (10)$$

де  $E$  – одинична матриця порядку  $N$ ,  $0 < |r| \leq 2b$ .

Якщо ядро  $K$  задовольняє нерівності (2), то рівність (10) правильна тільки при  $|r| = 2b$ . У випадку  $|r| < 2b$ , (10) виконується за умови, що

$$|D_x^m K(t, x, \xi)| \leq C_m t^{-\frac{n+|m|-\alpha}{2b}} e^{-c\rho(t, x, \xi)}, \quad (11)$$

$$t > 0, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |m| = 0, 1.$$

*Доведення.* Встановимо рівність (9). Нехай  $0 < \varepsilon < t - \tau$ . Скористаємось формулою Гріна (5), в якій покладемо  $u(\beta, \xi) = E$ ,  $v(\beta, \xi) = \Gamma^*(\beta, t, \xi, x)$ ,  $t_1 = \tau$ ,  $t_2 = t - \varepsilon$ . Оскільки  $L^* \Gamma^*(\beta, \xi) = 0$ ,  $LE(\beta, \xi) = -A_0(\beta, \xi) - \int_{\mathbb{R}^n} K(\beta, \xi, y) dy$ , а  $(\Gamma^*(\beta, t, \xi, x))' = \Gamma(t, \beta, x, \xi)$  на основі (6), то будемо мати

$$\begin{aligned} & - \int_{\tau}^{t-\varepsilon} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, \xi) A_0(\beta, \xi) d\xi - \\ & - \int_{\tau}^{t-\varepsilon} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, \xi) \int_{\mathbb{R}^n} K(\beta, \xi, y) dy d\xi = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, t - \varepsilon, x, \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Спрямуємо  $\varepsilon \rightarrow 0$ , одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, \xi) A_0(\beta, \xi) d\xi + \\ & + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, \xi) \int_{\mathbb{R}^n} K(\beta, \xi, y) dy d\xi = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, \xi) d\xi - E. \end{aligned}$$

На підставі теореми про середнє значення маємо

$$\begin{aligned} & (t - \tau) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \theta, x, \xi) A_0(\theta, \xi) d\xi + \\ & + (t - \tau) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \theta, x, \xi) \int_{\mathbb{R}^n} K(\theta, \xi, y) dy d\xi = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, \xi) d\xi - E, \quad \tau < \theta < t, \end{aligned}$$

звідки поділивши обидві частини рівності на  $t - \tau$  і перейшовши до границі, одержимо рівність (9).

Для доведення співвідношення (10) покладемо у формулі Гріна (5)  $t_1 = \tau$ ,  $t_2 = t - \varepsilon$ ,  $u(\beta, y) = \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i}$ ,  $v(\beta, y) = \Gamma^*(\beta, t, y, x)$ .

Одержимо

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{t-\varepsilon} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) L(\beta, y, D, K) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy = \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, t - \varepsilon, x, y) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy - \\ & - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, y) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy. \end{aligned}$$

Звідси згідно з властивістю  $\delta$ -подібності ФМР ЗК, спрямувавши  $\varepsilon \rightarrow 0$ , маємо

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) L(\beta, y, D, K) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy = \\ & = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, y) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy. \quad (12) \end{aligned}$$

Розглянемо тепер

$$\begin{aligned} & L(\beta, y, D, K) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} = \\ & = - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(\beta, y) D_y^k \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} - \end{aligned}$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} K(\beta, y, \xi) \prod_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^{r_i} d\xi. \quad (13)$$

Очевидно, що

$$D_y^k \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} = \begin{cases} r_1! \cdot \dots \cdot r_n!, & \text{якщо } \forall i \in \{1, \dots, n\} : k_i = r_i; \\ 0, & \text{якщо } \exists i \in \{1, \dots, n\} : k_i > r_i; \\ \prod_{i=1}^n r_i(r_i - 1) \dots (r_i - k_i + 1)(y_i - x_i)^{r_i - k_i}, & \text{якщо } \exists j \in \{1, \dots, n\} : k_j < r_j, \\ & \forall l \in \{1, \dots, n\} : k_l \leq r_l. \end{cases}$$

Тому

$$\sum_{|k| \leq 2b} A_k(\beta, y) D_y^k \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} = r_1! \cdot \dots \cdot r_n! A_r(\beta, y) + J_r(\beta, y, x), \quad (14)$$

де

$$J_r(\beta, y, x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} A_k(\beta, y) \times \prod_{i=1}^n r_i(r_i - 1) \dots (r_i - k_i + 1)(y_i - x_i)^{r_i - k_i},$$

$$\mathbb{Z}_+^n \equiv \{k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \mid |k| \leq 2b, \exists j \in \{1, \dots, n\} : k_j < r_j, \forall l \in \{1, \dots, n\} : k_l \leq r_l\}.$$

З урахуванням (13) та (14) рівність (12) запишеться у вигляді

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, y) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy = r_1! \cdot \dots \cdot r_n! \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) A_r(\beta, y) dy + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) J_r(\beta, y, x) dy + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) \int_{\mathbb{R}^n} K(\beta, y, \xi) \times \prod_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^{r_i} d\xi dy \equiv I_1 + I_2 + I_3. \quad (15)$$

Оцінимо  $I_2$ , використовуючи оцінки (3) для ФМР  $\Gamma$ , обмеженість коефіцієнтів згідно з умовою (II) і те, що інтеграл типу  $\int_{\mathbb{R}^n} |z|^m e^{-c|z|^q} dz$  є збіжним:

$$|I_2(t, \tau, x)| \leq C \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, y)}}{(t - \beta)^{\frac{n}{2b}}} \times \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} |y - x|^{|r-k|} dy \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \int_{\tau}^t (t - \beta)^{\frac{|r-k|}{2b}} d\beta \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, y)}}{(t - \beta)^{\frac{n}{2b}}} \left( \frac{|y - x|}{(t - \beta)^{1/2b}} \right)^{|r-k|} dy \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (t - \tau)^{\frac{|r-k|}{2b} + 1}, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (16)$$

Для оцінки  $I_3$  оцінимо спочатку внутрішній інтеграл, враховуючи нерівності (2):

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\beta, y, \xi) \prod_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^{r_i} d\xi \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(\beta, y, \xi)}}{\beta^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} |\xi - x|^{|r|} d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(\beta, y, \xi)}}{\beta^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} (|\xi - y| + |y - x|)^{|r|} d\xi = \int_{\mathcal{K}} \dots + \int_{\mathbb{R}^n / \mathcal{K}} \dots \equiv M_1 + M_2.$$

Тут ми скористалися нерівністю трикутника і розбили інтеграл на два інтеграли, де

$$\mathcal{K} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - y| \leq |y - x|\}.$$

Тоді

$$M_1 \leq C_1 |y - x|^{|r|} \beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(\beta, y, \xi)}}{\beta^{\frac{n}{2b}}} d\xi \leq C_1 \beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} |y - x|^{|r|},$$

$$M_2 \leq C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(\beta, y, \xi)}}{\beta^{\frac{n}{2b}}} \left( \frac{|\xi - y|}{\beta^{\frac{1}{2b}}} \right)^{|r|} d\xi \beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}} \leq$$

$$\leq C_2 \beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}}.$$

Остаточно одержимо

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(\beta, y, \xi) \prod_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^{r_i} d\xi \right| \leq \\ & \leq C_1 \beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} |y-x|^{|r|} + C_2 \beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}}, \\ & x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \tau < \beta < t. \end{aligned}$$

З урахуванням даної нерівності інтеграл  $I_3$  оціниться

$$\begin{aligned} & |I_3(t, \tau, x)| \leq \\ & \leq C_1 \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} \beta^{-\frac{2b-\alpha}{2b}} |y-x|^{|r|} dy + \\ & + C_2 \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} \beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}} dy \leq \\ & \leq C_1 \int_{\tau}^t \frac{d\beta}{\beta^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} (t-\beta)^{\frac{|r|}{2b}} \times \\ & \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} \left( \frac{|y-x|}{(t-\beta)^{1/2b}} \right)^{|r|} dy + \\ & + C_2 \int_{\tau}^t \beta^{\frac{|r|-2b+\alpha}{2b}} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-c\rho(t, \beta, x, y)}}{(t-\beta)^{\frac{n}{2b}}} dy \leq \\ & \leq C_1 (t-\tau)^{\frac{|r|}{2b}} \left( t^{\frac{\alpha}{2b}} - \tau^{\frac{\alpha}{2b}} \right) + C_2 \left( t^{\frac{|r|+\alpha}{2b}} - \tau^{\frac{|r|+\alpha}{2b}} \right), \end{aligned} \tag{17}$$

$$t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

У результаті рівність (15), враховуючи (16) і (17), можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, y) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy = \\ & = r_1! \cdot \dots \cdot r_n! \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) A_r(\beta, y) dy + \\ & + O\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_r^n} (t-\tau)^{\frac{|r-k|}{2b}+1} \right) + O\left( (t-\tau)^{\frac{|r|}{2b}} \left( t^{\frac{\alpha}{2b}} - \tau^{\frac{\alpha}{2b}} \right) \right) + \\ & + O\left( t^{\frac{|r|+\alpha}{2b}} - \tau^{\frac{|r|+\alpha}{2b}} \right), \quad |r| = 2b. \end{aligned}$$

У випадку, коли  $|r| < 2b$ , рівність (15) на основі нерівності (11) набере вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \tau, x, y) \prod_{i=1}^n (y_i - x_i)^{r_i} dy = \\ & = r_1! \cdot \dots \cdot r_n! \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, \beta, x, y) A_r(\beta, y) dy + \\ & + O\left( \sum_{k \in \mathbb{Z}_r^n} (t-\tau)^{\frac{|r-k|}{2b}+1} \right) + \\ & + O\left( (t-\tau)^{\frac{|r|}{2b}} \left( t^{\frac{\alpha}{2b}+1} - \tau^{\frac{\alpha}{2b}+1} \right) \right) + \\ & + O\left( t^{\frac{|r|+\alpha}{2b}+1} - \tau^{\frac{|r|+\alpha}{2b}+1} \right). \end{aligned}$$

Поділивши обидві частини цих рівностей на  $t - \tau$  і перейшовши до границі при  $\tau \rightarrow t$ , одержимо (10).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 444 с.
2. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. — Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. — 390 p. — (Operator Theory: Advances and Applications. - Vol. 152.)
3. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні : монографія . - Чернівці, 2010. - 248 с.
4. *Данилюк А. О., Матійчук М. І.* Задача Коші для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з оператором типу Фредгольма // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Серія: математика: зб. наук. праць. — Т.2, №1. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. — С. 16-23.
5. *Данилюк А. О.* Крайова задача для параболічної системи інтегро-диференціальних рівнянь з інтегральними умовами // Укр. мат. журн. — 2008. — 60, №12. — С. 1610-1618.
6. *Слободецкий Л. Н.* О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы // Мат. сб. — 1958. — 46, №2. — С. 229 - 258.